

Klausur zu „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie“

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Es sind keine eigenen Unterlagen, Handys, Taschenrechner u.ä. zugelassen!**
- Die Klausur enthält 4 Aufgaben, von denen Sie 3 bearbeiten sollten. Bitte streichen Sie die nicht bearbeitete Aufgabe, da nur 3 Aufgaben bei der Korrektur berücksichtigt werden.
- Pro Aufgabe können maximal 20 Punkte erreicht werden.
- Nehmen Sie sich am Anfang ca. 15 Minuten Zeit, um alle Aufgaben sorgfältig durchzulesen und zu entscheiden, welche Aufgaben Sie bearbeiten.
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Abgabe bis spätestens 12.00 Uhr. Keine Abgabe zwischen 11.20 und 11.50 Uhr.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4			Summe	Note
Punkte								

1. (Reelle Zufallsvariablen)

- a) Wie ist die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf \mathbb{R} definiert? [1 Pkt]
b) Skizzieren Sie die Graphen der Verteilungsfunktionen zu den folgenden Verteilungen: [5 Pkt]

$$(i) \text{Exp}(1) \quad (ii) \frac{1}{3} \delta_0 + \frac{2}{3} \delta_1 \quad (iii) \mathcal{U}_{(1,4)}$$

- c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F stets monoton wachsend und rechtsstetig ist mit $\lim_{c \rightarrow -\infty} F(c) = 0$ und $\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = 1$. [6 Pkt]
d) Wann heisst eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf \mathbb{R} *absolutstetig*? Geben Sie ein Beispiel einer Verteilung, die weder diskret noch absolutstetig ist (ohne Beweis). [2 Pkt]
e) Sei $\alpha \geq 1$, und sei X eine nicht-negative absolutstetige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Dichte

$$f_X(t) = c \cdot t^{\alpha-1} \exp(-t^\alpha), \quad t \geq 0,$$

wobei c eine Konstante ist.

- (i) Bestimmen Sie den Wert von c . [2 Pkt.]
(ii) Zeigen Sie: [4 Pkt.]

$$P[X \geq s+t | X \geq t] \leq P[X \geq s] \quad \text{für alle } s, t \geq 0.$$

Welche stärkere Aussage gilt im Fall $\alpha = 1$?

2. (Zentraler Grenzwertsatz)

a) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 (ohne Beweis). [3 Pkt]

b) Folgern Sie für $x \geq 0$: [8 Pkt]

$$\sum_{k: |k - \frac{n}{2}| \leq \frac{1}{2}x\sqrt{n}} \binom{n}{k} \sim 2^n \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

c) Seien U_1, U_2, \dots unabhängige, auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. [4 Pkt]
Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $X_1 := -\log U_1$ (mit Beweis)? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1 .

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit [5 Pkt]

$$P \left[(U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_n)^{n^{-1/2}} e^{n^{1/2}} \in [a, b] \right]$$

für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, und geben Sie einen Ausdruck für den Grenzwert an.

3. (Gesetz der großen Zahlen)

- a) Was versteht man unter P -stochastischer und P -fast-sicherer Konvergenz einer Folge (Y_n) von reellwertigen Zufallsvariablen (Definition) ? Geben Sie ein Beispiel einer Folge, die stochastisch, aber nicht fast sicher konvergiert. [4 Pkt]
- b) Seien $X_i, i \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p, p \in [0, 1]$. Beweisen Sie den folgenden Spezialfall des Gesetzes der großen Zahlen: [9 Pkt]

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow p \quad P\text{-fast sicher.}$$

Geben Sie alle im Beweis verwendeten Aussagen vollständig inklusive aller Voraussetzungen an.

- c) Bei einem Roulettespiel gewinnt ein Spieler in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit $18/37$ einen Euro, und verliert mit Wahrscheinlichkeit $19/37$ einen Euro. Sei Z_n das Kapital des Spielers nach n Runden bei Anfangskapital a . Interpretieren Sie das Ereignis [7 Pkt]

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k \leq 0\}$$

anschaulich, und zeigen Sie $P[A] = 1$.

