Irreduzibilität

Definition 5.17 *Sei (X_k) MK auf E mit Übergangsmatrix p, und $i, j \in E$.*
$\bullet i \rightsquigarrow j :\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}_0 : p^l_{ij} > 0.$
$\bullet i \leftrightarrow j :\Leftrightarrow i \rightsquigarrow j$ *und* $j \rightsquigarrow i$
• *Die durch $\leftrightarrow$ definierten Äquivalenzklassen auf E heißen* **(kommunizierende) Klassen.**
• *Eine Menge $K \subset E$ heißt* **abgeschlossen**, *falls $K \not\rightsquigarrow E \setminus K$, d.h. $i \not\rightsquigarrow j$ für alle $i \in K, \in E \setminus K$*

Bemerkung *Für $K \subset E$ abgeschlossen ist $(p_{|K}) = (p_{ij})_{i,j \in K}$ wieder eine stochastische Matrix.*

Definition 5.18 (X_k) *heißt* **irreduzibel**, *falls $i \leftrightarrow j \, \forall \, i, j \in E$.*

Satz 5.10 *Falls $i \leftrightarrow j$ ist i rekurrent genau dann, wenn j transient ist.*

Bew: *Folgt für $p_{ji}^{l} > 0$ und $p_{ij}^{l'} > 0$ aus aus $p_{jj}^{l+k+l'} \geq p_{ji}^{l} p_{ii}^{k} p_{ij}^{l'} \, \forall k$.*

Bemerkung *$\Rightarrow$ Transienz/Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft.*

Satz 5.11 *Jede rekurrente Klasse ist geschlossen.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Satz 5.12 *Jede endl. geschlossene Klasse ist rekurrent.*

Bew: *Übungsaufgabe.*

Korollar 5.2 *Jede irreduzible Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum ist rekurrent.*

Invariante Maße und Verteilungen

Definition 5.19 *Sei p eine stoch. Matrix auf E. Dann heißt $\lambda_i \geq 0, i \in E$ mit*

$$\lambda_j = \sum_{i \in E} \lambda_i p_{ij} \quad \forall j \in E$$

*P-**invariantes Maß**,*
*bzw. P-**invariante Verteilung**, falls zudem $\sum_i \lambda_i < \infty$.*

Bemerkung *Falls λ_i inv. Verteilung $\Rightarrow$ OBdA $\sum_i \lambda_i = 1$, denn sonst mit $Z = \sum_{i \in E} \lambda_i$ ist $\tilde{\lambda}_i := \frac{1}{Z} \lambda_i$ auch invariant mit $\sum \tilde{\lambda}_i = 1$.*

Satz 5.13 *Falls λ eine inv. Verteilung für p und (X_k) eine (λ, P)-MK, so gilt $P(X_k = i) = \lambda_i$ forall $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in E$.*

Bew: *Für $k = 1 \Leftrightarrow$ Def. von Invarianz. Für $k \geq 2$ durch Induktion.*

Lemma 5.5 *Falls μ und ν invariante Maße mit $\mu_i \geq \nu_i \forall i \in E$ und $\mu_{i_0} = \nu_{i_0}$ für ein $i_0 \in E$, so ist $\nu = \mu$, falls P irreduzibel.*

Bew: *$\eta := \mu - \nu \geq 0$ invariant*
$\Rightarrow 0 = \eta_{i_0} = \sum_j \eta_j p^k_{ji_0} \geq \eta_i p^k_{ii_0} \Rightarrow \eta_i = 0$, falls $p^k_{ii_0} > 0$.

Inv. Maß – Existenz bei Rekurrenz

Satz 5.14 *Sei (X_k) eine homog. MK auf E und $k \in E$ rekurrent, dann ist $\gamma_i^{(k)} := \gamma_i := E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_i(X_l)]$, $i \in E$ ein inv. Maß (mit $\gamma_k = 1$).*

Bew: *Erinnerung* $\tau_k := \inf\{l \in \mathbb{N} \,|\, X_l = k\}$.

$$
\begin{aligned}
\gamma_i &= E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_i(X_l)] = \sum_{l \geq 1} P_k(X_l = i, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{l \geq 1} \sum_{j \in E} P_k(X_l = i, X_{l-1} = j, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{l \geq 1} \sum_{j \in E} P_k(X_l = i, X_{l-1} = j, X_1 \neq k, \ldots, X_{l-1} \neq k) \\
&\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} \sum_{l \geq 1} \sum_{j \in E} P_k(X_l = i | X_{l-1} = j) P_k(X_{l-1} = j, l \leq \tau_k) \\
&= \sum_{j \in E} p_{ji} E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_{\{j\}}(X_l)] = \sum_{j \in E} p_{ji} \gamma_j .
\end{aligned}
$$

□

Korollar 5.3 *Falls P irreduzibel und $k \in E$ rekurrent, so gilt $0 < \gamma_i < \infty$.*

Bew: $\gamma_i = \sum_{j \in E} p_{ji}^m \gamma_j \geq p_{jk}^{(m)} 1 > 0$ *und* $1 = \gamma_k = \sum_{j \in E} p_{jk}^{(l)} \gamma_j > p_{ji}^{(l)} \gamma_i$.

