Gesetz vom Iterierten Logarithmus

Satz 3.12 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabh. Folge von ident. verteilten Zufallsvariablen mit $E(X_1) = 0$ und $V(X_1) = 1$, dann gilt für $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dass*

$$\left.\begin{array}{l} \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\log(\log n)}} = \sqrt{2} \\ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\log(\log n)}} = -\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{ fast sicher.}$$

Bemerkung $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = \infty$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n} S_n = 0$ *(s. Übung 9).*

Satz vom Iterierten Logarithmus – Vorbereitungen

Lemma 3.12 *Für $a > 0$ hinreichend groß gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1+a)^2}{2}} \le \nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Bew: $\nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty dt \le \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \int_a^\infty t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{a^2/2}.$
Für a hinreichend groß ist $e^{-t}(t+1) \le 1$ für alle $t \ge a$, somit
$\nu_{0,1}\big([a,\infty)\big) \ge \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} e^{-t}(t+1) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+a)^2/2}.$ □

Lemma 3.13 (Ottaviani-Skorokhod) *Für $X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV'en, $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ und $\eta, \epsilon > 0$ gilt*

$$P\Big(\max_{m \le j \le n} |S_j| \ge \eta + \epsilon\Big) \cdot \min_{m \le j \le n} P(|S_j - S_n| < \epsilon) \le P(|S_n| \ge \eta)$$

bzw.

$$P\Big(\max_{m \le j \le n} S_j \ge \eta + \epsilon\Big) \cdot \min_{m \le j \le n} P(S_j - S_n < \epsilon) \le P(S_n \ge \eta)$$

Bew: *Analog zum Beweis der Levý-Ungleichung (Lemma 2.9).*

Iterierter Logarithmus – Beweis

1) Obere Schranke: $\limsup \frac{S_n}{\phi(n)} \overset{!}{\leq} \sqrt{2}$

Bemerkung *Zusatzbed. für Bew. hier:* $E(|X_1|^{2+\alpha}) < \infty$ *für ein* $\alpha > 0$.

Sei $\phi(n) := \sqrt{n \log(\log n)}$

- Zeige für alle $\lambda > \sqrt{2}$ ex. Folge $n_k \nearrow \infty$, s.d.

$$\sum_n P(\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j \geq \lambda \phi(k_{n-1})) < \infty.$$

Falls richtig, $\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j}{\phi(k_{n-1})} \leq \lambda$ fast sicher.

$\overset{\phi \text{ monoton}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{S_n}{n} \leq \lambda$ fast sicher $\forall \lambda > \sqrt{2} \rightsquigarrow$ für $\lambda = \sqrt{2}$.

- $\overset{\text{Lemma 3.13}}{\Longrightarrow} P(\max_{k_{n-1} \leq j \leq k_n} S_j \geq \lambda) \leq 2P[S_{k_n} \geq (\lambda - \sigma)\phi(k_{n-1})]$

  falls $\sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[S_j \geq \sigma \phi(k_{n-1})]$ für ein $0 < \sigma < \lambda$.

Letzteres gilt für hinreichend große n, denn

$$\sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[S_j \geq \sigma \phi(k_{n-1})] \leq \sup_{k_{n-1} \leq i \leq k_n} P[|S_j| \geq \sigma \phi(k_{n-1})]$$

$$\leq \sup_{1 \leq i \leq k_n} P[|S_j| \geq \sigma \phi(k_{n-1})] \overset{\text{Tschebyshev}}{\leq} \frac{k_n}{\sigma^2 \phi^2(k_n)}$$

$$= \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{\sigma^2 \log(\log(k_{n-1})} \to 0, \text{ falls } \limsup_n k_n / k_{n-1} < \infty$$

- Bleibt zu zeigen: $\forall\lambda' > \sqrt{2}$ ex. Folge $k_n \nearrow \infty$ mit $\limsup_n k_n/k_{n-1} < \infty$, s.d.

$$\sum_n P(S_{k_n} \geq \lambda'\phi(k_{n-1})) < \infty.$$

- Wähle $k_n := \lfloor\rho^n\rfloor$ mit $\rho > 1$, dann $k_n/k_{n-1} \longrightarrow \rho$ und

$$\frac{\phi(k_n)}{\phi(k_{n-1})} = \sqrt{\frac{\lfloor\rho^n\rfloor}{\lfloor\rho^{n-1}\rfloor}}\sqrt{\frac{\log\log\lfloor\rho^n\rfloor}{\log\log\lfloor\rho^{n-1}\rfloor}} \longrightarrow \sqrt{\rho}.$$

Wegen $\lambda' > \sqrt{2}$ ist $\lambda'' := \lambda'/\sqrt{\rho} > \sqrt{2}$ falls $\rho > 1$ hinr. nahe 1.

