Vorlesung Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, SoSe 16

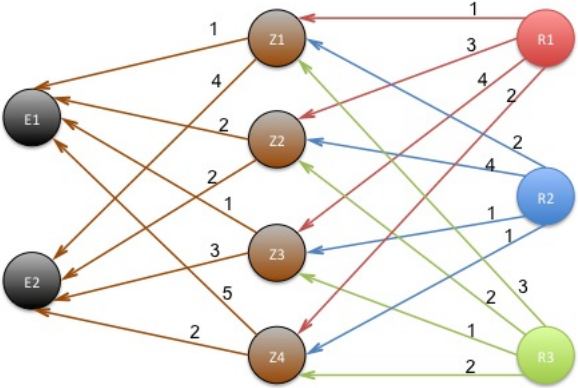
Prof. Dr. Max v. Renesse
`renesse@uni-leipzig.de`

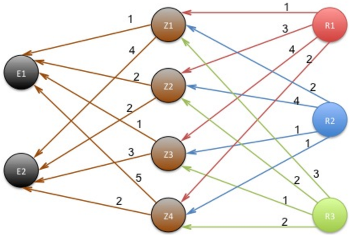
Kapitel 1:

Lineare Algebra

1.1 Der Euklidische Vektorraum

Einführendes Beispiel – Produktionsplanung





$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definition 1.1 *Die Menge*

$$\mathbb{R}^n := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$$

heißt **n-dimensionaler Euklidischer Raum**.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **n-dimensionaler Euklidischer Vektor**.

Für $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *heißen* x_i *die* **Koordinaten** *bzw.* **Komponenten**.

Bemerkung

1. *Veranschaulichung im* $\mathbb{R}^2$ *bzw. in* $\mathbb{R}^3$ *als* **'Vektorpfeile'**.
2. *Häufig ohne Pfeilsymbol geschrieben, d.h.* $x \in \mathbb{R}^n$ *statt* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Null-Vektor**.

Definition 1.2 *Vektoren können mit* **Skalaren** $t \in \mathbb{R}$ *multipliziert werden.*

$$t \cdot \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \cdot x_1 \\ \vdots \\ t \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Vektoren derselben Dimension können addiert werden

$$\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung *Es gelten die üblichen Assoziativ- und Distributivgesetze, z.B.*

$$(t_1 + t_2) \cdot \vec{x} = t_1 \cdot \vec{x} + t_2 \cdot \vec{x}.$$

$$t \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = t \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{y}.$$

Linearkombination – Beispiel

Drei Molkereien mit unterschiedlichem Produktausstoß pro Tag:

Molkerei 1 : 1t Joghurt, 1t Quark, 2t Frischkäse, 3t Milch
Molkerei 2 : 1t Joghurt, 1t Quark, 3t Frischkäse, 2t Milch
Molkerei 3 : 1t Joghurt, 1t Quark, 1t Frischkäse, 4t Milch

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gesamtproduktion, wenn 2 Tage Molkerei 1, 3 Tag Molkerei 2 und 2 Tage Molkerei 3 arbeiten:

$$g = 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Definition 1.3 *Gegeben* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, *dann heißt* $w \in \mathbb{R}^n$ **Linearkombination von** $v_1, \cdots v_n$, *falls* $t_1, \cdots t_k \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass*

$$w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k.$$

Definition 1.4 *Gegeben* $M := \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, *so heißt die Menge*

$$span(M) := \{w = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k \mid t_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots n\}$$

die lineare Hülle *oder* **der Spann von** M.

Bsp. 1.1 (Forts.) *Menge der mit den Molkereien* m_1 *und* m_2 *produzierbaren Güter-Portfolios*

$$span(\{m_1, m_2\}) = \{(x_1, \cdots x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, 2x_1 + 3x_2 = x_3 + x_4\}.$$

Definition 1.5 *Eine Menge von Vektoren* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **linear abhängig**, *wenn mindestens ein* v_i *als Linearkombination der anderen* $\{v_j, j \neq i\}$ *darstellbar ist.*

Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig**.

Bsp. 1.2 $\{m_1, m_2, m_3\}$ *ist linear abhänigig, denn*

$$m_3 = 2m_1 - m_2$$

$\rightsquigarrow$ *Das Produktionsportfolio von* m_3 *kann durch die beiden Molkereien* m_1 *und* m_2 *reproduziert werden,* m_3 *ist in diesem Sinne obsolet.*

Satz 1.1 *Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ist linear unabhängig genau dann, wenn der Null-Vektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ nur auf triviale Weise als Linearkombination darstellbar ist, d.h. falls*

$$\vec{0} = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \cdots + t_k \cdot v_k$$

genau dann, wenn

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0.$$

Bsp. 1.3 $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *linear unabhängig.*

Definition 1.6 *Eine Menge von Vektoren $M = \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$**, *wenn*

$$span(M) = \mathbb{R}^n$$

Bsp. 1.4 *Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.*

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definition 1.7 *Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem* $M = \{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **Basis** *(von* $\mathbb{R}^n$*).*

Bsp. 1.5 *Basis von* $\mathbb{R}^2$*.*

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw. auch

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkung *Ein Erzeugendensystem M von $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis genau dann, wenn es* **minimal** *ist, d.h. wenn jede echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ mehr ist.*

Bemerkung [1]*Falls* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *Basis und* $t_l \neq 0$ *in*

$$w = t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_n \cdot v_n,$$

so erhält man eine neue Basis durch

$$\{v_1, \cdots, v_{l-1}, w, v_l, \cdots, v_n\}.$$

Satz 1.2 *Jede Basis von* $\mathbb{R}^n$ *hat genau* n *Elemente.*

---

[1] 'Austauschsatz von Steinitz'

Definition 1.8 $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *mit*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißt **Standardbasis** *(des* $\mathbb{R}^n$*).*

1.2 Unterräume

Definition 1.9 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **(linearer) Unterraum**, *falls jede Linearkombination von Elementen von M wieder in M liegt, d.h.*

$$t_1 \cdot v_1 + \cdots t_k \cdot v_k \in M$$

für alle $v_1, v_2, \cdots, v_k \in M$, $t_i \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

1. *Für jede Menge M ist $span(M)$ ein Unterraum.*
2. *M ist Unterraum genau dann, wenn $M = span(M)$.*

Bsp. 1.6

1. $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ *kein Unterraum*
2. $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$ *Unterraum*
3. *Die Unterräume in $\mathbb{R}^2$ sind alle Ursprungsgeraden und die Menge $\{\vec{0}\}$.*
4. *Die Unterräume in $\mathbb{R}^3$ sind alle Ursprungsgeraden und alle Ursprungsebenen und die Menge $\{\vec{0}\}$.*

Definition 1.10 *Eine linear unabhängige Teilmenge N eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ mit span$(N) = M$ heißt* **Basis von** *M.*

Bsp. 1.7 *Unterraum in $\mathbb{R}^3$*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Basis

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 1.3 *Alle Basen eines Unterraums $M \subset \mathbb{R}^n$ haben stets dieselbe Anzahl von Elementen.*

Definition 1.11 *Die Anzahl der Elemente einer Basis für einen Unterraum $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Dimension von** *M.*

Bsp. 1.8 $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2, x_3 = x_4\} \subset \mathbb{R}^4$,
Basis z.B. $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\} \rightsquigarrow dim(M) = 2$.

Bemerkung *Die Menge* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Basis vom Unterraum* $M \subset \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn für jedes* $w \in M$ *eindeutige Koeffizienten* $(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ *existieren, so dass*

$$w = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k.$$

Bsp. 1.9 *Molkereien (Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nachfrage

$$n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Kann die Nachfrage durch geeignete Laufzeiten t_1, t_2 und t_3 exakt bedient werden, d.h existieren t_1, t_2, t_3, so dass

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3 \text{ ?}$$

Gibt es verschiedene Kombinationen von (t_1, t_2, t_3), um n zu produzieren?

Die Gleichung

$$n = t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3$$

schreibt sich zeilenweise

$$\begin{aligned} 8 &= \quad t_1 1 + \quad t_2 1 + \quad t_3 1 \\ 8 &= \quad t_1 1 + \quad t_2 1 + \quad t_3 1 \\ 7 &= \quad t_1 2 + \quad t_2 3 + \quad t_3 1 \\ 5 &= \quad t_1 3 + \quad t_2 3 + \quad t_3 4 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ System von vier Gleichungen für drei Variablen (t_1, t_2, t_3).

Es existiert mindestens eine Lösung (t_1, t_2, t_3) genau dann, wenn

$$n \in \mathrm{span}(\{m_1, m_2, m_3\}) \subset \mathbb{R}^4.$$

Es existieren mehr als eine (d.h. unendlich vielen) Lösungen genau dann, wenn $n \in \mathrm{span}(\{m_1, m_2, m_3\})$ und

$$\{m_1, m_2, m_3\} \text{ linear abhängig.}$$

1.3 Sklarprodukt und Orthogonalität

Definition 1.12 *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist das* **Skalarprodukt** *definiert als*

$$x \bullet y := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i .$$

Bsp. 1.10 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

Definition 1.13 *Die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als*

$$\|x\| := \sqrt{x \bullet x}.$$

Bsp. 1.11 $$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Bemerkung *Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.*

Definition 1.14 *Zwei Vektoren* $x, y \in R^n$ **stehen senkrecht zueinander** *bzw.* **sind orthogonal**, *falls*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Bemerkung x *und* y *orthogonal* $\Leftrightarrow x \bullet y = 0$.

Bsp. 1.12 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *sind orthogonal.*

Definition 1.15 *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$, dann heißt*

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d \,|x \bullet a = 0 \text{ für alle } a \in A\} \subset \mathbb{R}^d$$

das **orthogonale Komplement** *von A.*

Lemma 1.1 *$A^\perp$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^d$*

Satz 1.4 *Sei $H \subset \mathbb{R}^d$ ein Unterraum, dann lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eindeutig zerlegen in*

$$x = x^H + x^\perp$$

mit $x^H \in H$ und $x^\perp \in H^\perp$

Bemerkung

- x^H *heißt* **orthogonale Projektion von x auf H.**
- x_H *ist das Element von H mit minimalem Abstand zu x.*

Bew: *Existenz der Zerlegung: Durch Induktion nach $d = dim(H)$.*

Induktionsanfang *Falls $d = 0$ ist $H = \{0\}$ und $H^\perp = \mathbb{R}^d$, d.h.*

$$x = 0 + x.$$

Induktionsschritt *Sei $H = span(\{h_1, \cdots, h_{d-1}, h_d\})$, dann setze $H' := span(\{h_1, \cdots, h_{d-1}\})$, so gilt wg. Induktionsvoraussetzung*

$$x = x^{H'} + \tilde{x}$$

$$h_d = h_d^{H'} + \tilde{h}_d$$

mit $\tilde{h} \in H$ und $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{h}_d$ orthogonal zu H'. Sei

$$x^{\tilde{h}_d} := \frac{(\tilde{x} \bullet \tilde{h}_d)}{\|\tilde{h}_d\|^2}\tilde{h}_d$$

und

$$x^H := x^{H'} + x^{\tilde{h}_d}, \quad x^\perp := \tilde{x} - x^{\tilde{h}_d}.$$

Dann gilt $x^H \in H$, $x^\perp$ orhogonal zu H' und zu h_d sowie

$$x = x^H + x^\perp.$$

Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei

$$x = x_1^H + x_1^\perp = x_2^H + x_2^\perp$$

so gilt

$$x_1^H - x_2^H = x_1^\perp - x_2^\perp \in H \cap H^\perp.$$

Also

$$\begin{aligned}\|x_1^H - x_2^H\|^2 &= (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_1^H - x_2^H)\\ &= (x_1^H - x_2^H) \bullet (x_1^\perp - x_2^\perp) = 0.\end{aligned}$$

Folglich

$$x_1^H - x_2^H = 0$$

und damit auch

$$x_1^\perp = x_2^\perp.$$

Korollar 1.1 *Für einen Unterraum $H \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$span(H \cup H^{\perp}) = \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere gilt

$$(H^{\perp})^{\perp} = H$$

und

$$\dim(H^{\perp}) = n - \dim(H).$$

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.16 *Es seien $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$, dann heißt das Problem*

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots t_k v_k \stackrel{!}{=} 0$$

für unbekanntes

$$(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

ein **lineares homogenes Gleichungssystem** *der Größe $n \times k$.*

Bemerkung *Schreibt man* $v_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ \vdots \\ v_j^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \cdots, k$, *stellt sich das homogene Gleichungssystem zeilenweise dar als*

$$\begin{array}{ccccc}
v_1^1 t_1 + & v_2^1 t_2 + & \cdots + & v_k^1 t_k \stackrel{!}{=} & 0 \\
v_1^2 t_1 + & v_2^2 t_2 + & \cdots + & v_k^2 t_k \stackrel{!}{=} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_1^n t_1 + & v_2^n t_2 + & \cdots + & v_k^n t_k \stackrel{!}{=} & 0
\end{array}$$

1.5 Matrizen

Definition 1.17 *Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei*

$$\mathbb{R}^{n\times k} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^k$$

die **Menge der** $(n \times k)$**-Matrizen**.