Bsp. 5.5 ('Fluchtkette')

$E = \mathbb{N}_0$, $p_{i,i+1} = p_i$ fur $i \geq 1$, $p_{i,0} = q_i = 1 - p_i$, wobei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ so gewählt, dass $p := \prod_{i=0}^{\infty} p_i > 0$.

$\pi_{i\geq 0}$ invariant $\Leftrightarrow \pi_0 = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \pi_i p_i$ und $\pi_i = p_{i-1}\pi_i$ für $i \geq 1$.

$\Rightarrow \pi_i = \prod_{l=0}^{i-1} p_l \pi_0$

$\Rightarrow \pi_0 = \sum_{i\in\mathbb{N}_0}(1 - p_i) \prod_{l=0}^{i-1} p_l \pi_0 = (1 - p)\pi_0. \Rightarrow \pi_0 = 0,$

d.h. es ex. nur die triviale Lösung $\pi_i = 0 \,\forall\, i \in E$.

Bemerkung *Kein Widerspruch zu Satz 5.14, da $(X_k)_k$ zwar irreduzibel aber nicht rekurrent (s. Übung).*

Inv. Maß: Eindeutigkeit bei Irreduzibilität

Lemma 5.6 *Falls P irreduzibel und λ inv. Maß mit $\lambda_k = 1$, so gilt $\lambda \geq \gamma^{(k)}$.*

Bew: *Für $k = j$ $\lambda_k = 1 \geq \gamma_k = f_k = P_k(\tau_k < \infty)$.*
Für $k \neq j$:

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i_1 \in E} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} = \sum_{i_1 \neq k} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_1 \neq k} \sum_{i_2 \neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j} + \sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_1 \neq k, \ldots, i_n \neq k} \lambda_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_1 j} \\
&\qquad + p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + \cdots + \sum_{i_1, \ldots, i_n} p_{k i_{n-1}} \ldots p_{i_2 i_1} p_{i_1 j} \\
&\overset{\text{für } j \neq k}{\geq} P_k(X_1 = j) + P_k(X_2 = j, \tau_k \geq 2) + \cdots + P_k(X_n = j, \tau_k \geq n) \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \gamma_j^{(k)}.
\end{aligned}$$

Korollar 5.4 *Falls P irreduzibel und rekurrent, so ist $\gamma := \gamma^{(k)}$ das einzige inv. Maß mit $\gamma_k = 1$.*

Bew: *Folgt aus Lemma 5.5 und Lemma 5.6.*

Positive Rekurrenz und Nullrekurrenz – Existenz einer invarianten Verteilung

Definition 5.20 *Ein Zustand $k \in E$ heißt* **positiv rekurrent***, falls $E_k(\tau_k) < \infty$. Ein rekurrenter Zustand mit $E_k(\tau_k) = \infty$ heißt* **null-rekurrent***.*

Bemerkung *$E_k(\tau_k) < 0 \Rightarrow \tau_k < \infty$ P_k-f.s., d.h. k dann auch rekurrent.*

Satz 5.15 *Sei P eine irreduzible Übergangsmatrix auf E, dann sind äquivalent*
i) k positiv rekurrent für alle $k \in E$.
ii) k positiv rekurrent für ein $k \in E$.
ii) Es ex. eine invariante Verteilung π auf E.

Ferner ist π dann eindeutig gegeben durch $\pi_i = \frac{1}{E_i(\tau_i)}$, $i \in E$.

Bsp. 5.6 *Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ für $d \leq 2$ ist null-rekurrent, denn eind. inv. Maß gegeben durch $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}^d$ und $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_i = \infty$.*

Beweis Satz 5.15

i $\Rightarrow$ ii: klar. ii $\Rightarrow$ iii: Für k pos. rekurrent ist

$$\sum_{i\in E} \gamma_i^{(k)} = \sum_i E_k[\sum_{l=1}^{\tau_k} \mathbb{1}_{\{i\}}(X_l)]$$
$$= \sum_{l=1}^{\tau_k} E_k(\mathbb{1}) = E_k(\tau_k) < \infty,$$

d.h. $\gamma_i^{(k)}, i \in E$, ist eine inv. Verteilung.
iii $\Rightarrow$ i: $\sum_{j\in E} \pi_j = 1 \Rightarrow \exists j \in E$ mit $\pi_j > 0$.
Für $k \in E$ sei $l \in \mathbb{N}_0$, so dass $p_{jk}^{(l)} > 0$, dann
$\pi_k = \sum_{j\in E} p_{jk}\pi_j > 0$.
Setze $\lambda_i := \lambda_i^{(k)} := \frac{\pi_i}{\pi_k}$.
$\Rightarrow \lambda$ invariant und $\lambda_k = 1 \overset{\text{Lemma 5.6}}{\Longrightarrow} \lambda_i^{(k)} \geq \gamma_i^{(k)} \forall i \in E$
$\Rightarrow E_k(\tau_k) = \sum_{i\in E} \gamma_i^{(k)} \leq \frac{1}{\pi_k} \sum_{i\in E} \pi_i = \frac{1}{\pi_k}$.
Zusatzbehauptung:
$\overset{\text{Kor. 5.4}}{\Longrightarrow} \gamma_i^{(k)} = \frac{\pi_i}{\pi_k} \overset{\sum_{i\in E}\cdots}{\Longrightarrow} E_k(\tau_k) = \frac{1}{\pi_k}$. $\square$