Kapitel 5:

Markovketten

Definition 5.1 *Eine Fam. $(X_i)_{i\in I}$ von ZV'en $X_i : \Omega \to E$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten im messb. Raum $(E, \mathcal{E})$ heißt* **Stochastischer Prozess**.

Bezeichnungen

- E – **'Zustandsraum'**
- $f : E \to \mathbb{R}$ messbar – **'Observable'**

Bsp. 5.1

- $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \in \mathbb{N}$, *mit* ξ_i *unabh. id. vert. reelle ZV'en.* $\rightsquigarrow E = \mathbb{R}$.
- $X_n \hat{=}$ *Sitzanordung der Studierenden im Hörsaal in der* n*-ten Sitzung.* $\rightsquigarrow E \hat{=}$ *Menge aller möglichen Sitzanordungen.*

Definition 5.2 *Sei I geordnete Menge und $(X_i)_{i\in I}$ stoch. Prozess mit abzählbaren Zustandsraum $(E, \mathcal{E} = 2^E)$, s.d. für alle $i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq i_{N+1}$ und $A_i \in \mathcal{E}, e \in E$*

$$\begin{aligned} P(X_{i_{N+1}} \in A_{N+1} | X_{i_1} \in A_1, \ldots, , X_{i_{N-1}} \in A_{N-1}, X_{i_N} = e) \\ = P(X_{i_{N+1}} \in A_{N+1} | X_{i_N} = e) \end{aligned}$$

so heißt $(X_i)_{i\in I}$ **Markov-Prozess**.

Bemerkung *$(X_i)_{i\in I}$ Markov $:\Leftrightarrow X_{i_{N+1}}$ ('künftiger Zustand') hängt nur von X_{i_N} ('Aktueller Zustand') ab, nicht von der weiteren Vergangenheit.*

Definition 5.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A, B, C \in \mathcal{F}$. Dann heißen A, B* **bedingt unabhängig gegeben** *C, falls $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$.*

Lemma 5.1 ("Markov-Lemma") *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A, B, C \in \mathcal{F}$*
1) A, B bedingt unabhängig gegeben C
2) $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3) $P(A \cap C|B) = P(A|C)P(C|B)$

Bew: *Übung.*

Bemerkung *Markov Eigenschaft $\Leftrightarrow$ Zukunft und Vergangenheit bedingt unabh. gegeb. Gegenwart.*

Vereinbarung Im folgenden ist stets (falls nicht anders bezeichnet)

- E abzählbar mit $\mathcal{E} = 2^E$.
- $I = \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow (X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ **'Markov-Kette'**.

Definition 5.4 *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf E.*
$\bullet P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_m = j | X_n = i)$, $i,j \in E$, $m \geq n \geq 0$, *heißt* (m,n)-**Übergangskern** *von* (X_k).
$\bullet$ (X_k) *heißt* **(zeitlich) homogen**, *falls* $P_{i,j}^{(m,n)} = P_{i,j}^{(m+k,n+k)}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$.
$\bullet$ $\lambda := Vert(X_0)$ *heißt* **Startverteilung** *von* $(X_k)_k$

Satz 5.1 *Eine Markov-Kette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist homogen $\Leftrightarrow P_{i,j}^{(m,n)} = (P^{m-n})_{ij}$ (Matrixprodukt) mit $P = P^{1,0}$ (1-Schritt Übergangskern).*

Bew: $\Leftarrow$ *klar.*
Beweis von "$\Rightarrow$" durch Induktion nach $t = m - n$. Falls $t = 1$ klar. Für $t + 1$:
$P_{i,j}^{(m,n)} = P_{i,j}^{(m-n,0)} = P_{i,j}^{(t+1,0)} = P(X_{t+1} = j | X_0 = i)$
$= \sum_{o\in E} P(X_{t+1} = j, X_1 = o | X_0 = i)$
$\overset{\text{Markov-Lemma}}{=} \sum_{o\in E} P(X_{t+1} = j | X_1 = o) P(X_1 = o | X_i) = (P^t \cdot P)_{ij}$.

Bemerkung $P =: (p_{ij})_{i,j\in E\times E}$ **'stochastische Matrix'**, *d.h.* $p_{ij} \geq 0$ *und* $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1 \, \forall i \in E$.

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Definition 5.5 *Sei $(X_i)_{i\in I}$ ein stoch. Prozess mit Werten in E, dann heißt die Familie die W-Maße $(P_{i_1,\ldots,i_N})_{i_1\le i_2,\cdots\le i_N\in I}$*

$$P_{i_1,\ldots,i_N}(A_1,\ldots,A_N) := P(X_{i_1}\in A_1,\ldots,X_{i_N}\in A_N), \quad A_i\in\mathcal{E}$$

die endlich-dimensionalen Verteilungen von $(X_i)_{i\in I}$.