4. (Charakteristische Funktionen)

a) Definieren Sie die charakteristische Funktion einer reellwertigen Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Warum existiert der Erwartungswert, der in der Definition auftritt? [2 Pkt]

b) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen: [6 Pkt]

$$(i) \text{ Exp}(1) \quad (ii) \text{ Bernoulli}(1/2) \quad (iii) \text{ Bin}(n, 1/2).$$

c) Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion einer Linearkombination $aX + bY$ ($a, b \in \mathbb{R}$) von unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt: [5 Pkt]

$$\phi_{aX+bY}(t) = \phi_X(at) \cdot \phi_Y(bt).$$

Folgern Sie: Sind X_1, X_2, \dots, X_n unabhängig und standardnormalverteilt, dann ist auch die Zufallsvariable

$$\tilde{S}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

standardnormalverteilt. Nennen Sie alle Aussagen und Voraussetzungen, die Sie zum Beweis verwenden.

d) Sei nun (X_n) eine Folge von beliebigen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ und $\text{Var}[X_n] = 1$. Beweisen Sie, dass (\tilde{S}_n) in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert. Geben Sie wieder alle Aussagen, die Sie verwenden, vollständig an. [5 Pkt]

e) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Verteilungen von \tilde{S}_n im Allgemeinen nicht in Variationsdistanz konvergieren. [2 Pkt]

Hinweis: Die charakteristische Funktion von $N(0,1)$ ist $\exp(-t^2/2)$.

DECKBLATT PRÜFUNGSLEISTUNG

PERSÖNLICHE ANGABEN:

Vorname und Nachname:

Matrikelnummer:

Studiengang (siehe § 12 Zwei-Fächer-Prüfungsordnung, Bachelor und Master)

- Lehramt an Gymnasien Staatsexamen
- Diplom-Mathematik
- Ein-Fach-Bachelor of Science (B.Sc.)
- Zwei-Fächer-Bachelor of Science (B.Sc.)
- Zwei-Fächer-Bachelor of Arts (B.A.)
- Zwei-Fächer-Bachelor of Science
- Zwei-Fächer-Bachelor of Arts
- Nicht aufgeführter Studiengang:

ANGABEN ZUR PRÜFUNG:

Modulnummer:

- MNF-math-wth.1
- MNF-math-wth.2

Modulname und Prüfungsfach:

- Wahrscheinlichkeitstheorie
- Wahrscheinlichkeitstheorie (LAG)

Lehrveranstaltungsbezeichnung: **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Art der Prüfungsleistung: **Modulprüfung, Klausur, 180 Minuten**

1. Prüfung 1. Wiederholungsprüfung 2. Wiederholungsprüfung

Prüfer: **Prof. Dr. Uwe Rösler**

Prüftermin: **11.10.2010**

ERKLÄRUNG ZUR PRÜFUNGSFÄHIGKEIT:

Hiermit erkläre ich gemäß §9 Abs. 6 PVO, dass ich prüfungsfähig bin.

Datum und Unterschrift: 11.10.2010,.....

PRÜFUNGSERGEBNIS:

Note

Datum und Unterschrift Prüfer:

(Nach §9 Abs. 7 Satz 4 PVO bei letztmöglichen Wiederholungsprüfungen zusätzlich:)

Datum und Unterschrift Zweit-Prüfer:

Die Bekanntgabe der Prüfungsergebnisse erfolgt auf Nachfrage. Gegen die Benotung kann bis zu einem Monat nach Bekanntgabe schriftlich oder zur Niederschrift bei dem zuständigen Prüfungsausschuss Widerspruch eingelegt werden. Erfolgt dieser nicht, wird die Benotung unwiderruflich anerkannt. Innerhalb eines Jahres kann bei der Sekretärin des Prüfers Einsicht genommen werden. Der Termin der **allgemeine Einsichtnahme** wird auf der Stochastik-Homepage mitgeteilt.