$\Rightarrow$ genügt zu zeigen: Für $\lambda > 1$ und $\rho > 1$ ist

$$\sum_n P(S_{k_n} \geq \lambda\phi(k_n)) < \infty. \text{ mit } k_n = \lfloor\rho^n\rfloor.$$

- $\overset{\text{Berry-Esseen}}{\Longrightarrow}$ $P(S_{k_n} \geq \lambda\phi(k_n)) \leq \nu_{0,1}([a_n,\infty)) + Ck_n^{-\theta}$
mit $a_n := \lambda\phi(k_n)/\sqrt{k_n}$ und $\theta > 0 \Rightarrow \sum_n k_n^{-\theta} < \infty$.

- $\overset{\text{Lemma 3.12}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{aligned} \nu_{0,1}([a_n,\infty)) &\leq Ce^{-\frac{1}{2}a_n^2} = Ce^{-\lambda^2/2\log\log\lfloor\rho^n\rfloor} \\ &\leq C'e^{-\lambda^2/2\log\log\rho^n} = Cn^{-\lambda^2/2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_n \nu_{0,1}([a_n,\infty)) < \infty \rightsquigarrow$ Beh.

Bew. Iterierter Logarithmus (Forts.)

2) Untere Schranke: $\limsup \frac{S_n}{\phi(n)} \overset{!}{\geq} \sqrt{2}$

- Mit $k_n = \lfloor \rho^n \rfloor$ sei $Y_n = S_{k_{n+1}} - S_{k_n}$.

$$\sum_n P[Y_n \geq \lambda\phi(k_{n+1})] \overset{\text{Berry-Esseen}}{\geq} \sum_n (k_{n+1} - k_n)^{-\theta} + \sum_n \nu([b_n, \infty))$$

$$\overset{\text{Lemma 3.12}}{\geq} \sum_n (k_{n+1} - k_n)^{-\theta} + \sum_n \exp[-\frac{1}{2}(1+b_n)^2]$$

wobei $b_n = \frac{\lambda\phi(k_{n+1})}{\sqrt{k_{n+1}-k_n}} = \lambda \frac{\sqrt{k_{n+1}\log\log k_{n_1}}}{\sqrt{k_{n+1}-k_n}} \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$

- $(1+b_n)^2 = b_n^2(1+\frac{1}{b_n})^2 \leq (1+\epsilon)b_n^2$ für $\epsilon > 0$, für n groß.

Analog $b_n \leq \lambda\sqrt{\log\log \rho^{n+1}}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}(1+\epsilon)$ für n groß.

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \sum_n e^{-\frac{1}{2}(1+b_n)^2} \geq C\sum_n n^{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{\rho}{\rho-1}} = \infty$, falls $\frac{\lambda^2}{2}\frac{\rho}{\rho-1} < 1$.

- $\overset{\text{Borel-Cantelli \& } \lambda \to \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}}}{\Longrightarrow} \limsup_n \frac{Y_n}{\phi(k_{n+1})} \geq \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}}$

- $\Rightarrow \limsup_n \frac{S_{k_{n+1}}}{\phi(k_{n+1})} = \limsup_n (Y_n + \frac{S_{k_n}}{\phi(k_{n+1})}) \geq$

$\limsup_n Y_n - \limsup \frac{S_{k_n}}{\phi(k_{n+1})} \overset{\text{obere Schranke}}{\geq} \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho}}$

- $\Rightarrow \limsup_n \frac{S_n}{\phi(n)} \geq \sqrt{\frac{2(\rho-1)}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho}}$ f.s. für alle $\rho > 1 \overset{\rho \to \infty}{\Rightarrow}$ Beh.