Satz 5.2 *Die endlich dimensionalen Verteilungen einer homog. Markovkette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sind durch λ (Startverteilung) und P (Übergangskern) eindeutig bestimmt.*

Bew:

- $P(X_n = e_n,\ldots,X_0 = e_0)$
$= P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)P(X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)$
$= P_{e_{n-1},e_n}P(X_{n-1} = e_{n-1},\ldots,X_0 = e_0)$
$= \cdots = \prod_{i=1}^n P_{e_n,e_{n-1}}P(X_1 = e_1, X_0 = e_0)$
$= \prod_{i=1}^n P_{e_n,e_{n-1}}P(X_1 = e_1|X_0 = e_0)P(X_0 = e_0)$
$= \prod_{i=0}^n P_{e_n,e_{n-1}}\lambda(e_0)$. $\rightsquigarrow$ *eind. bestimmt durch P und λ.*

Wegen $P(X_n\in A_n,\ldots,X_0\in A_0) = \sum_{(e_n,\ldots,e_0)\in A_n\times\ldots A_0} P(X_n = e_n,\ldots,X_0 = e_0)$ folgt hieraus dann der allgemeine Fall. $\square$

Realisierung auf dem kanonischen Pfadraum

Definition 5.6 $\Omega := \mathbb{E}^{\mathbb{N}_0} = \{\omega = (\omega_i, i \in \mathbb{N}_0) | \omega_i \in E\}$ *heißt* **'kanonischer Pfadraum'**, $X_i : \Omega \to E$, $X_i(\omega) := \omega_i$ **'Koordinatenabbildung'**.

Satz 5.3 *Zu λ W-Maß auf E und $P = (P_{i,j})_{i,j \in E \times E}$ stochastische Matrix ex. genau ein Maß auf $(\Omega, 2^{\Omega})$, s.d. $(X_k)_{k \geq 0}$ mit $X_k : \Omega \to E$, k-te Koordinatenabbildung eine Markov-Kette auf E definiert mit Übergangskern P und Startverteilung λ.*

Bew:

- *Def. Inhalt $P_0(Z)$ auf 'Zylindermengen' der Form $Z = A_1 \times \ldots A_N \times E \times E \ldots$ durch*

$$P_0(Z) = \sum_{(e_0, \ldots, e_N) \in A_1 \times \ldots A_N} \lambda(e_0) \prod_{i=0}^{N-1} P_{e_i, e_{i+1}}$$

- *P_0 is Prämaß auf $\mathcal{Z} = \{Z | Z \text{ Zylindermenge}\}$*

$\Rightarrow P_0$ eindeutig fortsetzbar als Maß auf $\sigma(\mathcal{Z}) = 2^{\Omega}$. $\square$

Bemerkung $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *mit* $X_k : \Omega = E^{\mathbb{N}_0} \to E$ *heißt* **Koordinatenprozess**.

Satz 5.4 *Zu λ und P gibt es eine im Sinne der endl. dimensionalen Verteilungen eindeutige homog. Markov-Kette $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ auf E mit Übergangsmatrix P und Startverteilung λ.*

Ausblick: Messbarer Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$

Definition 5.7 *Sei I eine geordnete Menge und $(X_i)_{i \in I}$ ein stochastischer Prozess mit Werten im messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$. Dann heißt $(X_i)_i$ Markov'sch, falls $\forall f : E \to \mathbb{R}$ messbar beschränkt, $i \leq j \in I$,*

$$E[f(X_i)|\sigma(X_k, k \leq j)] = E[f(X_i)|\sigma(X_j)].$$

Bemerkung *Äquivalent zu Def. 5.2, falls E abzählbar (wähle $f = \mathbb{1}_j$).*

Definition 5.8 *Eine Familie $(P_x)_{x \in \mathbb{E}}$ von W-Maßen auf $(E, \mathcal{E})$, s.d. $x \to P_x(A)$ messbar für $A \in \mathcal{E}$, heißt* **Markov-Kern** *auf $(E, \mathcal{E})$.*

Bemerkung *Interpretation $P_x(A) = P(X_1 \in A | X_0 = x)$.*

Satz 5.5 *Zu einem Markovkern $(P_x)_{x \in E}$ und einer W-Maß λ auf E ex. eine (im Sinne der endl. dim. Verteilungen) eind. Markov-Kette $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, so dass $X_0 \sim \lambda$ und für $f : E \to \mathbb{R}$ messbar $E[f(X_{k+1})|\sigma(X_1, \ldots, X_k)] = \int_E f(z) P_{X_k}(dz)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Trefferzeiten und -wahrscheinlichkeiten

Definition 5.9 *Sei $(X_k)_{k\geq 0}$ ein stoch. Prozess auf E und $A \subset E$, dann heißt*

$$T_A := \inf\{k \geq 0 | X_k \in A\}$$

Trefferzeit von *A.*
Für $i \in E$ heißt $h_i^A := E(T_A < \infty | X_0 = i)$
Trefferwahrscheinlichkeit.