Aufgabe 1 (Multiple-Choice-Aufgaben, elf Teilaufgaben)

Hinweise:

- Markieren Sie die von Ihnen als richtig erachteten Lösungen bitte ausschließlich im markierten Bereich („“) mit einem Kreuz („“).
- Wenn Sie eine Markierung („“) ungültig machen wollen, so füllen Sie den kompletten Bereich aus („“).
- Bei jeder Aufgabe können keine, eine, mehrere oder alle Antworten richtig sein.
- Pro richtig gesetztem „“ gibt es einen Pluspunkt.
- Pro falsch gesetztem „“ gibt es einen Minuspunkt.
- Auch wenn einige Aufgabenteile richtig beantwortet wurden, kann die Gesamtpunktzahl der Aufgabe 1 Null sein.
- Die gesamte Aufgabe 1 wird mit mindestens Null Punkten bewertet.

1. Welche der folgenden Mengen sind σ -Algebren auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$?

- $\{\Omega, \emptyset, \{1\}\}$
- $\{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$
- $\{\Omega, \emptyset\}$
- $\{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- $\{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

2. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- $P(A \cup B) \leq 1/2$, falls $P(A) = P(B) = 1/4$.
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, falls A, B disjunkt.
- $P(A) = P(\Omega \setminus A) - 1$.
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$, falls $B \subseteq A$.
- $P(A) < 1$ falls $A \neq \Omega$.

3. Sei X eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in $\{1, \dots, 100\}$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann stets?
- $E(X) = \sum_{i=1}^{100} iP(X = i)$.
 - $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 10\} \in \mathcal{A}$.
 - $|\Omega| < \infty$.
 - Die Verteilungsfunktion von X ist stetig.
 - $\text{Var}(X) < \infty$.
 - $P^{-X} = -P^X$.
4. Seien X, Y, Z stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten. Welche der folgenden Aussagen gelten dann stets?
- X ist stochastisch unabhängig von sich selbst.
 - $X \cdot Y$ und $X \cdot Z$ sind stochastisch unabhängig.
 - $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.
 - $E(XY(Z + 1)) = E(X)E(Y)E(Z + 1)$.
 - $\text{Cov}(X, Y) = 1$.
 - Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P(X = x) = 0$
5. Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?
- Konvergiert $(np_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\lambda \in (0, \infty)$, so konvergiert $\text{Bin}(n, p_n)$ schwach gegen $\text{Poi}(\lambda)$.
 - Konvergiert $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\lambda \in (0, 1)$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}(n, p_n)(\{k\}) = \text{Poi}(\lambda)(\{k\})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
 - $\sum_{k=0}^n |\text{Bin}(n, p_n)(\{k\}) - \text{Poi}(\lambda)(\{k\})| \leq 2np_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , die dem *starken* Gesetz der großen Zahlen gehorcht. Welche Aussagen sind dann stets wahr?

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n (X_i(\omega) - E(X_i)) = 0$ für fast alle $\omega \in \Omega$.
- Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen 0.
- Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen 0.
- Die Folge $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen 0.

7. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(A) = P(B) = 7/10$. Welche Aussagen sind stets erfüllt?

- $A = B$.
- $A \cap B \neq \emptyset$.
- $P(A \cup B) = 2P(B)$.
- $P(A|B^c) = P(B^c|A)$.
- $P(A|B) = P(B|A)$.

8. Es bezeichne \mathcal{B} die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} . Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

- $\mathcal{B} = \sigma(\{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist kompakt}\})$
- Neben den trivialen σ -Algebren ist \mathcal{B} die einzige σ -Algebra auf \mathbb{R} .
- Lebesgue-Nullmengen sind stets abzählbar.
- Abzählbare Mengen sind Lebesgue-Nullmengen.
- Für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x^2 + \sin(e^x))$ und alle offenen Mengen U gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}$.

