Langzeitverhalten (I) – Ergodensatz

Satz 5.16 *i) Sei $(X_k)_k$ irreduzible homog. MK auf E, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{1}_k(X_l) = \pi_k = \frac{1}{E_k(\tau_k)} \text{ fast sicher.}$$

ii) Falls $(X_k)_k$ zudem pos. rekurrent und $f : E \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} f(X_l) = \sum_{i\in E} \pi_k f_k \text{ fast sicher.}$$

Bemerkung

- *Aussage: "Zeitmittel" = "Raummittel" bzw.*
- $\hat{\pi}_k^n := \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)$ **emp. Aufenthaltsmaß** $\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \pi$ *f.s.*
- (X_k) *mit der Eigenschaft wie in ii) heißt* **ergodisch**.

Lemma 5.7 *Sei (X_k) homog. MK auf E, $k \in E$, dann sind die Exkursionen $S_i^{(k)} := \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)}$, $i \geq 2$, u.i.v. mit $E(S_i^k) = E_k(\tau_k)$.*

Bew: *Einfache Konsequenz der Markov-Eigenschaft (s. Übungen).*

Beweis Satz 5.16

i): Falls k transient $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)=0=\frac{1}{E_k(\tau_k)}$.

Falls k rekurrent:

$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)=\lim_n \frac{1}{n}V_n^{(k)};\ V_n^{(k)}:=\sum_{l=1}^{n}\mathbb{1}_{\{k\}}(X_l)$

$$\overset{\text{Def. von } \tau_i^{(k)}}{\Longrightarrow}\quad \tau^{(k)}_{V_n^{(k)}}\le n \text{ und } \tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1}\ge n+1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n}\frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1}}\le\frac{V_n^{(k)}}{n}\le\frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}}}$$

$$\overset{\text{SGZ}}{\Longrightarrow} \frac{\tau_n^{(k)}}{n}=\frac{\sum_{l=i}^{n}S_i^{(k)}}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}E_k(\tau_k) \text{ f.s.}$$

Ferner $V_n^{(k)}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ f.s, da k rekurrent

$$\Longrightarrow \frac{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}}}{V_n^{(k)}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}E_k(\tau_k) \text{ f.s. bzw. } \frac{n+1}{n}\frac{V_n^{(k)}}{\tau^{(k)}_{V_n^{(k)}+1}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}E_k(\tau_k) \text{ f.s.}$$

ii): Folgt aus i) falls $f=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\mathbb{1}_{\{k_j\}}$.

Allgem. f: Wahle $A\subset E$ endlich, s.d. $\mu(A)\ge 1-\epsilon$, $\hat{f}:=\mathbb{1}_A f$.

$|\langle f,\hat{\pi}_n\rangle-\langle f,\pi\rangle|\le|\langle f-\hat{f},\hat{\pi}_n\rangle|+|\langle\hat{f},\hat{\pi}_n\rangle-\hat{f},\pi\rangle|+|\langle f-\hat{f},\pi\rangle|$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt aus $|\langle\hat{f},\pi\rangle-\langle f,\pi\rangle|\le\epsilon\|f\|_\infty$ und

$|\langle f-\hat{f},\hat{\pi}_n\rangle|\le\|f\|_\infty(1-\hat{\pi}_n(A))\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|f\|_\infty(1-\pi(A))\le\epsilon\|f\|_\infty$.

Langzeitverhalten (II) - Mischen

Definition 5.21 • *Für (X_k) homog. MK auf E mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$, $k \in E$ heißt*

$$d_k := ggT\{n \,|\, p_k^{(n)} k > 0\}$$

Periode vom Zustand k.

• *Falls $d_k = 1$ für alle $k \in E$ heißt (X_k)* **aperiodisch**.

Bemerkung *"Periode" ist eine Klasseneigenschaft, da $d_k = d_{k'}$, falls $k \leftrightarrow k'$.*

Satz 5.17 *Sei P irreduzibel aperiodisch auf E und mit inv. Verteilung π. Dann gilt für jede (λ, P)-MK und (X_k) eine auf E mit bel. Startverteilung λ*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \pi_k \quad \forall k \in E. \qquad (*)$$

Bemerkung *Eine MK (X_k) mit der Eigenschaft $(*)$ heißt* **mischend**.

