Kapitel 4:

Bedingte Erwartung

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 4.1 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein W-Raum und* $A \in F$ *mit* $P(A) > 0$*, dann heißt* $P_A : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$

$$P_A(E) := \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit (von E) gegeben A.

Bemerkung P_A *ist ein W-Maß auf* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Bsp. 4.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P) \hat{=}$ *W-Raum für zweifachen unabh. Münzwurf mit Erfolgsparam.* $p \in]0, 1[$.
$A :\hat{=}$ *Mindestens ein Mal Erfolg,*
$E :\hat{=}$ *Erster Münzwurf erfolgreich*
$\Rightarrow P_A(E) = \frac{p(1-p)+p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$

Elementare Anwendungen

Satz 4.1 ("Satz von Bayes") *Falls $E \subset A$ ist $P(E) = P_A(E)P(A)$.*

Satz 4.2 ("Satz v. d. totalen Wahrsch'keit") *Falls $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ für $A_i \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt für $E \in \mathcal{F}$,*

$$P(E) = \sum_{i=1}^{N} P_{A_i}(E)\, P(A_i).$$

Bemerkung *Häufige Darstellung im "Baumdiagramm" ... (s. Tafel).*

Bsp. 4.2 *Wenn es regnet, nimmt Herr L seinen Schirm mit Wkeit 70% mit. Wenn es nicht regnet, lässt Herr L seinen Schirm mit Wkeit 90% zu Hause. Die Wkeit von Regen ist 30%.*

Wie wahrscheinlich regnet es, wenn Herr L seinen Schirm dabei hat?

Bedingter Erwartungswert

Definition 4.2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein W-Raum und* $A \in F$ *mit* $P(A) > 0$, $X\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine ZV'e. Dann heißt*

$$E_A(X) := \frac{E(X \cdot \mathbb{1}_A)}{P(A)}$$

bedingter Erwartungswert von X **gegeben** A**.**

Bemerkung $E_A(X) = \int_\Omega X(\omega) P_A(d\omega)$.

Bsp. 4.3 *(Forts.)* $(\Omega, \mathcal{F}, P) \hat{=}$ *W-Raum für zweifachen unabh. Münzwurf mit Erfolgsparam.* $p \in]0, 1[$.
$A :\hat{=}$ *Mindestens ein Mal Erfolg,*
$X :\hat{=}$ *Anzahl der Erfolge*
$\Rightarrow E_A(X) = \frac{1p(1-p)+1(1-p)p+2p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{2}{2-p}$.

Bedingte Erwartung

Definition 4.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W-Raum und $X : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ eine ZV'e sowie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra, dann heißt $Z : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar mit*
1) Z ist $\mathcal{G}$-messbar
2) $\int_G ZdP = \int_G XdP \; \forall G \in \mathcal{G}$.
bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{G}$,

Bsp. 4.4 *Falls $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ für $A_i \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\mathcal{G} := \sigma\{A_i, i = 1, \dots, N\}$*
Für $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ZV'e sei $Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$Z := \sum_{i=1}^{n} E_{A_i}(X)\, \mathbb{1}_{A_i}$$

$\Rightarrow$ Z ist bed. Erwarung von X gegeben $\mathcal{G}$.

Satz 4.3 *Für Z und Z' bed. Erw. von X geg. $\mathcal{G}$ ist $Z = Z'$ fast sicher.*

Bew: $\int\limits_G ZdP = \int\limits_G XdP = \int\limits_G Z'dP \forall G \in \mathcal{G}, \overset{Z,\, Z' \; \mathcal{G}\text{-messbar}}{\Longrightarrow} P(Z \neq Z') = 0.$

Notation $Z := E(X|\mathcal{G})$ ($\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow}$ eindeutig fast sicher, falls ex.)

Bedingte Erwartung – Eigenschaften

Satz 4.4 *1)* $X \geq 0 \Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ *f.s.*
2) X *integrierbar und* $Z_\pm = E(X_\pm|\mathcal{G}) \Rightarrow Z_+ - Z_- = E(X|\mathcal{G})$
3) X_1, X_2 *integrierbar und* $Z_i = E(X_i|\mathcal{G}) \Rightarrow$
$Z := Z_1 + Z_2 = E(X_1 + X_2|\mathcal{G})$

Bew: *1)* $\{Z < 0\} \in \mathcal{G} \Rightarrow \int_{\{Z<0\}} ZdP = \int_{\{Z<0\}} XdP \geq 0$
$\Rightarrow P(\{Z < 0\} = 0$, *weil andernfalls* $\int_{\{Z<0\}} ZdP < 0$.

2) X *intbar* $\Leftrightarrow \min(E(X_+), E(X_-)) < \infty$. $\overset{1)}{\Longrightarrow} Z_\pm \geq 0$ *und*
$\int\limits_\Omega Z_\pm dP = \int\limits_\Omega X_\pm dP \Rightarrow \min(E(Z_+, Z_-)) < \infty$
$\Rightarrow Z := Z_+ - Z_i \in \overline{\mathbb{R}}$ *wohldefiniert u. integrierbar,* $\mathcal{G}$*-messbar mit*
$\int\limits_G ZdP = \int\limits_G Z_+ - \int\limits_G Z_- dP = \int\limits_G X_+ - \int\limits_G X_- dP = \int\limits_G XdP \, \forall G \in \mathcal{G}$.

