Kovarianz

Definition 1.34 *Die* **Kovarianz** *von zwei ZV'en X und Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist*

$$Kov(X,Y) := \mathbb{E}[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Bemerkung

- $Kov(X,X) = V(X)$
- $Kov(X,Y) = Kov(X + c_1, Y + c_2) = \mathbb{E}(\bar{X}, \bar{Y})$
  mit $\bar{X} := X - E(X), \ \bar{Y} := Y - E(Y)$
- $Kov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

  $= \iint_{\mathbb{R}^2} xy\mu_{(X,Y)}(dxdy) - \int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx) \int_{\mathbb{R}} y\mu_Y(dy)$

  mit

  $\mu_{(X,Y)}$ – *Gemeinsame Verteilung von* (X,Y)
  μ_X, μ_y – *('Rand'-)Verteilung von X bzw. von Y*

Bsp. 1.19 *Für $X = \vec{X} \in \mathbb{R}^d$ mit $\vec{X} \sim \nu_{m,C}$ (Gauss-Verteilung in $\mathbb{R}^d$)*

$$Kov(X_i, X_j) = C_{ij}.$$

Bew: $C \in \mathbb{R}^{d\times d}_{symm,>0} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}^{d\times d} : C = S\,S^t.$

$\overset{\text{Transformationssatz}}{\Longrightarrow}$ *Behauptung durch Integration nach* $y := S^{-1}x.$

Gleichheit von Bienamé

Definition 1.35 *Zwei ZV'en X, Y heißen* **unkorrelliert**, *falls $Kov(X, Y) = 0$.*

Bsp. 1.20 *Falls $X \hat{=} x-$ Koordinate und $Y \hat{=}$ Radius einer B_1-gleichverteilten ZV $\vec{X} \in B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (vergl. Beispiel 1.18), so ist $Kov(X, Y) = 0$.*

Definition 1.36 **Korrelation zweier Zufallsvariablen**

$$\rho(X, Y) := \frac{Kov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(X)}}$$

Bemerkung *Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\Rightarrow \rho(X, Y) \in [-1, 1]$*

Lemma 1.4 (Bienamé) *Für $X_1, \cdots, X_n$ paarweise unkorrelliert (d.h. $Kov(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$)*

$$V(\textstyle\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

Bew: *O.b.d.A. $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

$V(\sum X_i) = \mathbb{E}[(\sum_i X_i)^2)] = \mathbb{E}[(\sum_i X_i)(\sum_j X_j)] = \mathbb{E}[\sum_{i,j} X_i X_j]$
$= \sum_{i,j} \mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{i,j} \delta_{ij} E(X_i X_j) = \sum_i V(X_i).$

Kapitel 2:

Gesetze der Großen Zahlen und Unabhängigkeit

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz 2.1 *Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von paarweise unkorrellierten indentisch verteilten reellen ZV'en mit $X_1 \in L^2$, dann gilt für $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{stochastisch}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_1).$$

Bew: *O.b.d.A $E(X_1) = 0$.*
Tschebyshev für $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und Bienamyé:

$$\begin{aligned} P(|\frac{1}{n}S_n| > \delta) &= P(|S_n| > n\delta) \leq \frac{1}{n^2\delta^2} V(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_i V(X_i) = \frac{1}{n\delta^2}\mathbb{E}(X_1^2) \to 0. \end{aligned}$$ □

Bemerkung *Es folgt i.A. nicht, dass $\frac{1}{n}S_n \to \mathbb{E}(X_1)$ fast sicher. Insbesondere gilt i.A. nicht , dass die Approximation $\frac{1}{n}S_n(\omega)$ von $E(X_1)$ für $n \to \infty$ immer besser wird.*

2.1 Unabhängigkeit

Unabhängige Ereignisse

Definition 2.1

- *Eine Familie von Ereignissen* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *im W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt* **unabhängig**, *falls für jede endliche Teilmenge* $\Lambda' \subset \Lambda$ *gilt*
$$P(\cap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda'} P(A_\lambda).$$
- *Die Ereignisse Eine Familie von Ereignissen* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *heißen paarweise* **paarweise unabhängig**, *falls*
$$P(A_\lambda \cap A_{\lambda'}) = P(A_\lambda) \cdot P(A_{\lambda'}) \forall \lambda \neq \lambda'.$$

Bsp. 2.1 *Von den vier Ziffernfolgen* 112, 121, 211, 222 *wird eine zufällig ausgewählt. Dann sind die Ereignisse* $A_i :=$ *"i-te Stelle ist 1",* $i = 1, 2, 3$ *paarweise unabhängig aber nicht unabhängig.*

Bemerkung $A_1, \ldots, A_n$ *unabhängig* $\Leftrightarrow$ $A_1^c, \ldots, A_n^c$ *unabhängig.*

Borel-Cantelli: Umkehrung

Satz 2.2 *Seien* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unabhängige Ereignisse in* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit* $\sum_n P(A_n) = \infty$, *dann gilt* $P(\limsup A_n) = 1$.

Bew: $B_n := \cup_{m\geq n} A_m \searrow \limsup A_n$. *Zeige* $P(B_n) = 1$.

$$
\begin{aligned}
P(B_n^c) = P(\cap_{m\geq n} A_m^c) &= \lim_{l\to\infty} P(\cap_{n\leq m\leq l} A_m^c) \\
&= \lim_l \prod_{n\leq m\leq l} P(A_m^c) = \lim_l \prod_{n\leq m\leq l} (1 - P(A_m)) \\
&= \lim_l \exp[\sum_{n\leq m\leq l} \log(1 - P(A_m))] \\
&\leq \lim_l \exp[- \sum_{n\leq m\leq l} P(A_m)] = 0,
\end{aligned}
$$

weil $\log(1-x) \leq -x$ *und* $\sum_{n\leq m\leq l} P(A_m) \to \infty$ *für* $l \to \infty$. $\square$

Bsp. 2.2 *Unendliche Wiederholung unabh. Münzwürfe mit* $p \in]0,1[$.

$$\Rightarrow P(\text{"unendlich häufig Kopf"}) = 1.$$

Korollar 2.1 (0-1-Gesetz von Borel) $P(\limsup A_n) \in \{0,1\}$ *für jede unabh. Folge* $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$.