Ein Element $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ heißt $(n \times k)$**-Matrix**.

Bemerkung

- *Eine $(n \times k)$-Matrix hat n* **Zeilen** *und k* **Spalten** *bzw.*
- *k* **Spaltenvektoren** *$M_1, \cdots, M_l \in \mathbb{R}^n$ bzw.*
- *n* **Zeilenvektoren** *$M^1, \cdots, M^n \in \mathbb{R}^k$.*

Schreibweise

$M = (M_i^j)_{i=1,\cdots,l}^{j=1,\cdots,k}$ für die **Einträge** $M_i^j \in \mathbb{R}$ in der j-ten Zeile und i-ten Spalte.

Bemerkung

- *Ein homogenes* $(n \times k)$*-Gleichungssystem wird durch die entsprechende* $(n \times k)$*-Matrix von Spaltenvektoren eindeutig beschrieben.*
- *Es sei* $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *die beschreibende Matrix für ein homogenes lineares Gleichungssystem der Größe* $(n \times k)$*. Dann ist*

$$t = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k \text{ eine Lösung}$$

genau dann, wenn

$$t = (t_1, \cdots, t_k) \text{ ist senkrecht zu allen Zeilenvektoren von } M.$$

Definition 1.18 *Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Der* **Zeilenraum**

$$Z_M := span(\{M^1, \cdots, M^n\}) \subset \mathbb{R}^k.$$

ist der von den Zeilenvektoren $M^1, \cdots, M^n$ aufgespannte Unterraum in $\mathbb{R}^k$.

Der **Spaltenraum**

$$S_M := span(\{M_1, \cdots, M_k\}) \subset \mathbb{R}^n.$$

ist der von den Spaltenvektoren $M_1, \cdots, M_k$ aufgespannte Unterraum in $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.5 *Für jede Matrix M gilt*

$$\dim(Z_M) = \dim(S_M).$$

Definition 1.19 *Für $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$*

$$Rang(M) := \dim(Z_M).$$

Korollar 1.2 *Für* $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *sei*

$$M := (v_1, \cdots, v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Dann gilt für $t = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots t_k v_k = 0$$

genau dann, wenn

$$t \in Z_M^{\perp}.$$

Definition 1.20 *Für* $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$

$$Kern(M) := Z_M^\perp \subset \mathbb{R}^k.$$

Bemerkung *Die Menge* Kern(M) *ist die Menge aller Lösungen des durch* $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *beschriebenen homogenen linearen Gleichungssystems der Größe* $(n \times k)$*.*

Korollar 1.3 *Die Menge der Lösungen eines homogenen durch $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ beschriebenen Gleichungssystems bildet einen Unterraum von $\mathbb{R}^k$ der Dimension*

$$\dim(Kern(A)) = k - Rang(A).$$

Definition 1.21 *Eine $(n \times k)$-Matrix ist in* **Zeilenstufenform**, *falls*

1. *Die Anzahl der zusammenhängend führenden Nullen von Zeile zu Zeile anwächst und*
2. *der erste Eintrag ungleich Null in jeder Zeile zu einem Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ in der entsprechenden Spalte gehört.*

Bsp. 1.13

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & |1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |1 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Satz 1.6 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ in Zeilenstufenform gilt*

$$Rang(A) = Anzahl\ der\ Stufen\ in\ A.$$

Bsp. 1.14

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rang(A) = 2.$$

$$\dim(Kern(A)) = 3.$$

Definition 1.22 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ heißen die folgenden* **Zeilenoperationen zulässig***:*

- *Multiplikation sämtlicher Zeileneinträge mit einer Zahl $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- *Komponentenweise Addition einer Zeile auf eine andere*

und damit auch

- *die Vertauschung bzw.*
- *die Komplementenweise Subtraktion von Zeilen.*

Satz 1.7 *Die Menge der Lösungen eines durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ beschriebenen linearen Gleichungssystems bleiben bei zulässigen Zeilenoperationen unverändert.*

Insbesondere verändern sich Rang und Kerndimension von Matrizen nicht bei zulässigen Zeilenoperationen.

Satz 1.8 *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ lässt sich durch zulässige Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen (Gauß-Algorithmus).*

Bsp. 1.15

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & |\underline{1} & \underline{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rang(A) = 3, \ \dim(Kern(A)) = 2$$

Definition 1.23 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist in* **diagonalisierter Zeilenstufenform**, *falls*

1. *jeder Diagonaleintrag ungleich Null zu einem euklidischen Standard-Basisvektor in der entsprechenden Spalte gehört und*
2. *nach Streichung aller Null-Zeilen in A eine Matrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform entsteht.*

Bsp. 1.16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.9 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ *in diagonalisierter Zeilenstufenform mit* $Rang(A) = r \leq k$.

Sei $h_1, \cdots, h_{k-r}$ *die Menge der Vektoren, die aus den Nicht-Einheits-Spaltenvektoren von* A *bei Ersetzen des jeweiligen Diagonaleintrags* 0 *durch* -1 *entstehen, dann gilt*

$$Kern(A) = span(\{h_1, \cdots, h_{k-r}\}).$$

Bsp. 1.17

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Rang(A) = 2, \ \dim(Kern(A)) = 2.$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$Kern(A) = Span(\{h_1, h_2\}).$$

Bemerkung *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ in Zeilenstufenform kann durch Zeilenvertauschung und Streichung bzw. Einfügen von Null-Zeilenvektoren in eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ in diagonalisierter Zeilenstufenform überführt werden.*

Zeilenraum und somit auch der Kern bleiben dabei unverändert.

Bsp. 1.18

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Korollar 1.4 *Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ sind genau die Linearkombinationen der zugehörigen modifizierten Nicht-Einheits-Spaltenvektoren der diagonalisierten Zeilenstufenform $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ von A.*

Bsp. 1.19 *Molkereien (Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Zeilenstufenform

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 2 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Diagonalisierte Zeilenstufenform $(k = 3, r = 2)$ und Kern

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Span}(\{h_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\}).$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 m_1 + t_2 m_1 + t_3 m_3 = 0 \iff \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.}$$

Die Menge der Lösungen des durch m_1, m_2, m_3 definierten homogenen Gleichungssystems entspricht dem Ursprungsstrahl in $\mathbb{R}^3$ zur Richtung h_1.

Definition 1.24

- *Gegeben* $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *und* $b \in \mathbb{R}^n$, *dann heißt das Problem*

$$t_1 v_1 + \cdots t_k v_k \stackrel{!}{=} b$$

  ein (inhomogenes) **lineares Gleichungssystem** *der Größe* $n \times k$. $b \in \mathbb{R}^k$ *heißt* **rechte Seite**.
- *Falls* $t = (t_1, t_2, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ *die obige Gleichung erfüllt, so heißt es* **Lösung** *des Gleichungssystems.*

Bsp. 1.20 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nachfrage

$$n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finde $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$*, so dass*

$$t_1 m_1 + t_2 m_2 + t_3 m_3 = n.$$

Inhomogenes lineares Gleichungssystem der Größe 4×3*.*

Bemerkung *Für ein (homogenes oder inhomogenes) Gleichungssystem sind drei Fälle möglich:*

- *Das Gleichungssystem hat keine Lösung.*
- *Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.*
- *Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.*

In den Fällen 2 bzw. 3 heißt das Gleichungssystem **(eindeutig) lösbar**, *in Fall 1* **nicht lösbar.**

Lemma 1.2 *Es seien $t \in \mathbb{R}^k$ und $s \in \mathbb{R}^k$ zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems (homogen oder inhomogen). Dann ist*

$$s - t \in \mathbb{R}^k$$

eine Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Bew:

$$\begin{aligned} 0 = b - b &= (s_1 v_1 + \cdots s_k v_k) - (t_1 v_1 + \cdots t_k v_k) \\ &= (s_1 - t_1) v_1 + \cdots + (s_k - v_k) v_k . \end{aligned}$$

Korollar 1.5 *Sei t eine Lösung des Gleichungssystems $(A|b) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}$. Dann sind alle weiteren Lösungen von der Form*

$$\tilde{t} = t + n, n \in Kern(A).$$

Bemerkung *In der obigen Darstellung der Lösungsmenge nennt man $t \in \mathbb{R}^k$ gelegentlich eine* **spezielle Lösung**.

Bemerkung *Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem wird eindeutig durch die*

- **Koeffizientenmatrix** $A = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *und* **rechte Seite** $b \in \mathbb{R}^n$
- *bzw. durch die* **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_k & b \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}.$$

beschrieben.

Lemma 1.3 *Unter zulässigen Zeilenoperationen auf einer erweiterten Koeffizientenmatrix eines inhomogenen Gleichungssystems bleibt die Lösungsmenge unverändert.*

Satz 1.10 *Es sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Dann ist das Gleichungssystem lösbar, genau dann wenn*

$$\mathit{Rang(A)} = \mathit{Rang}(A|b).$$

Korollar 1.6 *Ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizienenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{b})$ in Zeilenstufenform ist lösbar genau dann, wenn*

$$\mathit{Stufenanzahl}(\tilde{A}) = \mathit{Stufenanzahl}(\tilde{A}|\tilde{b}).$$

Bsp. 1.21 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) := (m_1\ m_2\ m_3 \mid n)$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform von $(A|b)$

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Rang(\tilde{A}|\tilde{b}) = 3 \neq 2 = Rang(\tilde{A}).$$

$\Rightarrow$ *Gleichungssystem* $(A|b) = (m_1\ m_2\ m_3\ n)$ *nicht lösbar.*

Bsp. 1.22 *(Molkereien, Forts.)*

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, n' = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b') := (m_1\ m_2\ m_3 \mid n')$

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform von $(A|b')$

$$(\tilde{A}|\tilde{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ *Gleichungssystem* $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$ *lösbar.*

Lemma 1.4 *Es sei* $(A|b) \in \mathbb{R}^{n(k+1)}$ *ein lösbares inhomogenes lineares Gleichungssystem in Zeilenstufenform. Dann ist eine spezielle Lösung* $t \in \mathbb{R}^k$ *gegeben durch*

$$t_j = \begin{cases} b_i & \text{falls } A \text{ in der } j\text{-ten Spalte die } i\text{-te Stufe hat}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad .$$

Bsp. 1.23 *Gegeben das inhomog. Gleichungssystem* $(A|b)$ *in Zeilenstufenform*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bsp. 1.24 *(Molkereien, Forts.). Gegeben* $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$.

$$(\tilde{A}|\tilde{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichungssystem $(A|b') = (m_1\ m_2\ m_3\ n')$ *lösbar.*
Spezielle Lösung

$$t = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ 'Kochrezept' Gegeben Gleichungssystem $(A|b) \in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}$.