Bsp. 5.2 (Ruinproblem) *$(X_k)_k$ Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit $P_{ij} = p$ falls $j = i+1$, bzw. $P_{ij} = q$ falls $j = i-1$, $p + q = 1$ und $i \geq 1$, sowie $P_{00} = 1$, anonsten $P_{ij} = 0$. Mit $A = \{0\} \rightsquigarrow T_{\{0\}} \hat{=}$ "Ruinzeit".*

Satz 5.6 *$E \ni i \mapsto h_i^A \in [0,1]$ ist die minimale nichtnegative Lösung von*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{für } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A & \text{für } i \in A^c. \end{cases}$$

Bemerkung *$(h_i^A)_{i \in E}$ minimale nichtnegative Lösung $:\Leftrightarrow g_i \geq h_i^A$ für alle $i \in E$, falls $g_. \geq 0$ ebenfalls Lösung.*

Lemma 5.2 *Für $(X_k)_k$ eine Markov-Kette auf E und $f: E^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}$ messbar gilt*

$$E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_0 \in A_0, \dots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = i] \\ = E[f(X_n, X_{n+1}, \dots)|X_n = i).$$

Bew: Für $f = \mathbb{1}_Z$ mit $Z = \{e_1\} \times \dots \{e_N\} \times E \times E \dots \in \mathcal{Z}$ ergibt sich Beh. durch Nachrechnen. $\rightsquigarrow$ Für allg. f durch Approximation.

Bew: (von Satz 5.6) Für $i \in A$ ist $P(T^A = 0|X_0 = i) = 1$, also $h_i^A = 1$.
Für $i \in A^c$ ist $P(T^A \geq 1|X_0 = i) = 1$

$$\begin{aligned}
h_i^A &= P(T_A < \infty|X_0 = i) = P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_0 = i) \\
&= \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A, X_1 = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j|X_0 = 0) \\
&\overset{\text{Lemma 5.2}}{=} \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 1 : X_n \in A|X_1 = j) P(X_1 = j|X_0 = 0) \\
&\overset{(X_k)\text{ homog.}}{=} \sum_{j \in E} P(\exists n \geq 0 : X_n \in A|X_0 = j) p_{ij} = \sum_{j \in E} h_j^A p_{ij}.
\end{aligned}$$

Bew: (Satz 5.6, Forts.)

Minimalität von h_i^A*:*
Sei $g_i \geq 0, i \in E$ *weitere Lösung. Für* $i \in A$ *ist* $1 = h_i^A \geq 1 = g_i$.
Für $i \in A^c$

$$
\begin{aligned}
g_i &= \sum_{j \in E} g_j p_{ij} = \sum_{j \in A} p_{ij} 1 + \sum_{j \in A^c} p_{ij} g_j \\
&= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \in A^c} p_{ij} \sum_{k \in E} p_{jk} g_k \\
&= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \in A^c} p_{ij} \sum_{k \in A} p_{jk} + \sum_{j \in A^c} p_{ij} \sum_{k \in A^c} p_{jk} g_k \\
&= P(T_A = 1 | X_0 = i) + P(T_A = 2 | X_0 = i) + \sum_{j \in A^c} p_{ij} \sum_{k \in A^c} p_{jk} g_k \\
&= P(T_A = 1 | X_0 = i) + P(T_A = 2 | X_0 = i) + \cdots + P(T_A = N | X_0 = i) \\
&\qquad + \sum_{j_1 \in A^c} \sum_{j_2 \in A^c} \cdots \sum_{j_N \in A^c} p_{ij_1} p_{j_1, j_2} \ldots p_{j_{N-1} j_N} g_{j_N} \\
&\overset{g \geq 0}{\geq} P(T_A \leq N | X_0 = i) \quad \forall N \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Mit $N \to \infty$ *und monton. Konvergenz*
$\Rightarrow g_i \geq P(T_A < \infty | X_0 = i) = h_i^A$. $\square$

Anwendung – Ruinwahrscheinlichkeit

Bsp. 5.2 (Forts.)

$h_i = P(T^{\{0\}} < \infty X_0 = i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ ist die minimale nichtnegative Lösung von $h_0 = 1$ und $h_i = ph_{i+1} + qh_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$.

• Falls $p \neq q$: $\Rightarrow h_i = A + B(\frac{q}{p})^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

Falls $p < q$ folgt aus $h_i \in [0, 1]$, dass $B = 0$ und wegen $A = h_0 = 1$, dass $h_i = 1$, d.h. Ruin fast sicher in endlicher Zeit.

Falls $p > q$, folgt wegen $h_0 = 1$ dass $A + B = 1$, d.h. $h_i = (\frac{q}{p})^i + A(1 - (\frac{q}{p})^i)$, und wegen $h \geq 0$, dass $A \geq 0$. $\Rightarrow$ Minimale Lösung gegeben durch $h_i = (\frac{q}{p})^i$.

D.h. Ruinwahrscheinlichkeit echt kleiner eins, eponentiell fallend mit dem Anfangskapital i.

• Falls $p = q$: $\Rightarrow h_i = A + Bi$, wobei wegen $0 \leq h \leq 1$ gelten muss, dass $B = 0$ und $A = 1 \Rightarrow h_i = 1 \forall i$.

Mittlere Trefferzeit

Definition 5.10 *Für $A \subset E$ heißt $k_i^A := E(T_A | X_0 = i)$* **mittlere Trefferzeit***.*

Satz 5.7 *$k_i^A, i \in E$ ist die minimale nichtneg. Lösung von*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{für } i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} k_j^A & \text{für } i \in A^c. \end{cases}$$