Borel-Cantelli: Umkehrung (II)

Satz 2.3 (Chung) *Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarw. unabhängige Ereignisse in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\sum_n P(A_n) = \infty$, dann gilt $P(\limsup A_n) = 1$.*

Bew: *Zeige* $P(S = \infty) = 1$ *mit* $S = \lim_n S_n$, $S_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$

1) $\overset{\text{Monot. Konvergenz}}{\Longrightarrow} E(S_n) \to E(S) = \infty.$

2) $\overset{\text{Biename}}{\Longrightarrow} V(S_n) = \sum V(\mathbb{1}_{A_i}) \leq \sum_{i=1}^n E(\mathbb{1}_{A_i}^2) = E(S_n)$

$$\overset{\text{1) und 2)}}{\Longrightarrow} \frac{V(S_n)}{E^2(S_n)} \to 0.$$

$$\overset{\text{Tschebyshev}}{\Longrightarrow} P(S_n \geq \tfrac{1}{2}E(S_n)) \geq P(|S_n - E(S_n)| \leq \tfrac{1}{2}E(S_n)) \geq 1 - 4\frac{V(S_n)}{E^2(S_n)} \geq 1 - \delta, \text{ falls } n \geq N_0(\delta).$$

$$\Rightarrow P(S \geq \tfrac{1}{2}E(S_n)) \geq 1 - \delta, \text{ falls } n \geq N_0(\delta).$$

$$\overset{E(S_n) \to \infty}{\Longrightarrow} P(S = \infty) \geq 1 - \delta \; \forall \delta > 0$$

□

Korollar 2.2 (0-1-Gesetz von Chung) *$P(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$ für jede paarw. unabh. Folge $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$.*

Unabhängige Mengensysteme

Definition 2.2 *Eine Familie* $\{\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{F} \mid \lambda \in \Lambda\}$ *von Ereignismengen heißt unabhängig, falls jede endliche Teilauswahl von Mengen* $\{A_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, N, \lambda_i \neq \lambda_j$ *für* $i \neq j\}$ *unabhängig ist.*

Lemma 2.1 *Für eine unabh. Familie* $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *von* $\cap$*-stabilen Mengensystemen ist auch* $\{\sigma(\mathcal{E}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *unabhängig.*

Bew: $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *unabh.* $\Rightarrow$ *Zugeh. Dynkin-Systeme* $(\delta(\mathcal{E}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ *unabhängig. Wegen* $\cap$*-Stabilität von* $\mathcal{E}_\lambda$ *ist* $\delta(E_\lambda) = \sigma(E_\lambda) \,\forall\, \lambda$.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 2.3 *Eine Familie von $(E, \mathcal{E})$-wertigen Zufallsvariablen $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heißt* **unabhängig** *falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \Lambda$, $B_1, \ldots B_N \in \mathcal{E}$*

$$A_1 := \{X_{\lambda_1} \in B_1\}, \ldots, A_N := \{X_{\lambda_N} \in B_N\} \text{ unabhängig.}$$

Bemerkung

- $X_1, \cdots, X_n$ *unabhängig* $\Leftrightarrow \sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ *unabhängig.*
- $X_1, \cdots, X_n \Rightarrow \varphi_1(X_1), \ldots \varphi_n(X_n)$ *unabhängig,*
  falls $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ *messbar* $E \to E'$

Satz 2.4 *Für reelle ZV'en $X_1, \ldots, X_d$ sind äquivalent*

- $X_1, \ldots, X_d$ *unabhängig*
- $\forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\ F_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_d) = \prod_{i=1\ldots d} F_{X_i}(t_i)$.
- $\mu_{\vec{X}} = \otimes_{i=1}^d \mu_{X_i}$ *(Produktmaß auf $\mathbb{R}^d$):*

  d.h. $$\mu_{\vec{X}}(]a_1, b_1] \ldots]a_d, b_d]) = \bigotimes_{i=1}^{d} \mu_{X_i}(]a_i, b_i]).$$

Korollar 2.3 *Für $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig ist* $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$.

2.2 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Starkes Gesetz – Einfacher Fall

Satz 2.5 *Falls $(X_n)_n$ eine Folge von i.i.d. ZV'en auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}(X_i^4) < \infty$, so gilt mit $m = E(X_1)$, dass*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m \text{ fast sicher.}$$

Bew: *O.b.d.A* $m = 0$.

Mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *gilt*

$$E(S_n^4) = \sum_{i,j,k,l=1}^n E(X_i X_j X_k X_l)$$
$$= nE(X_1^4) + \binom{n}{2}\binom{4}{2}(E(X_1^2))^2 = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2 \le C\, n^2.$$

$$\stackrel{\text{Tschebyshev}}{\Longrightarrow} P(\tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta) = P(|S_n| > n\delta) \le \frac{1}{n^4\delta^4} C\, n^2 = \frac{C}{\delta^4 n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_n P(\tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta) < \infty$$

$$\stackrel{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} P(\limsup_n \tfrac{1}{n}|S_n| \ge \delta) = 0.$$

$$\Rightarrow P(\limsup_n \tfrac{1}{n}|S_n| \ne 0) \le P(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\limsup \tfrac{1}{n}|S_n| \ge \tfrac{1}{k}\}) = 0.$$