9. Sei X eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R} und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $E(X)$ und $E(\varphi(X))$ existieren.

Was besagt dann die Jensen-Ungleichung?

- $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$, falls φ konvex ist.
- $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$, falls φ stetig und beschränkt ist.
- $E(\varphi(X)) \leq \varphi(E(X))$, falls φ stetig und beschränkt ist.
- $E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X))$, falls φ konkav ist.

10. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} . Welche Aussagen sind dann für die zugehörige Verteilungsfunktion F stets erfüllt?

- F ist monoton wachsend.
- $F(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- F ist differenzierbar.
- $F(x) - F(x-) = P(\{x\})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

11. Sei Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichte der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Es gelte $0 < \text{Var}(X_1) < \infty$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ und

$$S_n^* := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind dann stets erfüllt?

- Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* \leq b) = \Phi(b)$.
- Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* = b) = \varphi(b)$.
- $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in L_1 gegen eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsgröße.
- $\sup_{b \in \mathbb{R}} |P(S_n^* > b) - \int_b^\infty \varphi(x) dx| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2 (1 Punkt + 1 Punkt + 1 Punkt + 1 Punkte = 4 Punkte)

- Definieren Sie exakt den Begriff **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf einem messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) .

- Definieren Sie exakt den Begriff **Dynkinsystem**.

- Definieren Sie exakt den Begriff der **charakteristischen Funktion** Ψ_X einer Zufallsgröße X .

- Geben Sie **vier paarweise disjunkte Erzeugendensysteme** der Borelschen σ -Algebra \mathcal{B} auf \mathbb{R} an.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 2 Punkte = 6 Punkte)

- (a) Beschreiben Sie – z.B. anhand eines Schaubildes – die **Implikationen zwischen den folgenden Konvergenzarten** in der Stochastik:
 L_1 -Konvergenz, stochastische Konvergenz, fast sichere Konvergenz, L_p -Konvergenz ($p \in (1, \infty)$), schwache Konvergenz.
- (b) Geben Sie ein **Beispiel** einer Folge von Zufallsgrößen an, welches bezüglich einer der oben genannten Konvergenzarten konvergiert, aber bezüglich einer anderen nicht.

Hinweis zu (a): Es sind hier nur genau die Implikationen zu beschreiben, die ohne weitere Zusatzvoraussetzungen gelten.

Aufgabe 4 (1 Punkt + 1 Punkt + 2 Punkte = 4 Punkte)

Marie wirft eine unfaire Münze $n := 1000$ Mal. Diese zeigt mit Wahrscheinlichkeit 0,4 Kopf und mit Wahrscheinlichkeit 0,6 Zahl.

- (a) Geben Sie eine mathematische Modellierung an, entweder mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum oder mit Zufallsgrößen.
- (b) Geben Sie für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ das folgende Ereignis in Ihrem Modell:
 $A_k \hat{=}$ Die ersten k Würfe ergeben Zahl.
- (c) Bestimmen Sie für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_k .

Aufgabe 5 (2 Punkte + 1 Punkt + 1 Punkt = 4 Punkte)

Sei X $\mathbb{R}(0,1)$ -verteilt und setze $Y := \sqrt{X}$.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y .
- (b) Bestimmen Sie die Dichte von Y (bezüglich dem Lebesguemaß).
- (c) Bestimmen Sie $E(Y)$.

Hinweis: Mit $\mathbb{R}(0,1)$ ist die Rechteckverteilung auf $[0,1]$ gemeint.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger $R(0, 1)$ -verteilter Zufallsgrößen und $X_n := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} Y_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen 1.

Hinweis: Mit $R(0, 1)$ ist die Rechteckverteilung auf $[0, 1]$ gemeint.