1. Überführe $(A|b)$ durch zulässige Zeilenoperationen in Zeilenstufenform $(\tilde{A}|\tilde{b})$
2. Gleichungssystem lösbar, falls
$$\text{Stufenanzahl } (\tilde{A}) = \text{Stufenanzahl } (\tilde{A}|\tilde{b}).$$
3. Bestimme spezielle Lösung $t \in \mathbb{R}^k$.
4. Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(\tilde{A})$ durch Überführung von $\tilde{A}$ in diagonalisierte Zeilenstufenform $\hat{(A)}$.
5. Bestimmung von $\text{Kern}(\hat{A}) = \text{Kern}(A)$.
6. Alle Lösungen sind von der Form
$$s = t + n, \quad n \in \text{Kern}(A).$$

Bsp. 1.25 *(Molkereien, Forts.). Gegeben* $(A|b^*) = (m_1\ m_2\ m_3\ n^*)$.

$$(A|b^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform

$$(\tilde{A}|\tilde{b}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gleichungssystem lösbar. Spezielle Lösung

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisierte Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen sind von der Form

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung *Will man eine Menge von Vektoren* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *auf* **lineare Unabhängigkeit prüfen**, *kann man wie folgt vorgehen.*

1. *Bilde die zugehörige Matrix* $A = (v_1 \cdots v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *mit Spaltenvektoren* $v_1, \cdots, v_k$.
2. *Transformiere* A *auf Zeilenstufenform* $\tilde{A}$ *und bestimme*

$$Rang(A) = Rang(\tilde{A}).$$

3. *Falls* $Rang(A) = k$, *ist die Menge* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *linear unabhänig, falls* $Rang(A) < k$ *linear abhängig.*

Bemerkung

- *Der Zeilenraum einer Matrix ändert sich nicht bei zulässigen Zeilenoperationen.*
- *Die Zeilenvektoren einer Matrix in Zeilenstufenform nach Streichung aller Null-Zeilen bilden eine* **Basis des Zeilenraums***.*

Bemerkung *Gegeben der lineare Unterraum*

$$V = Span\{v_1, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Man kann eine **Basis von** $V \subset \mathbb{R}^n$ **finden** *wie folgt.*

- *Bilde die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

  mit Zeilenvektoren $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$.
- *Transformiere* A *in Zeilenstufenform* $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$
- *Die Zeilenvektoren ungleich* $\vec{0}$ *in* $\tilde{A}$ *bilden eine Basis von* V.

Bsp. 1.26 *Gegeben die Fabriken*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ein minimales System von Fabriken an mit gleicher Menge von kombinierten Produktions-Portfolios.
Matrix von zugehörigen Zeilenvektoren

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 6 & 12 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

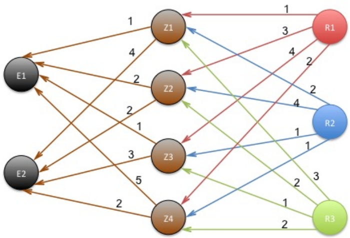
Zugehörige Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 111 & -136 \\ 0 & 22 & 0 & 24 & 52 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Minimales System entspricht den ersten drei Zeilenvektoren ($\rightsquigarrow$ Basis).

1.6 Lineare Abbildungen

Bsp. 1.27 *Produktionsplanung – Rohstoffe und Zwischenprodukte (Forts.)*



$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

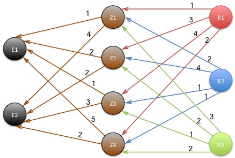
Definition 1.25 *Eine Abbildung* $\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ *heißt* **linear**, *falls für alle* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$\phi(s\vec{x} + t\vec{y}) = s\phi(\vec{x}) + t\phi(\vec{y}).$$

Bsp. 1.28 $k = n = 1$, $\phi(x) = c \cdot x$. *(Proportionalitätsgesetz)*

Bsp. 1.29 $n = k$, $\phi(x) = x$ *('Identitätsabbildung in* $\mathbb{R}^n$*').*

Bsp. 1.30 $n = 3,\ k = 4$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \phi(\vec{x}) := x_1 \cdot \vec{z}_1 + x_2 \cdot \vec{z}_2 + x_3 \cdot \vec{z}_3 + x_4 \cdot \vec{z}_4.$$

$$\phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +2x_4 \\ 2x_1 & +4x_2 & +1x_3 & +1x_4 \\ 3x_1 & +2x_2 & +1x_3 & +2x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Definition 1.26 *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $v \in \mathbb{R}^k$ definiert man*

$$A \bullet v := \begin{pmatrix} A^1 \bullet v \\ A^2 \bullet v \\ \vdots \\ A^n \bullet v \end{pmatrix},$$

mit den Zeilenvektoren $A^1, \cdots, A^n \in \mathbb{R}^k$ von A.

Satz 1.11 *Jede lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ ist von der Form*

$$\phi(\vec{x}) = A \bullet \vec{x}$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

Bsp. 1.31

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \phi(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.27 *Die Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *zur linearen Abbildung* $\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ *heißt* **darstellende Matrix**.

Bemerkung *Die Spalten der Matrix A sind gegeben durch* $A_j = \phi(e_j)$, $j = 1, \cdots, k$ *mit* $e_1, \cdots, e_k$ *den Standard-Basisvektoren vom* $\mathbb{R}^k$.

Lemma 1.5 *Die Komposition*

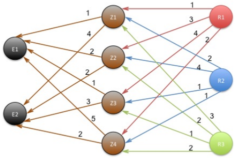
$$\psi \circ \phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^l$$

zweier linearer Abbildungen

$$\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$$

ist erneut eine lineare Abbildung.

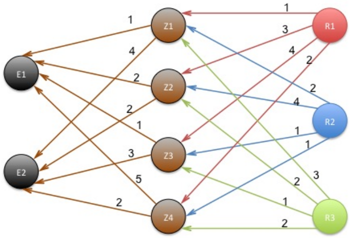
Bsp. 1.32 *(Forts.)*



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \phi\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] := y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \psi(\vec{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Bsp. 1.33 *(Forts.)*



$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (\psi \circ \phi)(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 21 & 26 \\ 16 & 21 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.28 *Für $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ und $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$ definiert man das* **Matrixprodukt**

$$A \bullet B \in \mathbb{R}^{l \times k}$$

als die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren

$$A \bullet B = (A \bullet B_1, A \bullet B_2, \cdots A \bullet B_k) \in \mathbb{R}^{l \times k},$$

mit $B_1, \cdots B_k \in \mathbb{R}^n$ den Spaltenvektoren von B.

Bemerkung *Das Matrixprodukt $A \bullet B$ zweier Matrizen A und B ist die Matrix mit Einträgen gleich den Skalarprodukten*

$$(A \bullet B)_i^j = A^j \bullet B_i.$$

aus allen Zeilenvektoren von A mit allen Spaltenvektoren von B in entsprechender Anordnung.

Die Zeilenvektoren von A und die Spaltenvektoren von B müssen dabei dieselbe Länge haben.

Die resultierende Matrix $A \bullet B$ hat dieselbe Zeilenanzahl wie A und dieselbe Spaltenanzahl wie B.

Bsp. 1.34 *(Forts.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 26 \\ 16 & 21 \\ 18 & 23 \end{pmatrix}$$

Satz 1.12 *Gegeben zwei lineare Abbildungen*

$$\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$$

mit darstellenden Matrizen

$$B \in \mathbb{R}^{n \times k} \quad \textit{bzw.} \quad A \in \mathbb{R}^{l \times n}.$$

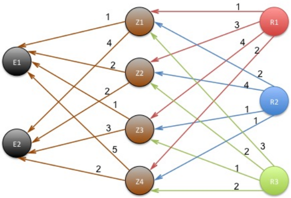
Dann ist die darstellende Matrix für die Komposition

$$\psi \circ \phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^l$$

gegeben durch das Matrixprodukt

$$C = A \bullet B.$$

Bsp. 1.35 *(Forts.)*



$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (\psi \circ \phi)(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 21 & 26 \\ 16 & 21 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Definition 1.29 *Es sei $\phi : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, dann heißen*

$$kern(\phi) = \{t \in \mathbb{R}^k \,|\, \phi(t) = 0\}$$

und

$$im(\phi) = \{\phi(x) \,|\, x \in \mathbb{R}^k\}$$

Kern *bzw.* **Bild** *von ϕ.*

Satz 1.13 *kern*(ϕ) *und im*(ϕ) *sind Unterräume von* $\mathbb{R}^k$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *und es gilt die* **Dimensionsformel**

$$\dim(im(\phi)) = k - \dim(kern(\phi)).$$

Bemerkung *Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die darstellende Matrix von ϕ ist, so gilt*

$$kern(\phi) = Kern(A) \subset \mathbb{R}^k$$

und

$$im(\phi) = span(A_1, \cdots, A_k) \subset \mathbb{R}^n,$$

mit den Spaltenvektoren $A_1, \cdots, A_k$ von A.

Definition 1.30 *Die Abbildung* $Id : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$,

$$x \mapsto Id(x) := x$$

heißt **identische Abbildung** *auf* $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung *Die darstellende Matrix für Id ist die* **Einheitsmatrix**

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.31 *Eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *heißt* **invertierbar** *bzw.* **regulär**, *falls eine Matrix* $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *existiert, so dass*

$$A \bullet B = E_n.$$

Bsp. 1.36

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.14 *Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent,*

- *A ist regulär,*
- $Rang(A) = n$,
- *A ist die darstellende Matrix einer invertierbaren linearen Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.*

Insbesondere ist A regulär genau dann, wenn die dargestellte lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ bijektiv ist.

Bemerkung

1. *Falls* $A \in R^{n\times n}$ *regulär, so ist* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

   $$A \bullet B = E_n$$

   eindeutig bestimmt.

2. B *ist die darstellende Matrix der* **Umkehrabbbildung** *von* ϕ

   $$\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

3. *Es gilt dann auch*

   $$B \bullet A = A \bullet B = E_n.$$

4. B *wird die* **Inverse** *von* A *genannt,* **Schreibweise** $B = A^{-1}$.

Satz 1.15 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems*

$$A \bullet x \stackrel{!}{=} b$$

eindeutig und gegeben durch

$$x = A^{-1} \bullet b.$$

Bsp. 1.37

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet x \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$x = A^{-1} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Satz 1.16 *Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei*

$$\bar{A} = (A \,|\, E_n) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}.$$

die um E_n erweiterte Matrix mit zugehöriger Zeilenstufenform

$$(\hat{A} \,|\, B) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}.$$

Dann ist A regulär genau dann, wenn $\hat{A} = E_n$. In dem Fall ist

$$A^{-1} = B.$$

Bsp. 1.38

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Überführung in Zeilenstufenform durch zul. Zeilenoperationen:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \textit{ regulär }, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.7 Determinante

Definition 1.32 *Eine Abbildung* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt*

- **multilinear**, *falls* d *linear in jedem ihrer Argumente ist, d.h.*

$$\begin{aligned} & d(v_1, \cdots, v_{l-1}, s \cdot v_l + t \cdot w_l, v_{l+1}, \cdots, v_k) \\ & \qquad = s \cdot d(v_1, \cdots, v_{l-1}, v_l, v_{l+1}, \cdots, v_k) \\ & \qquad + t \cdot d(v_1, \cdots, v_{l-1}, w_l, v_{l+1}, \cdots, v_k), \end{aligned}$$

- **alternierend**, *falls*

$$(v_i = v_j \text{ für } i \neq j) \Longrightarrow d(v_1, , \cdots, v_k) = 0.$$

Bemerkung *Eine alternierende multilineare Abbildung*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ist zu interpretieren als **Volumenfunktion**

$$|d(v_1, \cdots, v_k)| \mathrel{\hat{=}} Vol(Spat(v_1, \cdots, v_k)),$$

wobei

$$Spat(v_1, \cdots, v_k)$$

das von den Vektoren $v_1, \cdots, v_k$ *aufgespannte Parallelogramm bezeichnet.*

Satz 1.17

1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine alternierende multilineare Abbildung*
$$D : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$$
mit
$$D(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1.$$

2. *Für D gilt der* **Laplace'sche Entwicklungssatz***: Für $i \in \{1, \cdots n\}$ gilt*
$$D(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i+j} \cdot v_i^j \cdot D(\hat{V}(i,j)),$$
wobei die Matrix bzw. Spaltenvektoren
$$\hat{V}(i,j) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$
aus der Matrix $V = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ durch Streichung der i-ten Spalte und j-ten Zeile hervorgehen.