3) $Z_i \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P) \Rightarrow Z := Z_1 + Z_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ *mit*
$\int_G ZdP = \int_G (Z_1 + Z_2)dP \int_G (X_1 + X_2)dP \, \forall G \in \mathcal{G}$.

Bedingte Erwartung – Existenz

Satz 4.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra und $X : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, dann ex. $E(X|\mathcal{G})$.*

Bew: *1. Schritt – falls $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:*

$\overset{\text{Projektionssatz 4.6}}{\Longrightarrow}$ *Mit $U := L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) =: V$ sei Z die orthogonale Projektion von X auf den Unterraum U, d.h.*
$E(|Z - X|^2) = \min_{z \in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)} E(|z - X|^2)$.
$\Rightarrow$ Z $\mathcal{G}$-messbar und für $G \in \mathcal{G}$ ist

$$\epsilon \to \varphi(\epsilon) := E(|Z + \epsilon \mathbb{1}_G - X|^2) \text{ minimal in } \epsilon = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\epsilon}\varphi(\epsilon) = 0 = E((Z - X) \cdot \mathbb{1}_G) = \int_G Z dP - \int_G X dP\ .$$

$$\Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G}).$$

2. Schritt – falls $X \geq 0$:
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $X_k := \min(X, k) \Rightarrow X_k \in L^2 \Rightarrow Z_k := E(X_k|\mathcal{G})$ ex.
$X_{k+1} - X_k \geq 0 \Rightarrow Z_{k+1} - Z_k = E(X_{k+1} - X_k|\mathcal{G}) \geq 0$.
$\overset{\text{Monot. Konvergenz}}{\Longrightarrow}$ *Für $Z := \lim\limits_k Z_k$ $\mathcal{G}$-messbar, $G \in \mathcal{G}$*
$\int\limits_G Z dP = \lim\limits_k \int_G Z_k dP = \lim\limits_k \int_G X_k dP = \int_G X dP \Rightarrow Z = E(X|\mathcal{G})$
3. Schritt – falls X integrierbar: Setze $Z := E(X_+|\mathcal{G}) - E(X_-|\mathcal{G})$.
$\Rightarrow$ Z wohldefiniert, $\mathcal{G}$-messbar, $\int_G Z dP = \int_G dP$ $\square$

Projektionssatz

Definition 4.4 *Ein Vektorraum* $(V, \mathbb{K})$ *mit Skalarprodukt* $\langle .,. \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{K}$, *welches eine ein vollständiger Metrik auf* V *definiert gemäß*

$$d(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_V := \sqrt{\langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle}$$

heißt **Hilbert Raum.**

Bsp. 4.5

- $V = \mathbb{R}^n$ *mit* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit* $\langle X, Y \rangle = E(X \cdot Y)$. *(Fischer-Riesz)*

Satz 4.6 *Sei* $U \subset V$ *ein (bzgl. der Metrik* $d(.,.) = \|. - .\|$*) abgeschlossener linearer Unterraum eines Hilbert-Raumes* V. *Dann ex. zu* $v \in V$ *ein eind.* $u \in U$, *s.d.*

$$\|u - v\| = \inf_{u' \in U} \|u' - v\|.$$

Beweis Projektionssatz

- $0 \le m := \inf_{u' \in U} \|u - v\| \overset{u'=0\in U}{\le} \|v\| < \infty$.
- Wähle Folge $u_k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, s.d. $\|u_k - v\| \to m$.
- Beh.: Dann ist $(u_k)_k$ ist Cauchy-Folge in $U \subset V$, denn sonst ex. $\epsilon > 0$ und Teilfolge $(u_{k_n})_n$ s.d. $\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\| \ge \epsilon \, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Für $\tilde{u}_n := \frac{u_{n_k} + u_{n_{k+1}}}{2}$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}_n - v\|^2 &= \frac{1}{4}\|(u_{n_k} - v) + (u_{n_{k+1}} - v)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|(u_{n_k} - v)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u_{n_{k+1}} - v)\|^2 - \frac{1}{4}\|(u_{n_k} - v) - (u_{n_{k+1}} - v)\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|(u_{n_k} - v)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u_{n_{k+1}} - v)\|^2 - \frac{1}{4}\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}\epsilon^2 < m^2
\end{aligned}
$$

falls n hinreichend groß $\Rightarrow$ Widerspruch zu $m = \inf\limits_{u \in U} \|u - v\|$.

- $\overset{V \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \exists\, u := \lim_k u_k$, $\overset{U \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} u \in U \Rightarrow \|v - u\| = m$.
- u eindeutig, da andernfalls $\|\frac{u+\tilde{u}}{2} - v\| < m$ (s.o.). $\square$

Bedingte Erwartung – Weitere Eigenschaften

Satz 4.7
1) $E(X|\mathcal{G}) = X$, *falls* X $\mathcal{G}$*-messbar.*
2) $E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}) = \alpha E(\alpha X|\mathcal{G}) + \beta E(Y|\mathcal{G})$
3) $E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G})$, *falls* X $\mathcal{G}$*-messbar*
4) $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$, *falls* X *unabhängig von* $\mathcal{G}$*.*
5) $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ *falls* $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$
6) $\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G})$, *falls* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex*
7) $E(XY|\mathcal{G}) \leq E(|X|^p|\mathcal{G})^{1/p} E(|Y|^q|\mathcal{G})^{1/q}$, *falls* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*.*

Bew: *Folgt entweder direkt aus der Def. von* $E(\ldots|\mathcal{G})$ *bzw. analog zu den Eigenschaften vom Erwartunswert (s. Übung.)*