Aufgabe 7 (2 Punkte + 2 Punkte = 4 Punkte)

Sei X eine Zufallsgröße. Zeigen Sie

- (a) Gilt für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $P(X \leq c) = 0$ oder $P(X \leq c) = 1$, so existiert $c^* \in \mathbb{R}$ mit $P(X = c^*) = 1$.
- (b) Ist X stochastisch unabhängig von sich selbst, so existiert $c^* \in \mathbb{R}$ mit $P(X = c^*) = 1$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsgrößen mit $P(X_1 = j) = 1/37$ für alle $j \in \{0, \dots, 36\}$.

Wie groß ist $P(\limsup A_n)$, wobei $A_n := \{X_n = 0, \dots, X_{n+4} = 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 9 (1 Punkt + 1 Punkt + 2 Punkt + 2 Punkte = 6 Punkte)

Von den Teilnehmern einer Vorlesung bestehen erfahrungsgemäß die Hälfte die Klausur. In diesem Jahr nehmen an dieser Vorlesung 100 Studierende teil, die alle unabhängig voneinander lernen und nicht abschreiben können.

- (a) Geben Sie eine geeignete Modellierung mit Zufallsgrößen hierfür an.
- (b) Geben Sie das folgende Ereignis A in Ihrem Modell an:
„Es bestehen mindestens 70% der Studierenden die Klausur.“
- (c) Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit von A ab.
- (d) Schätzen Sie mit Hilfe der Hoeffding-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit von A ab.

Aufgabe 10 (1 Punkt + 1 Punkt + 2 Punkte = 4 Punkte)

Die Fördesparkasse nimmt von seinen Geschäftskunden Geldrollen entgegen, die für je 50 1-Euro-Stücke ausgelegt sind und schreibt den Kunden ohne genaue Überprüfung der tatsächlichen Anzahl 50 Euro gut. Erfahrungsgemäß enthalten aber 20% der Rollen nur genau 49 1-Euro-Stücke, 60% enthalten genau 50 1-Euro-Stücke und 20% beinhalten sogar genau 51 1-Euro-Stücke.

Die Fördesparkasse erhält 1000 dieser Geldrollen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten diese zusammen mindestens 49.970 Euro? Zur Beantwortung dieser Frage

- (a) geben Sie ein Modell mit Zufallsgrößen an,
- (b) definieren Sie das gewünschte Ereignis innerhalb des Modells,
- (c) approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes unter Verwendung der Tabelle auf der Seite 21 (letzte Seite).

Aufgabe 11 (2 Punkte + 2 Punkte = 4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit $E(X_k) = 0$ und $\text{Cov}(X_k, X_l) = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$. Ferner mögen Konstanten $\alpha \in (0, \infty)$ und $\beta \in [0, 1)$ so existieren, dass $\text{Var}(X_k) \leq \alpha k^\beta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Zeigen Sie

(a) $\text{Var}(\sum_{k=1}^n X_k) \leq \alpha n^{1+\beta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehorcht dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, d.h.

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen } 0.$$

Klausur zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Mittwoch, 9. April 2008

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Schreiben Sie bitte auf jedes dieser Blätter *deutlich*

- Ihren Namen und
- die Nummer der Aufgabe, zu der das jeweilige Blatt gehört.

Betrachten Sie die folgenden 13 Aufgaben als eine Auswahl. Lösen Sie während der Bearbeitungszeit (13:00-15:30 Uhr) so viele wie möglich davon und zwar in der Reihenfolge Ihrer Wahl. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1.

4 Punkte

Auf einem $n \times n$ -Schachbrett plaziert man zufällig n Türme. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für diese Situation an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der resultierenden Aufstellung kein Turm den anderen in einem Zug schlagen kann.

Hinweis: Der Turm zieht beim Schach entlang der Reihen und Spalten auf dem Brett, d.h. in einem Zug kann der Turm innerhalb der Reihe oder Spalte, in der er sich befindet, beliebig weit laufen, bis er auf eine Figur stößt, die er schlägt. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, dass in jeder Reihe und jeder Spalte genau ein Turm steht.