Bemerkung *Beide Aussagen des vorausgehenden Satzes kann man parallel durch Induktion nach n beweisen wie folgt.*

Die Aussage ist trivialer Weise richtig. für $n = 1$.

Für $n \geq 2$ und $m = 1, \cdots, n+1$ seien $\Lambda(m)$ und $C(m)$ die Aussagen

$C(m)$: *Falls $C \in \mathbb{R}^{(m+k)\times(m+k)}$ eine Matrix ist mit*

$$C \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ A \bullet y \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+k}$$

dann gilt

$$D(C) = D(A).$$

$\Lambda(m)$: *Für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ mit $k \leq m$ gilt die Aussage des Laplace'schen Entwicklungssatzes.*

Dann zeigt man als direkte Konsequenz aus den geforderten Eigenschaften von D, dass

$$C(m-1) \wedge \Lambda(m) \Longrightarrow C(m)$$

$$C(m) \Longrightarrow \Lambda(m+1)$$

Zusammengenommen ergibt sich hiermit der Induktionsschritt.

Bemerkung

- *Die Abbildung* $D : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ *heißt* **Determinante**.
- *Analog spricht man von der* **Determinante einer** $(n \times n)$**-Matrix**

$$\det(A) = D(A_1, \cdots, A_n).$$

Bsp. 1.39

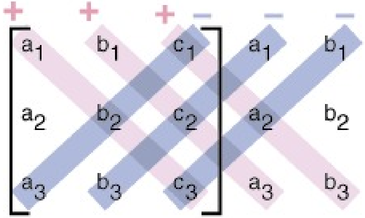
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} 2 \cdot 5 + (-1)^{1+2} 4 \cdot 3 = -2$$

Bemerkung *Allgemein gilt für eine* 2×2*-Matrix*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Bemerkung *Für 3×3-Matrizen ergibt sich als Konsequenz der Laplace-Entwicklung die* **Regel von Sarrus***:*



$$\det A = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

Bsp. 1.40

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 5 \\ &\quad - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \\ &= 51 \end{aligned}$$

Bemerkung *Bei großen Matrizen hofft man auf leer besetzte Spalten, auf die man den besonderes effizient den Entwicklungssatz von Laplace anwenden kann.*

Bsp. 1.41

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 51 = 102.$$

Satz 1.18 *Die Determinante hat die folgenden Eigenschaften*

- *Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.*
- *Die Determinante ändert sich nicht bei komponentenweiser Addition einer Spalte auf eine andere.*
- *Die Determinante einer quadratischen Matrix ist ungleich Null genau dann, wenn die Matrix regulär ist.*

Bemerkung *Die Determinante bietet damit ein direktes* **Kriterium zur Invertierbarkeit von Matrizen**.

1.8 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Definition 1.33 *Gegeben $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ ein* **(reeller) Eigenwert von** *A, falls*

$$A \bullet v = \lambda \cdot v$$

für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. In dem Fall heißt v **Eigenvektor von** *A.*

Bsp. 1.42

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}.$$

$$A \bullet v = \lambda \cdot v.$$

A hat einen Eigenwert $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ *mit Eigenvektor* $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung *λ ist ein reeller Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann wenn*

$$kern(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$$

bzw. genau dann, wenn

$$A - \lambda E_n \text{ ist nicht invertierbar}$$

bzw. genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda E_n) = 0.$$

Definition 1.34 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann heißt die Funktion*

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto P(\lambda) \in \mathbb{R},$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

das **charakteristische Polynom** *von A.*

Bsp. 1.43

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Bemerkung *Die reellen Eigenwerte einer Matrix sind genau die reellen* **Nullstellen des charakteristischen Polynoms**. *Diese Tatsache benutzt man, um die Eigenwerte einer Matrix zu finden.*

Anschließend bestimmt man die zugehörigen Eigenvektoren durch Bestimmung von

$$Kern(A - \lambda E_n).$$

Definition 1.35 *Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann heißt*

$$E_\lambda := kern(A - \lambda E_n) \subset \mathbb{R}^n$$

der zugehörige **Eigenraum von A zum Eigenwert λ.**

Bsp. 1.44 *(Forts.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Nullstellen von $P(\lambda)$ mit p-q-Formel

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

$\rightsquigarrow$ Die Matrix A hat die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2.

Bsp. 1.45 *(Forts.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Eigenraum zu λ_1 ist

$$\begin{aligned} \mathit{kern}(A - \lambda_1 E_2) &= \mathit{kern} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \\ &= \mathit{span} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = \mathit{span} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Der Eigenraum zum Eigenwert λ_1 ist eindimensional und wird vom Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.*

Bsp. 1.46 *(Forts.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Eigenraum zu λ_2 ist

$$\begin{aligned} kern(A-\lambda_2 E_2) &= kern \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \\ &= span \begin{pmatrix} 2 \\ -(\sqrt{5}+1) \end{pmatrix} = span \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Der Eigenraum zum Eigenwert λ_2 ist eindimensional und wird vom Vektor $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.*

Bemerkung *Die beiden Eigenvektoren $\{v_1, v_2\}$ von bilden in diesem Beispiel sogar eine Basis des $\mathbb{R}^2$.*

Bemerkung *Man findet* **sämtliche Eigenwerte** *einer Matrix, wenn man die* **komplexwertigen Nullstellen** *des charakteristischen Polynoms hinzunimmt. (*$\rightsquigarrow$ *Komplexe Zahlen; nicht in diesem Kurs.)*

Bsp. 1.47 *(Forts./Anwendung) Die* **Fibonacci-Folge** *wird rekursiv defniert als* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ *und*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

(Wachstumsmodell für z.B. Wachstum der Fans auf Facebook.)

$$\rightsquigarrow (f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots)$$

Behauptung: Es gilt die **Formel von Binet**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right),$$

wobei

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

die beiden Eigenwerte sind der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat, schreibt man

$$F_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

so schreibt sich die Rekursionsvorschrift für f_{n+1} als

$$F_{n+1} = A \bullet F_n$$

und entsprechend nach Iteration

$$F_{n+1} = \underbrace{A \bullet A \bullet \cdots \bullet A}_{=:A^n} \bullet F_1, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A \bullet v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A \bullet A \bullet \cdots \bullet A \bullet v_i = A^n \bullet v_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \cdots \cdot \lambda_i \cdot \; v_i = \lambda_i^n \cdot v_i.$$

Der Vektor $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich mit der Basis $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ darstellen als

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (v_1 - v_2) \, .$$

Aus der Linearität von A^n folgt dann, dass

$$\begin{aligned} F_{n+1} = A^n \bullet F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} A^n \bullet v_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} A^n \bullet v_2 . \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_1^n \, v_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2^n \, v_2 \end{aligned}$$

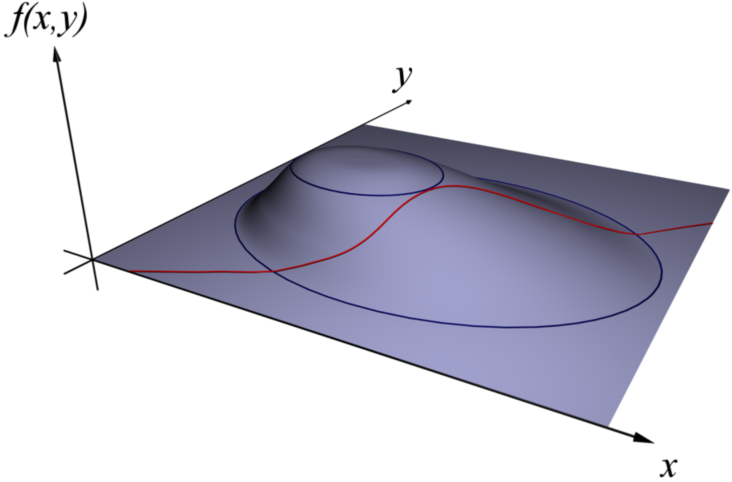
Die Binet'sche Formel ist die erste Zeile dieser Gleichung, d.h.

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}).$$

Kapitel 2:

Analysis in mehreren Veränderlichen

2.1 Motivation



f(x,y)
y
x

2.2 Konvergenz und Mengen in $\mathbb{R}^n$

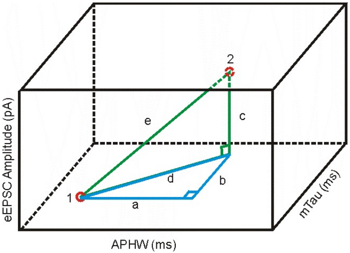
Definition 2.1 *Der **Abstand** zweier Punkte*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

wird definiert als

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

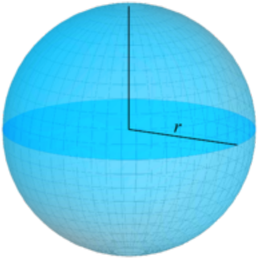
Bemerkung *Satz des Pythagoras in $\mathbb{R}^n$.*



Definition 2.2 *Gegeben $z \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$, dann heißt*

$$B_r(z) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,z) \le r\} \subset \mathbb{R}^n$$

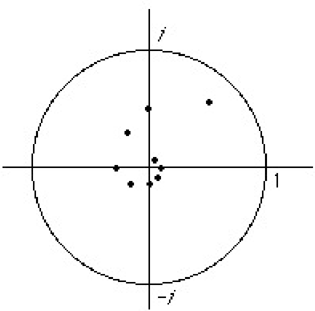
der **abgeschlossene Ball um** z **mit Radius** r.



Definition 2.3 *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von Punkten in* $\mathbb{R}^n$ **konvergiert gegen den Grenzwert** $z \in \mathbb{R}^n$, *falls*

für jedes $\epsilon > 0$

$$x_k \in B_\epsilon(z) \text{ für schließlich alle } k\ .$$



Satz 2.1 *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von Punkten in* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert gegen den Grenzwert* $z \in \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn jede der Koordinatenfolgen konvergiert, d.h.*

für alle $j = 1 \cdots, n$

$$x_k^j \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} z^j.$$

Bemerkung *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von Punkten in* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann gegen einen gewissen Grenzwert, wenn sie eine* **Fundamentalfolge** *ist, d.h. wenn*

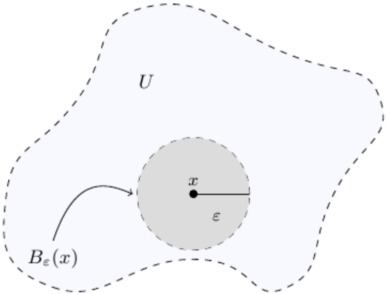
für jedes $\epsilon > 0$ *gilt*

$$d(x_k, x_l) \leq \epsilon \text{ für schließlich alle } k, l.$$

Definition 2.4 *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **offen**, *falls für jedes $z \in U$ gilt, dass*

$$B_\epsilon(z) \subset U$$

für hinreichend kleines $\epsilon > 0$.



Bemerkung

- *Der Durchschnitt $U \cap V$ zweier offener Mengen ist offen.*
- *Die Vereinigung $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

Definition 2.5 *Gegeben $M \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt $z \in D$ ein* **innerer Punkt** *von M, falls*
ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$B_\epsilon(z) \subset M.$$

Definition 2.6 *Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt*

$$\mathring{M} := \{z \in M \,|\, z \text{ ist innerer Punkt von } M\} \subset M$$

das **Innere von** M .

Satz 2.2

- M *ist offen.*
- M *ist offen genau dann, wenn* $\mathring{M} = M$.