Bsp. 5.7 *$E = \{1, 2\}$, $p_{1,2} = p_{2,1} = 1 \Rightarrow P$ irreduzibel, pos. rekurrent, periodisch mit Periode 2. Falls z.B. $\lambda_1 := 1, \lambda_2 := 0$ $\Rightarrow P(X_n = 1) = 0$, falls n ungerade bzw. $= 1$, falls n gerade.*

Beweis von Satz 5.17 – Vorbereitungen

Lemma 5.8 *Sei $M \subset \mathbb{N}$ abgeschlossen unter Addition und mit $ggT(M) = 1$, dann ex. $m \in \mathbb{N}$, s.d. $\mathbb{N}_{\geq m} \subset M$.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Korollar 5.5 *Falls P aperiodisch irreduzibel, so ex für $i, j \in \mathbb{N}$ ein $m = m(i, j)$, s.d. $p_{ij}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq m$.*

Bew: *Sei $p_{ij}^{(l)}$ und n, s.d. $p_{jj}^{(k)} > 0$ für $k \geq n$, dann gilt für $m \geq n + l$*
$p_{ij}^{(m)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{ij}^{(m-l)} > 0$.

Lemma 5.9 *1) Seien $(X_k)_k$ und $(Y_k)_k$ zwei unabhängige (λ, P)-MK auf E, dann ist $W_k := (X_k, Y_k)$ eine $(\lambda \otimes \lambda', Q)$-MK auf $E \times E$, mit $Q_{ii',jj'} = P^{\otimes 2}_{ii',jj'} = P_{ij}P_{i'j'}$.*

2) Q ist irreduzibel und pos. rekurrent, falls P pos. rekurrent, irreduzibel und aperiodisch.

Bew:

- $P[W_{n+1} = (j, j')|W_n = (i, i')]$
$\overset{Unabh.}{=} P(X_{n+1} = j|X_n = i)\, P(Y_{n+1} = j'|X_n = i') = p_{ij}p_{i'j'}$.
Analog $P[W = (i, i')] = \lambda_i \lambda'_{i'}$
- *Für* (i, i') *und* (j, j')
$\overset{Lemma\ 5.5}{\Longrightarrow} Q^{(M)}_{(i,i'),(j,j')} > 0$ *für* $M := \max[m(i, j), m(i', j')]$.
- *Falls* π *inv. Verteilung für* P
$\Rightarrow \pi \otimes \pi$ *invariante Verteilung auf* $E \times E$ *für* $Q := P \otimes P$
$\Rightarrow Q$ *pos. rekurrent.*

Beweis von Satz 5.17

- Sei $W_k := (X_k, Y_k)$ Paar von zwei unabh. P-MK auf E mit Startverteilungen λ bzw. π

$\Rightarrow (W_k)_k$ irreduzibel und (pos.) rekurrent auf $E \times E$

Sei $e \in E$ bel. und $T := \inf\{k \geq 0 \,|\, W_k = (e,e)\}$.

- Wähle $e \in E$ bel. und $T := \inf\{k \geq 0 \,|\, W_k = (b,b)\}$.

$\Rightarrow$ Beh.: $T < \infty$ fast sicher.

Denn andernfalls ex. wegen
$P(T = \infty) = \sum_{(i,j) \in E \times E} \lambda_i \lambda_j P_{(i,j)}(T = \infty) > 0$ ein
$(i,j) \in E \times E$, s.d. $P_{(i,j)}(T = \infty) > 0$ und dann

$$\begin{aligned} P_{(e,e)}(\tau_{(e,e)} = \infty) &\geq P_{(e,e)}(T = \infty) \\ &\geq Q^{(l)}_{(i,j),(e,e)} P_{(i,j)}(T = \infty) > 0, \end{aligned}$$

falls $Q^{(l)}_{(i,j),(b,b)} > 0$.

- Sei $Z_k := \begin{cases} X_k & \text{falls } k < T \\ Y_k & \text{falls } k \geq T \end{cases} \Rightarrow (Z_k)_k$ ist (λ, P)-MK
- $|P(X_n = k) - \pi_k| = |P(X_n = k) - P(Y_n = k)|$

$= |P(X_n = k, n \leq T) - P(Y_n = k, n \leq T)|$

$\leq P(n \leq T) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\square$