Aufgabe 2.

4 Punkte

Vom Chevalier de Meré, einem Adeligen und notorischen Spieler am Hofe Ludwig XIV., ist folgende Fragestellung überliefert:

Was ist wahrscheinlicher: Bei vier Würfeln mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu erhalten oder bei 24 Würfeln mit je zwei Würfeln mindestens einmal zwei Sechsen zu bekommen?

Geben Sie für beide Zufallsexperimente geeignete Wahrscheinlichkeitsräume an und beantworten Sie de Merés Frage.

Hinweis: Wählen Sie möglichst einfache Wahrscheinlichkeitsräume, indem Sie die Grundmenge Ω aus gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen zusammensetzen.

Aufgabe 3.

6 Punkte

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt *Atom*, wenn zum einen $\mu(A) > 0$ ist und zum anderen für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \setminus B) = 0$ gilt. Zeigen Sie:

- Sind $A, B \in \mathcal{A}$ Atome, so gilt $\mu(A \cap B) = 0$ oder $\mu(A \triangle B) = 0$.
- Ist der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ -endlich, so hat jedes Atom endliches Maß.
- Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \in (0, \infty)$ und gilt für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \mu(A)$, so ist A ein Atom.

Aufgabe 4.**5 Punkte**

Seien (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) f ist \mathcal{A} - \mathbb{B}_1 -messbar.
- (b) $\{f > a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- (c) $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie ferner für den Spezialfall $\mathcal{A} = \sigma(\{\Omega\})$ die Äquivalenz

$$f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathbb{B}_1\text{-messbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv a \text{ für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5.**4 Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \text{Pot}(\mathbb{N}))$ eine Gleichverteilung gibt, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} mit $\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{1\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.**5 Punkte**

Seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n . Man stelle die Verteilungsfunktionen von

(i) $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ durch die Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n dar.

Betrachten Sie nun stochastisch unabhängige, exponential-verteilte Zufallsvariablen, d.h. $F_i(t) = (1 - e^{-\lambda_i t})\mathbb{1}_{[0, \infty)}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(ii) Wie ist $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ verteilt?

Aufgabe 7.**6 Punkte**

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ , d.h. die Verteilung von X sei durch die Lebesgue-Dichte

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

mit $\lambda > 1$ gegeben. Bestimmen Sie

(i) die Lebesgue-Dichte $g_{\theta, \alpha, \lambda}$ der Verteilung der Zufallsvariable $Y := \frac{\exp(X)}{\theta} + \alpha$ mit $\theta > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was der Wertebereich von Y ist.

(ii) den Erwartungswert von X und den Erwartungswert von Y .

Aufgabe 8.**3 Punkte**

Seien $X \sim \text{Po}_\lambda$, $Y \sim \text{Po}_\mu$ und X, Y stochastisch unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 9.**4 Punkte**

Eine Münze wird n -mal geworfen ($n \geq 2$). Zeigen Sie:

Die Ereignisse „höchstens einmal erscheint Zahl“ und „Zahl und Kopf erscheinen mindestens einmal“ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $n = 3$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie sich die obigen Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von n ausdrücken lassen.

Aufgabe 10.**7 Punkte**

Seien Z_1, Z_2, \dots stochastisch unabhängige und $N_{0,1}$ -verteilte Zufallsvariablen. Dann ist die Zufallsvariable

$$X_n := \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

χ_n^2 -verteilt (Chi-Quadrat-verteilt mit n Freiheitsgraden).

- (i) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_n]$ und $\text{Var}[X_n]$.