Definition 2.7 *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **abgeschlossen**, *falls die Komplementärmenge*

$$\mathbb{R}^n \setminus A \text{ offen.}$$

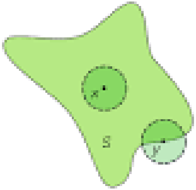
Bsp. 2.1

- $B_r(z)$ *abgeschlossen.*
- $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen.*
- $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots]a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n$ *offen.*
- $]a_1, b_1[\times[a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^n$ *weder offen noch abgeschlossen.*
- $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ *offen und abgeschlossen.*

Definition 2.8 *Ein Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ ist ein* **Randpunkt** *einer Menge M wenn für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$*

$$B_\epsilon(z) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(z) \cap M^c \neq \emptyset,$$

wobei $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$.



Definition 2.9 *Der* **Rand einer Menge** *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist*

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}.$$

Satz 2.3 *Eine Menge A ist abgeschlossen genau dann, wenn*

$$\partial A \subset A.$$

Definition 2.10 *Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt*

$$\overline{M} := M \cup \partial M$$

der **Abschluss von M**.

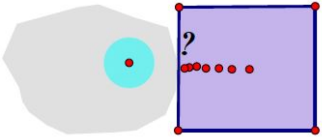
Satz 2.4

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann wenn für jede Folge

$$x_k \in A \text{ für alle } k \text{ und } x_k \longrightarrow z$$

gilt, dass

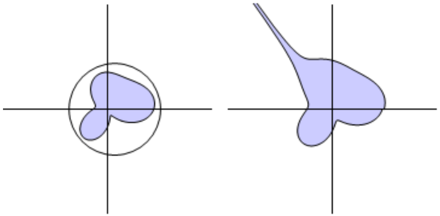
$$z \in A.$$



Definition 2.11

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, *wenn für ein hinreichend großes $R > 0$*

$$M \subset B_R(0).$$



Definition 2.12 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **kompakt**, *wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Satz 2.5 (Heine-Borel) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn jede Folge von Punkten in M hat eine in M konvergente Teilfolge*[2].

[2] Eine Teilfolge entsteht als Folge aus einer Ausgangsfolge durch Auslassung von Elementen derselben.

2.3 Stetige Funktionen

Definition 2.13 *Für $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Abbildung*

$$f : D \mapsto \mathbb{R}.$$

eine **Funktion**. *D heißt* **Definitionsbereich** *von f.*

Definition 2.14 *Für eine Funktion*

$$f : D \mapsto \mathbb{R}$$

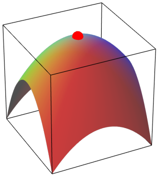
heißt $z \in D$ **Maximalstelle von** f **auf** D, *falls*

$$f(x) \leq f(z) \text{ für alle } x \in D.$$

Der Zahlwert

$$M := f(z)$$

heißt dann **Maximum von** f **auf** D**.**



Bemerkung *Analog für* **Minimalstelle** *bzw.* **Minumum** *von f auf D.*

Bemerkung *Falls $f : D \mapsto \mathbb{R}$ eine Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) hat, so sagt man,*

f nimmt auf D das Maximum (bzw. Minimum) an.

Definition 2.15 *Sei* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *und* $z \in D$*, dann heißt* f **stetig im Punkt** z*, falls für alle Folgen* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$x_k \in D \text{ für alle } k \text{ und } x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} z$$

gilt, dass

$$f(x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(z).$$

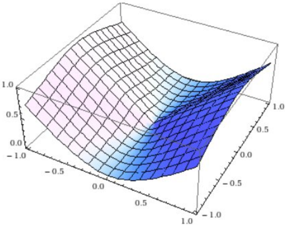
Bsp. 2.2

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = \vec{0} \end{cases}$$

ist stetig im Punkt $\vec{0} = (0,0)$, *denn*

$$|f(x_k,y_k) - 0| \leq \frac{y_k^2}{\sqrt{y_k^2}} = |y_k| \longrightarrow 0 \text{ falls } (x_k,y_k) \to 0.$$



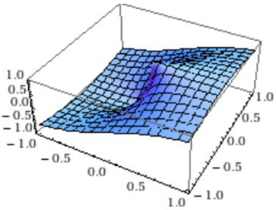
Bsp. 2.3

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = \vec{0} \end{cases}$$

ist nicht stetig im Punkt $\vec{0} = (0,0)$, *denn für*

$$f(0,\frac{1}{k}) = 1 \not\longrightarrow 0.$$



Definition 2.16 *Die Funktion* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *heißt* **stetig auf** $E \subset D$, *falls*

$$f \text{ stetig in allen } z \in E.$$

Bemerkung *Falls* $E = D$ *so sagt man* f **ist stetig auf** D.

Satz 2.6 *Falls $f_1, \cdots, f_l : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig in $z \in D$ und $h : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die* **Komposition**

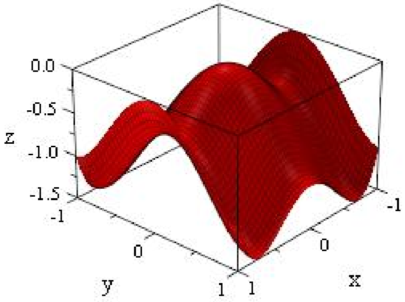
$$F : D \mapsto \mathbb{R}$$

$$F(x) := F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_l(x))$$

stetig in $z \in D$.

Bsp. 2.4 $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $F(x, y) = \sin(x \cdot y)$ *ist stetig.*

Satz 2.7 (Min/Max) *Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf D sein Maximum und Minimum an.*



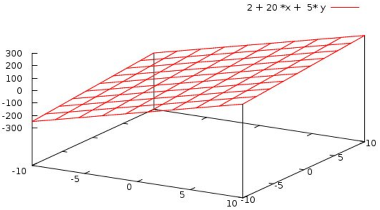
2.4 Differenzierbarkeit in mehreren Variablen

Definition 2.17 *Eine Funktion* $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$,

$$g(x) = c + m \bullet x$$

mit $m \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ *heißt* **affin lineare Funktion**.

Bemerkung *Der Graph einer affin-linearen Funktion ist eine verschobene Ursprungsebene in* $\mathbb{R}^{n+1}$. *(Verallgemeinerung einer linearen Funktion in einer Variablen.)*



Definition 2.18 *Es sei* $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ *und* $z \in D$ *ein innerer Punkt von* D. *Dann heißt* f **(total) differenzierbar im Punkt** z, *falls eine affin-lineare ('Tangential'-)Funktion*

$$\tau_z : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

und eine stetige Funktion

$$r : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } r(0) = 0$$

existieren, so dass für alle $x \in D$

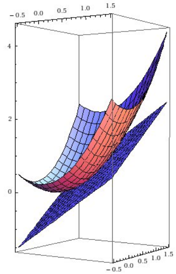
$$|f(x) - \tau_z(x)| \leq d(x, z) \cdot r(d(x, z)).$$

Bsp. 2.5

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\tau_z(x,y) = -\frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Bsp. 2.6 *(Forts.) Mit der Schreibweise* $\vec{x} = \binom{x}{y}$, $\vec{z} = \binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
|f(\vec{x}) - \tau_z(\vec{x})| &= |x^2 + y^2 + \frac{1}{2} - x - y| \\
&= |(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= d(\vec{x}, \vec{z})^2 \\
&= d(\vec{x}, \vec{z}) \cdot r(d(\vec{x}, \vec{z})),
\end{aligned}$$

wobei hier

$$r : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, r(t) = t.$$

Bemerkung

- *Die (totale) Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ in einem Punkt $z \in D$ bedeutet, dass man in der Umgebung von z die Funktion f durch eine affin-lineare Funktion g approximieren kann, wobei* **der Fehler in den Funktionswerten**

$$|f(x) - g(x)|$$

schneller als linear *mit dem Abstand zum Berührpunkt*

$$d(x, z)$$

abnimmt.

- *Insbesondere ist eine in $z \in D$ differenzierbare Funktion $f : D \mapsto R$* **automatisch an dieser Stelle auch stetig**.

Definition 2.19 *Sei* $f : R^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ *und* $z \in D$ *ein innerer Punkt. Sei* $k \in \{1, \cdots, n\}$*, dann heißt*

f **im Punkt z in Richung** k **partiell differenzierbar**

falls die Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(z + t \cdot e_k) \in \mathbb{R}$$

differenzierbar in $t = 0$ *ist. Die Zahl*

$$\boxed{\frac{d}{dt}_{|t=0} f(z + t \cdot e_k) =: \frac{\partial}{\partial x_k} f(z)}$$

heißt **partielle Ableitung in Richtung** e_k **von** f **im Punkt** z.

Bemerkung $e_k \hat{=}$ *k-ter Euklidischer Einheitsvektor.*

Bemerkung

- *Alternative Schreibweise*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \partial_{x_k} f$$

- *Die partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ *entsteht aus* f *durch Festhalten aller Koordinaten* $x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ *und Ableiten der Funktion*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto h(t) := f(x_1, \cdots, x_{k_1}, t, x_{k+1}, \cdots, x_n),$$

nach dem Parameter t *an der Stelle* $t = x_k$*, d.h.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_n) = h'(t)_{|t=x_k}.$$

Bsp. 2.7

$$f(x,y) = x^2 e^{3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y) = 2xe^{3y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y) = x^2 3e^{3y}.$$

Bsp. 2.8

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sin(xye^{xz}) \\ \partial_x f(x,y,z) &= \cos(xye^{xz}) \cdot [ye^{xz} + xyze^{xz}], \\ \partial_y f(x,y,z) &= \cos(xye^{xz}) \cdot xe^{xz}, \\ \partial_z f(x,y,z) &= \cos(xye^{xz}) \cdot x^2 e^{xz}. \end{aligned}$$

Bemerkung

- *Die partiellen Ableitungen sind erneut Funktionen in n Variablen.*
- *In der Ökonomie heißen die partiellen Abeitungen einer Funktion auch* **Elastizitäten**.

Definition 2.20 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion und $z \in D$ ein innerer Punkt von D. Falls alle partiellen Ableitungen von f im Punkt z existieren so heißt f* **partiell differenzierbar.**

Bsp. 2.9

$$f(x, y) = x^2 \cdot |y|$$

nicht partiell differenzierbar im Punkt $(1, 0)$,
partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$.

Definition 2.21 *Falls $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt z partiell differenzierbar, so heißt der Vektor*

$$\nabla f(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(z) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient von f an der Stelle** z.

Bsp. 2.10 *(Forts.)*

$$f(x,y) = x^2 e^{3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y) = 2xe^{3y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,y) = x^2 3e^{3y}.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{3y} \\ x^2 3e^{3y} \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Man könnte* $\nabla f(z)$ *auch als den* **Elastizitätsvektor von** f **an der Stellle** z *bezeichnen.*

Satz 2.8 *Falls $f : D \mapsto \mathbb{R}$ (total) differenzierbar in $z \in D$,*

dann ist f auch partiell differenzierbar in z

und die **Tangentialfunktion zu f in** *z ist gegeben durch*

$$\tau_z(x) = c + m \bullet x$$

mit

$$m = \nabla f(z)$$

sowie

$$c = f(z) - \nabla f(z) \bullet z.$$

Satz 2.9 *Es sei* $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $z \in D$ *ein innerer Punkt von* D.

Falls f *in einer Umgebung*[3] *von* z *partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen an der Stelle* z *stetig sind,*

so ist f *im Punkt* z *(total) differenzierbar.*

Bemerkung **'Hinreichendes Kriterium für (totale) Differenzierbarkeit'**.