Exkurs zu großen Abweichungen: Satz von Erdös-Renyi

Satz 3.13 *Sei (X_n) eine Folge von ident. vert. ZV'en, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s.d.*

$$\text{es existiert } I_A := -\lim_n \tfrac{1}{n} P(\tfrac{S_n}{n} \in A) \in]0, \infty[,$$

dann gilt für

$$R_m := \max\{l - k \,\big|\, 0 \leq k < l \leq m; \tfrac{S_l - S_k}{l-k} \in A\}$$

dass

$$\lim \frac{R_m}{\log m} = \frac{1}{I_A} \text{ fast sicher.}$$

Korollar 3.4 *Für eine Folge (X_i) von unabh. Bernoulli-p-Variablen gilt $\lim \frac{R_m}{\log m} = \frac{1}{\log(1/p)}$ fast sicher, wobei $R_m :\hat{=}$ Maximale Anzahl aufeinanderfolgender 1-en in den ersten m Versuchen.*

Bew: *Folgt aus Erdös-Renyi mit $A = \{1\}$ und Cramér, $I_{\{1\}} = \log(1/p)$.*

Bew. Erdös-Renyi – Untere Schranke

Für $T_r := \min\{l \mid \frac{S_l - S_k}{l-k} \in A \text{ für ein } 0 \le k \le l-r\}$ ist

$$\{R_m \ge r\} = \{T_r \le m\}.$$

Für $C_{k,l} := \{\frac{Sl - S_k}{l-k} \in A\}$ ist

$$\{T_r \le m\} \subset \bigcup_{k=0}^{m-r} \bigcup_{l=k+r}^{m} C_{k,l} \subset \bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{l=k+r}^{\infty} C_{k,l}$$

$$\Rightarrow P(T_r \le m) \le m \sum_{n=r}^{\infty} P(\tfrac{S_n}{n} \in A).$$

Mit $m = \lfloor e^{r(I_A - \epsilon)} \rfloor$, wobei $0 < \epsilon < 2I_A$ folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(T_r \le e^{r(I_A - \epsilon)}) \le C \sum_{r=1}^{\infty} e^{r(I_A - \epsilon)} \sum_{n=r}^{\infty} e^{-n(I_A - \frac{\epsilon}{2})} \le C \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\epsilon/2} < \infty.$$

$$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} P(\limsup_{r \to \infty} \{T_r \le e^{r(I_A - \epsilon)}\}) = 0$$

$$= P(\limsup_{r \to \infty} \{R_{\lfloor e^{r(I_A - \epsilon)} \rfloor} \ge r\})$$

Mit $r = r_n = \lfloor \frac{\log n}{I_A - \epsilon} \rfloor$ folgt wegen $\lfloor e^{\lfloor \frac{\log n}{I_A - \epsilon} \rfloor (I_A - \epsilon)} \rfloor = n$ für n groß, dass

$$P(\limsup_{n \to \infty} \{R_n \ge \tfrac{\log n}{I_A - \epsilon}\}) = 0$$

somit $\limsup_n \frac{R_n}{\log n} \ge \frac{1}{I_A}$ fast sicher.

Bew. Erdös-Renyi – Obere Schranke

Sei $B_l := \{\frac{S_{lr} - S_{(l-1)r}}{r} \in A\}$. $\Rightarrow \bigcup_{l=1}^{\lfloor m/r \rfloor} B_l \subset \{T_r \leq m\}$.
$(B_l)_l$ sind unabh. mit $P(B_l) = P(\frac{S_r}{r} \in A)$

$$\Rightarrow P(T_r > m) \leq 1 - P(\bigcup_{l=1}^{\lfloor m/r \rfloor} B_l) = (1 - P(B_1))^{\lfloor m/r \rfloor}$$

$$\leq e^{-\lfloor m/r \rfloor P(B_1)} = \exp(-\lfloor m/r \rfloor P(\frac{S_r}{r} \in A)).$$

Mit $m = \lceil e^{r(I_A + \epsilon)} \rceil$

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(T_r \geq e^{r(I_A+\epsilon)}) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \exp(-\frac{c_1}{r} e^{r(I_A+\epsilon)} e^{-r(I_A+\frac{\epsilon}{2})})$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} \exp(-c_2 e_3^c r) < \infty.$$

$\overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Longrightarrow} T_r \leq e^{r(I_A+\epsilon)}$ für schließlich alle r, fast sicher.
$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \liminf_n \frac{R_n}{\log n} \geq \frac{1}{I_A}$ fast sicher. $\square$