Hinweis: Die Berechnung der Dichte von X_n ist nicht notwendig! Außerdem dürfen Sie verwenden, dass $\mathbb{E}[Z_i^4] = 3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

- (ii) Welcher Verteilung nähert sich die Verteilung der Zufallsgröße Y für wachsende Zahl der Freiheitsgrade n an, wobei

$$Y := \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \quad ?$$

- (iii) Bestimmen Sie die Kovarianz und die Korrelation von X_m und X_n mit $m, n \in \mathbb{N}$

- (iv) Zeigen Sie:

$$\forall b \geq 0 : \chi_1^2((0, b]) = N_{0,1}([- \sqrt{b}, \sqrt{b}]).$$

Aufgabe 11.**5 Punkte**

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine \mathcal{A} -meßbare Funktion. Zeigen Sie, dass genau dann $\int f \, d\mu = 0$ gilt, wenn es eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $f = 0$ auf N^c gilt (kurz: $f = 0$ μ -fast überall).

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mit Hilfe der Ochsentour.

Aufgabe 12.**3 Punkte**

Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \text{Pot}(\mathbb{N}), \zeta_{\mathbb{N}})$, wobei $\zeta_{\mathbb{N}}$ das Zählmaß auf $\text{Pot}(\mathbb{N})$ ist. Ist die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$n \mapsto (-1)^n \frac{1}{n}$$

integrierbar bezüglich $\zeta_{\mathbb{N}}$?

Aufgabe 13.**4 Punkte**

Sei $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Lebesgue-Maß \mathbb{P} . Wir definieren die folgenden \mathbb{R} -wertigen, diskreten Zufallsvariablen:

$$X := \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \quad \text{und} \quad X_n := \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie, dass hier für $n \rightarrow \infty$ zwar $X_n \xrightarrow{\text{in Vert.}} X$,

aber nicht $X_n \xrightarrow{\text{in Ws.}} X$.

ÜBUNGSSCHEINKLAUSUR ZUR VORLESUNG WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsleiter(in):

- Tragen Sie bitte zu allererst die obigen Angaben ein, aber sonst nichts auf dieser Seite.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Für das Übungsscheinkriterium gilt: Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte									

GESAMTPUNKTZAHL:

- 10 P. Aufgabe 1** — Es seien X und Y zwei unabhängige, zu den Parametern $\alpha \in (0, \infty)$ bzw. $\beta \in (0, \infty)$ exponentiell verteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X < Y)$.
- 10 P. Aufgabe 2** — Es seien T, X_1, X_2, X_3, \dots unabhängige reellwertige integrierbare Zufallsgrößen, und T sei \mathbb{N}_0 -wertig. Wir setzen voraus, dass die X_i alle die selbe Verteilung haben. Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $S = \sum_{i=1}^T X_i$ einen endlichen Erwartungswert besitzt.
- 10 P. Aufgabe 3** — Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest und σ eine auf der Menge \mathfrak{S}_N aller Permutationen von $1, 2, \dots, N$ gleichförmig verteilte Zufallsvariable. Mit $F(\sigma)$ bezeichnen wir die Anzahl aller Fixpunkte von σ , d. h. die Anzahl aller $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $\sigma(i) = i$. Ermitteln Sie den Erwartungswert von $F(\sigma)$.
- 10 P. Aufgabe 4** — Im Viererpack eines Kakaotrunks sollte an jeder Packung ein Trinkhalm sein, der jedoch jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fehlt, defekt ist und einwandfrei ist, und zwar unabhängig für die vier Halme. Sei A das Ereignis, dass mindestens ein Trinkhalm fehlt und mindestens einer einwandfrei ist. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit von A .
- 10 P. Aufgabe 5** — Auf $\Omega = [0, \infty)$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} mit der Riemann-Dichte $\omega \mapsto e^{-\omega}$ gegeben. Seien $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ fest, und wir definieren eine Zufallsgröße $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $X(\omega) = (\omega/\alpha)^{1/\beta}$. Ermitteln Sie eine Riemann-Dichte von X .
- 10 P. Aufgabe 6** — Eine gewisse Krankheit kommt bei einem Prozent der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test, der bei 95 Prozent der Kranken anspricht, aber leider auch bei zehn Prozent der gesunden Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person tatsächlich krank, wenn der Test bei ihr anspricht? Zu der Aufgabenlösung gehört eine Angabe des benutzten Wahrscheinlichkeitsraumes.
- 10 P. Aufgabe 7** — Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit endlichen Varianzen und gemeinsamem Erwartungswert $E = \mathbb{E}(X_i) \in \mathbb{R}$. Es gelte $|\text{cov}(X_i, X_j)| \leq |i - j|^{-2}$ für $i \neq j$ und $|\text{cov}(X_i, X_j)| \leq 1$ für $i = j$. Wir setzen $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}S_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen E konvergiert.
- 10 P. Aufgabe 8** — Es sei X eine auf $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gleichförmig verteilte Zufallsgröße. Prüfen Sie X und $|X|$ auf Unkorreliertheit und auf Unabhängigkeit.
- 20 P. Aufgabe 9** — Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für “wahr” bzw. ein f für “falsch” in den Kasten vor der Aussage.