[3] d.h. in allen Punkten $x \in B_\epsilon(z)$ mit einem geeignet gewählten $\epsilon > 0$

Bemerkung *Falls f differenzierbar im Punkt x ist, so heißt die Matrix*

$$df(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \;\; \cdots \;\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

heißt **Differential** *oder* **totale Ableitung von f im Punkt x.**

Bsp. 2.11 *(Forts.)*

$$f(x, y) = x^2 e^{3y}$$

f differenzierbar in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *mit*

$$g(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) = 2xe^{3y}, \quad h(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y) = x^2 3e^{3y}.$$

g und h sind stetig in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

$\rightsquigarrow$ *f differenzierbar in allen Punkten* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

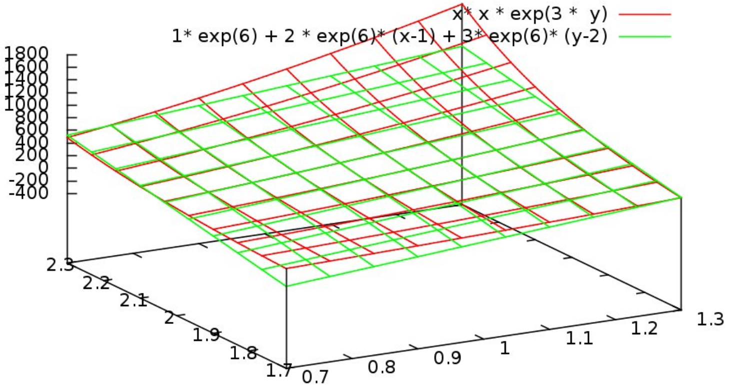
Also z .B. in $z = (1, 2)$

$$\nabla f(z) = \begin{pmatrix} 2e^6 \\ 3e^6 \end{pmatrix}, \quad f(z) = e^6.$$

Tangentialfunktion zu f im Punkt z

$$\tau_z(x) = 4e^6 + \begin{pmatrix} 2e^6 \\ 3e^6 \end{pmatrix} \bullet (x - z).$$

Bsp. 2.12 *(Forts.)*



Bsp. 2.13 $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textit{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Partielle Ableitungen in $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

und in $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Analog für $\frac{\partial f}{\partial y} \rightsquigarrow f$ *in allen* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *partiell differenzierbar.*

Bsp. 2.14 *(Forts.) Partielle Ableitungen nicht stetig in* $(x, y) = (0, 0)$*, denn z.B. für* $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \longrightarrow (0, 0)$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = \lim_k \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{k})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{k})^2}{2(\frac{1}{k})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

$\rightsquigarrow$ *Hinreichendes Kriterium für (totale) Differenzierbarkeit nicht anwendbar.*

Bsp. 2.15 *(Forts.) In der Tat ist f in $(0,0)$ nicht (total) differenzierbar, denn andernfalls wäre*

$$\begin{aligned}\tau_0(x) &= (f(0) - \nabla f(0) \bullet 0) - \nabla f(0) \bullet x \\ &= 0 + \vec{0} \bullet x = 0\end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Tangentialfunktion.

Für $x = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt aber

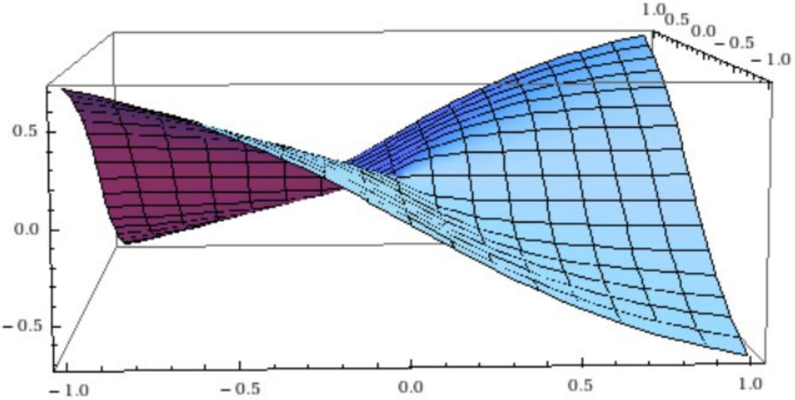
$$|f(x) - \tau_0(x)| = |\frac{1}{k} - 0| = d(0,x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h.

$$\frac{|f(x) - \tau_0(x)|}{d(x,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0.$$

Insbesondere existiert keine Tangentialebene zum Graphen von f an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.

Bsp. 2.16 *(Forts.)*



'Knick' des Funktionsgraphen an der Stelle $(0, 0) \rightsquigarrow$ *keine Tangentialebene an dieser Stelle.*

2.5 Gradient

Definition 2.22 *Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$, $x \in D$ ein innerer Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$, dann heißt f* **differenzierbar in Richtung** v *im Punkt x, falls*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x + t \cdot v) \in \mathbb{R}$$

differenzierbar in $t = 0$ ist. In dem Fall heißt

$$\partial_v f(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(x + t \cdot v).$$

Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung *Verallgemeinerung der partiellen Ableitung, wenn $v = e_k$.*

Bsp. 2.17

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$
$$(x,y) = (2,3)$$
$$v = (4,5)$$

$$\partial_v f(2,3) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \left\{(2 + t \cdot 4)^2 + (3 + t \cdot 5)^3\right\}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 151.$$

Satz 2.10 *Falls $f : D \mapsto \mathbb{R}$ (total) differenzierbar im inneren Punkt $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\partial_v f(x) = \nabla f(x) \bullet v.$$

Bsp. 2.18

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$(x,y) = (2,3)$$

$$v = (4,5)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 27 \end{pmatrix}$$

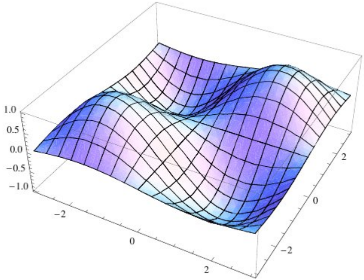
$$\nabla f(2,3) \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 27 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + 27 \cdot 5 = 151.$$

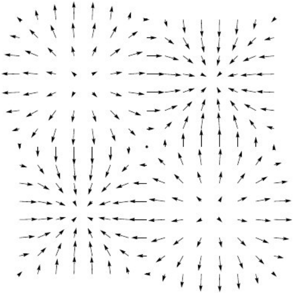
Bemerkung

- *Der Gradient $\nabla f(x)$ gibt die* **Richtung des stärksten Anstiegs von** *f an, d.h.*
$$\partial_v f(x)$$
ist maximal unter allen v mit $\|v\| = 1$ genau dann, wenn
$$v := \frac{1}{\|\nabla f(x)\|} \nabla f(x).$$
- *Die Länge des Gradienten*
$$\|\nabla f(x)\|$$
ist ein **Maß für die Stärke des Anstiegs** *von f im Punktes x.*

Bsp. 2.19

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y), \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$





Bemerkung *Für die Änderungen einer Funktion gilt näherungsweise*

$$f(x+v) \approx f(x) + \nabla f(x) \bullet v.$$

Bsp. 2.20 *Absatz eines Produktes als Funktion von Preis und pro Kopf-BIP*

$$f(x,y) = x^{-\frac{1}{2}} \frac{y}{1+y}$$

$$f(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \frac{y}{1+y} \\ x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+y)^2} \end{pmatrix}_{|(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

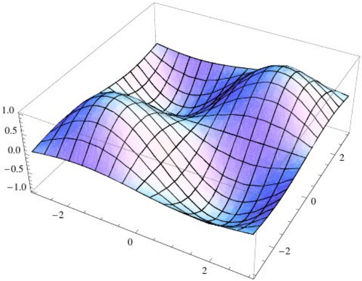
$$\Rightarrow f(1.1, 1.2) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{21}{40}.$$

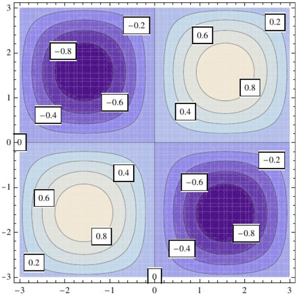
Definition 2.23 *Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die* **Niveaumenge von f zum Niveau c** *gegeben durch*

$$N_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

Bsp. 2.21

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

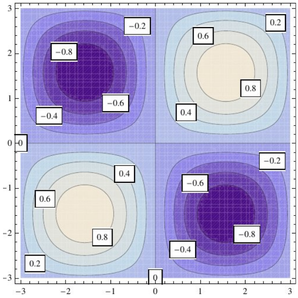


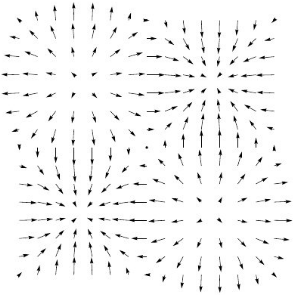


Satz 2.11 *Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ steht der Gradient stets senkrecht auf den Niveaumengen von f.*

Bsp. 2.22

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$





2.6 Vektorwertige Funktionen in mehreren Variablen

Definition 2.24 *Eine Abbildung* $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^m(x) \end{pmatrix}$$

heißt **stetig** *bzw. partiell/total* **differenzierbar** *im Punkt* $x \in D$*, falls jede der* **Komponentenfunktionen**

$$f^1, \cdots, f^m : D \mapsto \mathbb{R}$$

stetig bzw. partiell/total differenzierbar in $x \in D$ *ist.*

Bsp. 2.23

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x, y) \\ x^2 e^y \\ x^2 + y^3 \end{pmatrix}$$

Definition 2.25 *Falls $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in D$, dann heißt*

$$df(x) = \begin{pmatrix} df^1(x) \\ df^2(x) \\ \vdots \\ df^m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

die **totale Ableitung** *bzw.* **Differential** *bzw.* **Jacobi-Matrix** *von f im Punkt $x \in D$.*

Bsp. 2.24 *(Forts.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x \cdot y) \\ x^2 e^y \\ x^2 + y^3 \end{pmatrix}.$$

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 2xe^y & x^2 e^y \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Bsp. 2.25

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = A \bullet x, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$df(x) = A.$$

Satz 2.12 *Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar im inneren Punkt $x \in D$ mit Differntial $df(x)$ genau dann,*

wenn eine stetige Funktion

$$r : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } r(0) = 0$$

existiert, so dass für alle hinreichend kleinen $v \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x+v) - f(x) - df(x) \bullet v\|}{\|v\|} \leq r(\|v\|).$$

Satz 2.13 (Kettenregel) *Falls* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ *differenzierbar in* $y = f(x)$ *ist,*

so ist

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$$

differenzierbar in x *und es gilt*

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \bullet df(x) \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

Bsp. 2.26

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ \cos(xy) \\ \ln(x-y) \end{pmatrix}, \quad g(u,v,w) = \begin{pmatrix} (u^2+v^2)e^w \\ (u+v)w \end{pmatrix}$$

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ \frac{1}{x-y} & -\frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

$$dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2ue^w & 2ve^w & (u^2+v^2)e^w \\ w & w & u+v \end{pmatrix}$$

Bsp. 2.27 *(Forts.)*

$$dg(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 2\sin(xy)(x-y) & 2\cos(xy)(x-y) & (x-y) \\ \ln(x-y) & \ln(x-y) & \sin(xy)+\cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$dg(f(x,y)) \bullet df(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin(xy)(x-y) & 2\cos(xy)(x-y) & (x-y) \\ \ln(x-y) & \ln(x-y) & \sin(xy)+\cos(xy) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ \frac{1}{x-y} & -\frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y\ln(x-y)(\cos(xy)-\sin(xy)) + \frac{\sin(xy)+\cos(xy)}{x-y} & x\ln(x-y)(\cos(xy)-\sin(xy)) - \frac{\sin(xy)+\cos(xy)}{x-y} \end{pmatrix}$$

Bsp. 2.28 *(Forts.)*

$$(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ (\sin(xy)+\cos(xy))\ln(x-y) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$d(g \circ f)(x,y) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y\ln(x-y)(\cos(xy)-\sin(xy)) + \frac{\sin(xy)+\cos(xy)}{x-y} & x\ln(x-y)(\cos(xy)-\sin(xy)) - \frac{\sin(xy)+\cos(xy)}{x-y} \end{pmatrix}$$

$$= dg(f(x,y)) \bullet df(x,y). \ \surd$$

2.7 Lokale Extremstellen und Taylorpolynom

Definition 2.26 *Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$. Dann heißt $x \in D$ eine* **lokale Maximalstelle von f**,

falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(y) \leq f(x) \quad \text{für alle } y \in B_\epsilon(x) \cap D.$$

Bemerkung *Analog für* **lokale Minimalstelle**.

Bemerkung

- *Man kann noch zwischen* **strikten/starken** *und* **schwachen** *lokalen Minima bzw. Maxima unterscheiden, je nachdem ob sogar* $<$ *statt nur* $\leq$ *für alle* $y \neq x$ *in der Nähe von* x *gilt.*

Satz 2.14 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ partiell differenzierbar im inneren Punkt $x \in D$. Falls x eine lokale Maximal- bzw. lokale Minimalstelle von f ist, so gilt*

$$\nabla f(x) = 0.$$

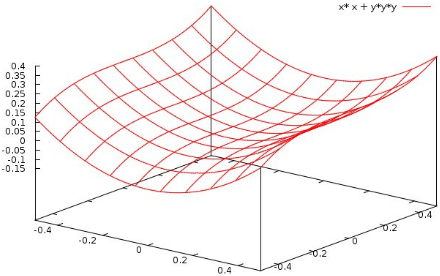
Bemerkung **Notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen**.

Bsp. 2.29

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$



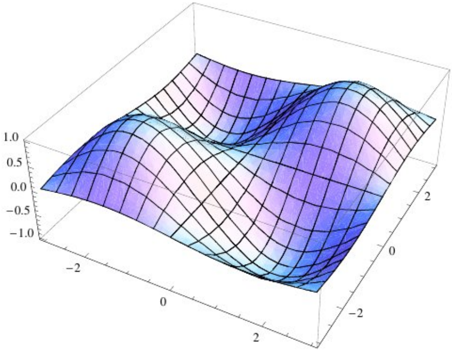
Bemerkung *Der Punkt* $(0,0)$ *ist hier keine lokale Extremstelle!*

Definition 2.27 *Es sei $f : D \mapsto \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $\mathring{D}$.*

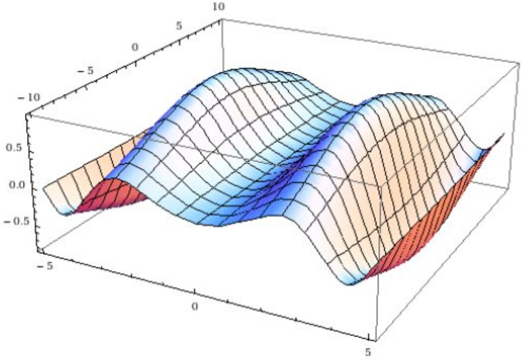
- *$x \in \mathring{D}$ heißt* **kritischer Punkt von** *f, falls*

$$\nabla f(x) = 0.$$

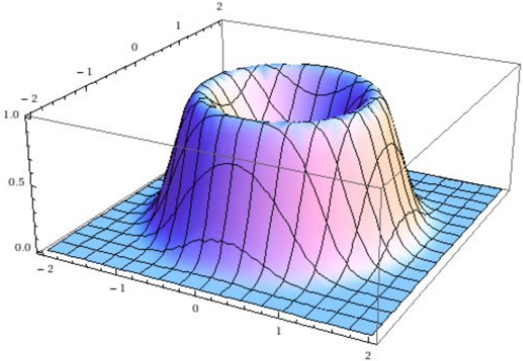
- *Ein kritischer Punkt, in welchem f kein lokales Extremum hat, heißt* **Sattelpunkt**.



Unendlich viele lokale strikte Minima und Maxima, unendlich viele Sattelstellen.



Zwei globale Maximalstellen, unendlich viele lokale Maximal- und Minimalstellen, eine Sattelstelle



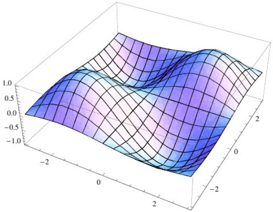
Unendlich viele globale Maximalstellen, eine strikte lokale Minimalstelle, unendlich viele globale Minimalstellen

Bsp. 2.30

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ y = (2l+1)\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \; oder \; \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi \\ y = l\pi \end{array} \right\}, k, l \in \mathbb{Z}.$$



Definition 2.28 *$f : D \mapsto R$ heißt* **zweimal partiell differenzierbar**, *falls für alle $k \in \{1, \cdots, n\}$*

$$\partial_k f \text{ partiell differenzierbar.}$$

Bemerkung *Notation*

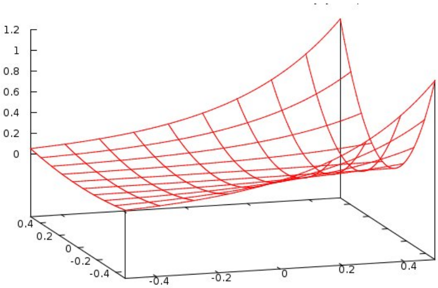
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f\right).$$

bzw.

$$\partial_j \partial_k f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} =: \partial_{jk} f.$$

Bsp. 2.31

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= e^{3x} y^2 \\
\partial_x f &= 3y^2 e^{3x} \\
\partial_{yx} f &= 6y e^{3x}.
\end{aligned}
$$



Definition 2.29 *Falls f zweimal differenzierbar in $x \in D \subset D$, dann heißt*

$$Hess\, f(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die **Hesse-Matrix** *zu f in x.*

Bemerkung *Notation gelegentlich auch*

$$\textit{Hess}\, f(x) =: \nabla^2 f(x).$$

bzw.

$$\textit{Hess}\, f(x) =: d\nabla f(x).$$

Bsp. 2.32

$$f(x,y) = e^{3x}y^2$$

$$\partial_{yx} f = 6ye^{3x} = \partial_{xy}$$

$$\partial_{xx} f = 9y^2 e^{3x}$$

$$\partial_{yy} f = 2e^{3x}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 9y^2 e^{3x} & 6ye^{3x} \\ 6ye^{3x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Definition 2.30 *f heißt* **zweimal stetig partiell differenzierbar**, *falls f zweimal partiell differenzierbar und für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*

$$\partial_{ij} f \text{ stetig.}$$

Satz 2.15 (Satz v. Schwarz) *Falls f zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*

$$\partial_{ij} f = \partial_{ji} f.$$

Bemerkung *Falls f zweimal stetig partiell differenzierbar ist die Hesse-Matrix damit insbesondere* **symmetrisch**[4], *d.h.*

für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$(Hess\, f(x))_{ij} = (Hess\, f(x))_{ji} \,.$$

[4] Quadratische Matrizen, die bezüglich der Spiegelung an der Hauptdiagonalen symmetrisch sind, nennt man symmetrisch.

Definition 2.31 *Sei f zweimal partiell differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$, dann heißt die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

$$v \mapsto H_f(x)(v, v) := v \bullet (Hess\, f(x) \bullet v)$$

die **Hesseform von f in** x.

Bsp. 2.33 *(Forts)*

$$f(x,y) = e^{3x}y^2$$

$$\mathit{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 9y^2e^{3x} & 6ye^{3x} \\ 6ye^{3x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

$$\mathit{Hess}\, f(0,1) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$H_f(0,1)\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = 9v_1^2 + 12v_1 \cdot v_2 + 2v_2^2.$$

Satz 2.16 (Taylor I) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar in einem inneren Punkt von $x \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t \cdot v \in D$ für alle $t \in [0, 1]$.*

Dann existiert ein $t \in [0, 1]$, so dass

$$f(x + v) = f(x) + \nabla f(x) \bullet v + \frac{1}{2} H_f(x + tv)(v, v).$$

Satz 2.17 (Taylor II) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar in einem inneren Punkt von $x \in D$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $x + v \in D$*

$$|f(x+v) - \left[f(x) + \nabla f(x) \bullet v + \frac{1}{2} H_f(x)(v,v)\right]| \leq r(\|v\|)$$

mit einer Fehlerfunktion $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t^2} = 0.$$

Bemerkung *Falls f zweimal stetig partiell differenzierbar, erhalten wir somit die* **Näherungsformel**

$$f(x+v) \approx f(x) + \nabla f(x) \bullet v + \frac{1}{2} H_f(x)(v,v),$$

wobei der Approximationsfehler schneller als quadratisch in der Länge der Verschiebung $\|v\|$ gegen Null strebt.

Bemerkung *Schreibt man x_0 statt x und $x - x_0$ statt v, liest sich die vorige Aussage als*

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet (x - x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x - x_0, x - x_0).$$

mit einem Approximationsfehler, der schneller als $\|x - x_0\|^2$ gegen Null strebt.

Definition 2.32 *Falls f in x_0 zweimal partiell differenzierbar, heißt die Funktion*

$$x \mapsto T^2_{f,x_0}(x) := f(x_0) + \nabla f(x_0) \bullet (x - x_0) + \frac{1}{2} H_f(x_0)(x - x_0, x - x_0)$$

das **Taylorpolynom zweiten Grades zu f mit Entwicklungspunkt x_0.**

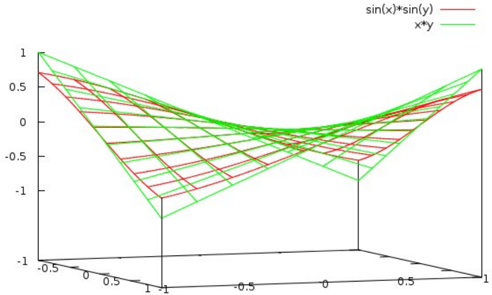
Bsp. 2.34

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y), \quad x = (0,0)$$

$$f(0,0) = 0, \quad \nabla f(0,0) = 0, \quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^2_{f,0}(x,y) = xy$$

$$f(x,y) \approx T^2_{f,0}(x,y) = xy \textit{ in der Nähe von } (0,0).$$



Definition 2.33 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt* **positiv definit**, *falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass*

$$x \bullet (A \bullet x) > 0$$

Bemerkung *Analog* **negativ definit** *mit "$<$" statt "$>$".*

Bsp. 2.35

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

- *pos. definit, falls* μ, $\lambda > 0$.
- *neg. definit, falls* $\mu < 0$ *und* $\lambda < 0$.
- *indefinit, falls* $\lambda \cdot \mu < 0$.

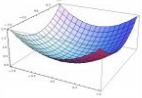
Bsp. 2.36 *(Forts.) Für jeden der drei Fälle*

- $\lambda = \mu = 1$
- $\lambda = \mu = -1$
- $\lambda = -\mu = 1$

betrachte die Funktion

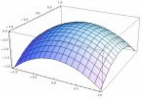
$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \left(A \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \lambda x^2 + \mu y^2$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pos. def.)



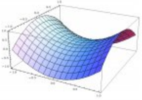
$\rightsquigarrow$ *Minimum*

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (neg. def.)



$\rightsquigarrow$ *Maximum*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (indef.)



$\rightsquigarrow$ *Sattel*

Bemerkung *Notation für* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A > 0 \text{ falls } A \text{ pos. definit}$$

bzw.

$$A < 0 \text{ falls } A \text{ neg. definit}$$

Bemerkung *Es sind noch die Fälle möglich, dass* $A \geq 0$ **(pos. semidefinit)**, *d.h. für alle* $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \bullet (A \bullet x) \geq 0,$$

bzw. analog $A \leq 0$ **(neg. semidefinit)** *sowie als letztes, dass A weder neg. noch pos. semidefinit ist. – In letzterem Fall nennt man A* **indefinit**.

Satz 2.18 *Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \mapsto \mathbb{R}$ in einer Umgebung des inneren Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar.*

- *Falls*
$$\nabla f(x) = 0 \text{ und } \nabla^2 f(x) > 0,$$
so hat f in x ein lokales Minimum.

- *Falls*
$$\nabla f(x) = 0 \text{ und } \nabla^2 f(x) < 0,$$
so hat f in x ein lokales Maximum.

- *Falls $\nabla f(x) = 0$ und*
$$H_f(x)(u,u) > 0 \text{ und } H_f(x)(v,v) < 0$$
für zwei $u, v \in \mathbb{R}^n$, so hat f in x eine Sattelstelle.