- Wenn zwei Zufallsgrößen je eine endliche Varianz haben, so auch ihre Summe.
- Für jedes $\alpha \in (1, \infty)$ kann man ein $c \in \mathbb{R}$ finden, sodass die Abbildung $x \mapsto c|x|^{-\alpha}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
- Die erzeugende Funktion der Summe zweier Zufallsgrößen ist immer das Produkt der erzeugenden Funktionen.
- Bei einem Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ sind die Ereignisse ‘Es gibt mehr der zufälligen Punkte im Zeitintervall $(0, 1]$ als im Zeitintervall $(1, 2]$ ’ und ‘Im Zeitintervall $(2, 3]$ gibt es keine der zufälligen Punkte’ unabhängig.

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden zwei Punkte abgezogen, bei Offenlassen werden weder Punkte gegeben noch abgezogen, und negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.

Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie am 03.02.2012

Aufgabe 1: Sei $\Omega = \mathbf{N}$. Bestimmen Sie irgend ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, 2^\Omega)$ und eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, 2^\Omega, P)$, so dass

$$E[X^4] < \infty$$

$$E[|X|^5] = \infty$$

[4 Punkte]

Aufgabe 2: a) Beweisen Sie $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, wobei $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ mit $\mathcal{S} = \{]a, b[: a < b\}$

b) Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{[a, b[: a < b\}$

[4 Punkte]

Aufgabe 3: Sei μ eine Verteilung mit Dichte $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$. Beweisen Sie

$$\mu(\mathbf{N}) = 0$$

wobei $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

[4 Punkte]

Aufgabe 4: Sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{für } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

b) Finden Sie die Verteilung μ zur Verteilungsfunktion F .

[4 Punkte]

Aufgabe 5:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar,

(a) Beweisen Sie $f + g$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar. [2 Punkte]

(b) Beweisen Sie $\int f \delta_{x_0} = f(x_0)$, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]

(c) Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen. So dass bzgl. des Lebesgue Mass μ_L gilt,

- $f_n(x) \geq 0$,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ f. s.

Stimmt es dann, dass

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu_L = \int f(x) d\mu_L$? [2 Punkte]

(Begründen Sie Ihre Aussage)

Aufgabe 6:

Beweisen Sie: $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{F}, P) , X ein Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{F}, P) ,

$X_n \rightarrow^{L^1} X \Rightarrow X_n \rightarrow^P X$. [2 Punkte]

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von einer Zufallsvariablen, die Poisson verteilt ist, mit Parameter 1. [2 Punkte]

- Maximale Punktzahl 26 Punkte, Sie bekommen die Note eins bei 24 Punkten.
- Zeit: 90 Minuten.
- Sie dürfen keinen Rechner benutzen.
- Es darf nur auf Blättern mit Stempel geschrieben werden.