Bemerkung

- *Dieses* **hinreichende Kriterum für lokale Extrem- bzw. Sattelstellen** *ist also in den drei Fällen anwendbar, wenn* $\nabla^2 f(x)$ *positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.*
- *In den beiden anderen Fällen, wenn* A *bzw.* $-A$ *nur positiv semidefinit ist, kann man das Kriterium nicht anwenden und muss stattdessen zu höheren Ableitungen übergehen, analog zur Situation in einer Variablen (siehe letzes Semester).*

Lemma 2.1 *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt*

- $A > 0$ *genau dann, wenn* $\det(A) > 0$ *und* $A_{11} > 0$,
- $A < 0$ *genau dann, wenn* $\det(A) > 0$ *und* $A_{11} < 0$.
- A *indefinit genau dann, wenn* $\det(A) < 0$.

Bsp. 2.37 *(Forts.)* $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}.$$

Kritische Punkte von f

$$(x,y) = (2k+1, 2l+1)\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (\text{“Typ 1”})$$

bzw.

$$(x,y) = (k,l)\cdot\pi \qquad (\text{“Typ 2”})$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\nabla^2 f)(x,y) &= \sin^2(x)\sin^2(y) - \cos^2(x)\cos^2(x) \\ &= +1 \text{ falls } (x,y) \text{ kritisch, Typ 1} \\ &= -1 \text{ falls } (x,y) \text{ kritisch, Typ 2} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Die kritischen Punkte vom Typ 1 sind lokale Extremstellen, die kritschen Punkte vom Typ 2 sind Sattelstellen.

Bsp. 2.38 *(Forts.) Für die kritischen Punkte vom Typ 1*

$$(x, y) = (2k + 1, 2l + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

ist wegen

$$(\nabla^2 f)_{11}(x, y) = -\sin(x)\sin(y)$$

falls $k - n$ ungerade

$$(\nabla^2 f)_{11}(x, y) = +1 \qquad \rightsquigarrow \text{lokales Minimum,}$$

bzw. falls $k - n$ gerade

$$(\nabla^2 f)_{11}(x, y) = -1 \qquad \rightsquigarrow \text{lokales Maximum.}$$

2.8 Extrema unter Nebenbedingungen

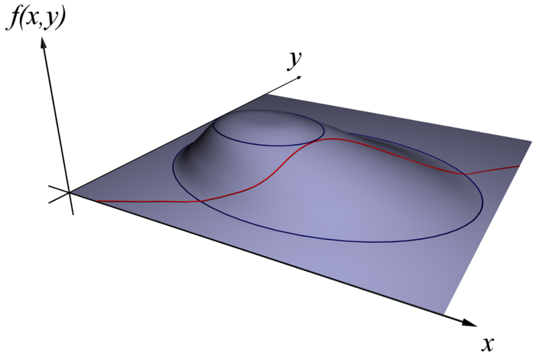
Definition 2.34 *Sei $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ gegeben, dann hat f in $x \in D$ ein* **Maximum auf D unter der Nebenbedingung $g = c$**,

falls

$$g(x) = c$$

und

$$f(y) \leq f(x) \text{ für alle } y \in D \text{ mit } g(y) = c.$$



Bemerkung *Notation*

$$D \in x \longrightarrow \max_{g(x)=c} f(x).$$

bzw. einfach

$$\max_{g=c} f.$$

Bsp. 2.39 *Nutzenfunktion für Konsumportfolios* $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$

$$f(x, y) = x^{0.3} \cdot y^{0.7}.$$

Kostenfunktion für Konsumportfolio $(x, y) \in \mathbb{R}$

$$g(x, y) = p_x \cdot x + p_y \cdot y.$$

Verfügbares Budget bei der Nutzenoptimierung $c \geq 0$*, d.h.*

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = c.$$

$\rightsquigarrow$ *Finde*

$$(x, y) \longrightarrow \max_{g(x,y)=c} f(x, y).$$

Definition 2.35 *Seien $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, dann heißt $x \in \mathring{D}$* **kritischer Punkt für das Problem** $\max\limits_{g=c} f$ *in D, falls*

$$g(x) = c$$

und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x).$$

Bemerkung *Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ oben heißt dann* **Lagrange-Multiplikator**.

Definition 2.36 *$x \in D$ mit $g(x) = c$ heißt* **lokale Lösung** *vom Problem $\max\limits_{g=c} f$, falls*

$$g(x) = c$$

und ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(y) \leq f(x) \text{ für alle } y \in B_\epsilon(x) \cap D \text{ mit } g(y) = c.$$

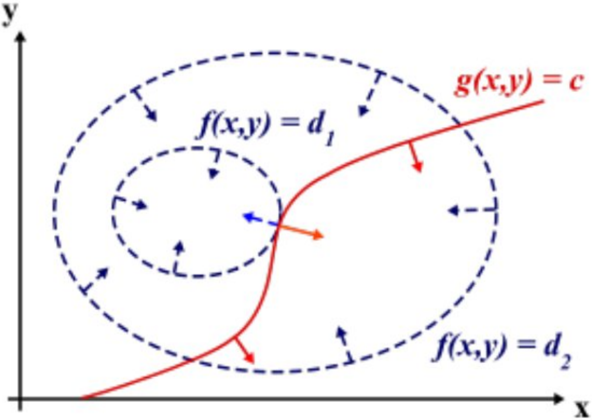
Satz 2.19 *Falls $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $\mathring{D}$. Dann ist jede lokale Lösung $x \in \mathring{D}$ für das Problem $\max\limits_{g=c} f$ ein kritischer Punkt, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x).$$

Bemerkung **Notwendiges Kriterum für lokale Extrema unter Nebenbedingung**.

Bemerkung *Veranschaulichung der* **'Lagrange-Bedingung'**

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad \nabla f(x) \overset{!}{=} \lambda \cdot \nabla g(x).$$



Bemerkung

- *Die Lagrange-Bedingung ist nur notwendig, aber nicht hinreichend. D.h. es muss dann mit weiteren Argumenten begründet werden, ob die gefundenen kritschen Punkte tatsächlich lokale oder sogar globale Minimal- oder Maximalstellen sind.*
- *Im Allgemeinen kann es mehrere oder gar unendlich viele kritische Punkte gemäß der Lagrange-Bedingung geben. In dem Fall muss man etwa durch direkten Vergleich der zugehörigen f-Funktionswerte auf den kritischen Punkten die globalen Maximalstellen bzw. Minimalstellen identifizieren.*
- *Aber auch im Fall, dass es nur eine kritische Stelle gemäß der Lagrange-Bedingung gibt, muss durch gesonderte Argumente gezeigt werden, ob es sich um eine Maximal-, Minimal oder Sattelstelle handelt.*

Bemerkung

- *Es muss auch stets der mögliche Fall* $\lambda = 0$ *behandelt werden. Insbesondere liefert das auch die möglichen kritischen Punkte im Inneren der Menge* $\{x|g(x) = c\} \cap D$ *sofern vorhanden.*
- *Schließlich liefert das Lagrange-Kriterium im Fall, wenn* $g = c = const.$ *das bereits bekannte Kriterium für lokale Extremstellen ohne Nebenbedingungung, d.h. dass*

$$\nabla f(x) \stackrel{!}{=} 0.$$

Bsp. 2.40 *(Forts.)*

$$f(x,y) = x^{0.3} \cdot y^{0.7},$$

$$g(x,y) = x + 2y \overset{!}{=} c := 100.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0.3 \cdot (\frac{y}{x})^{0.7} \\ 0.7 \cdot (\frac{x}{y})^{0.3} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \nabla g(x,y).$$

Entspricht den zwei Gleichungen für kritische Punkte

$$0.3 \cdot (\frac{y}{x})^{0.7} = \lambda,$$
$$0.7 \cdot (\frac{x}{y})^{0.3} = 2\lambda.$$

Der Fall $\lambda = 0$ *liefert keine Lösungen wegen* $x, y > 0$. *Für* $\lambda \neq 0$ *erhält man nach Division der ersten Gleichung durch die zweite*

$$\frac{3}{7} \cdot (\frac{y}{x})^{1.0} = \frac{3}{7} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{7}{6}.$$

Bsp. 2.41 *(Forts.) Somit*

$$y = \frac{7}{6} \cdot x$$

Einsetzen in die Budget-Bedingung

$$x + 2y = 100$$

ergibt

$$\frac{10}{3} \cdot x = 100$$

also

$$x = 30$$

und

$$y = \frac{7}{6} \cdot x = 35$$

Bsp. 2.42 *(Forts.) Somit gibt es nur eine kritische Stelle*

$$(x, y) = (30, 35)$$

auf der zulässigen Menge

$$\{(x, y) \,|\, g(x, y) = 100\} = \{g = 100\}.$$

Für die beiden Randpunkte $(0, 50)$ *bzw.* $(100, 0)$ *der zulässigen Portfolios gilt*

$$f(0, 50) = f(100, 0) = 0.$$

Da ferner $f > 0$ *überall sonst auf der Menge* $\{g = 100\}$ *muss die einzige kritische Stelle das einzige lokale und damit automatisch auch das globale Maximum von* f *auf* $\mathbb{R}^2_+ \cap \{g = 100\}$ *sein.*

$\rightsquigarrow$ *Das optimale Konsumportfolio unter der Budgetbedingung* $g = 100$ *ist*

$$(x, y) = (30, 35).$$

Bemerkung *Häufig werden Minimierungs- bzw. Maximierungsprobleme für eine Funktion f auf einer Menge aller Punkte*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \, g(x) \leq c\}$$

mit einer differenzierbaren Funktion g betrachtet. Dies kann auf den Bereits betrachten Fall einer Nebenbedingung der Form $\{\tilde{g} = 0\}$ zurückgeführt werden mit

$$\tilde{g}(x) := \max(0, g(x) - c),$$

d.h. in diesem Fall sind die Menge der kritischen Punkte gegeben durch die Bedingungen

$$g(x) < c \textit{ und } \nabla f(x) = 0$$

oder

$$g(x) = c \textit{ und es ex. } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ s.d. } \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$

Bsp. 2.43 *Wir betrachten die Aufgabe*

$$\min_{g \leq 1} f$$

mit

$$f(x,y) = 3x^2 + 5y^3, \quad g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Die Menge $\{g < 1\}$ *ist der offene Einheitskreis in* $\mathbb{R}^2$*. Die kritischen Punkte auf dieser Menge sind durch die Bedingung*

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 15y^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0,$$

d.h. $(0,0) \in \{g < 1\}$ *ist ein kritischer Punkt.*

Die Menge $\{g = 1\}$ *ist der Rand des Einheitskreises. Die kritischen Punkte hier genügen de Lagrange-Bedingung*

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 15y^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \nabla g = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Bsp. 2.44 *(Forts.) Aus*

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 15y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

und $\nabla f \neq 0$ *auf* $\{g = 1\}$ *folgt im Fall* $x \neq 0$*, dass* $\lambda = 1$ *sowie*

$$15y^2 = 2y,$$

d.h. die vier Fälle

$$y = 0, x = \pm 1$$

und

$$y = \frac{2}{15} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{221}{225}}.$$

Falls $x = 0$ *ist* $y = \pm 1$*, und die Lagrange-Bedingung ist erfüllt mit* $\lambda = \mp\frac{2}{15}$*, d.h. wir erhalten zwei weitere kritische Punkte*

$$x = 0, y = \pm 1.$$

Bsp. 2.45 *(Forts.)* $\rightsquigarrow$ *Sieben kritische Punkte für das Problem* $\min\limits_{g \le 1} f$,

$$(0,0), \quad (0,\pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (\pm\sqrt{\frac{221}{225}}, \frac{2}{15})$$

Die Funktion f *ist stetig auf der kompakten Menge* $\{g \le 1\}$, *daher nimmt sie hierauf Minumum und Maximum an, die zugehörigen Maximal- und Minimalstellen müssen unter den oben genannten kritischen Punkten sein. Die Funktionswerte von* f *auf diesen Punkten sind*

$$0, \quad 5, \quad -5, \quad 3, \quad 3, \quad \frac{1997}{675}, \quad \frac{1997}{675}.$$

Somit ist

$$\min_{g \le 1} f = -5,$$

und dieser Wert wird im Punkt $(0,-1)$ *angenommen.*

Bsp. 2.46 *(Forts.) Grafik*