Vorlesung Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Universität Leipzig, WS 15/16

Prof. Dr. Max v. Renesse
`renesse@uni-leipzig.de`

Dies ist der Foliensatz zur Vorlesung

Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

aus dem WS 2015/2016 an der Universität Leipzig. Inhalt sind gemäß Modulbeschreibung die typischen Grundlagen Logik, Mengenlehre und Folgengrenzwerte sowie im Anschluss Differential- und Integralrechnung in einer Variablen.

Zur Gewöhnung an die mathematische Methodik und zur Wiederholung der Elementarmathematik wird die Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ausführlich besprochen. In den späteren Abschnitten werden Aussagen meist nur skizzenartig begründet bzw. durch Beispiele veranschaulicht.

Kapitel 1:

Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Elementare Aussagenlogik

Definition 1.1 *Eine* **Aussage** *ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist. (Aristoteles)*

Bsp. 1.1

- *A: Dresden ist eine Stadt.*
- *B: Leipzig ist ein Dorf.*
- *C: Leipzig ist größer als Dresden.*
- *D: Leipzig ist eine Stadt.*
- *E: Nachts ist es kälter als draußen. (?)*

Verknüpfungen von Aussagen

Durch Verknüpfung können neue Aussagen gebildet werden.

Elementarverknüpfungen

Negation 'NICHT': $\neg A$.

Dresden ist nicht eine Stadt. (Dresden ist keine Stadt.)

Disjkunktion 'ODER': $A \vee B$.

Dresden ist eine Stadt oder Leipzig ist ein Dorf.

Konjunktion 'UND': $A \wedge B$

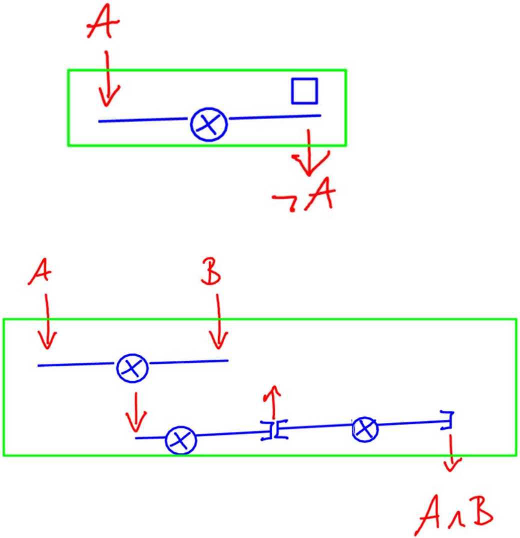
Dresden ist eine Stadt und Leipzig ist ein Dorf.

Formale Definition: *Wahrheitstabelle*

Definition 1.2 *Für zwei Aussagen U und V definiert man neue Aussagen $\neg U$, $U \vee V$ und $U \wedge V$ wie folgt.*

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$\neg$ U	F	F	W	W
U $\vee$ V	W	W	W	F
U $\wedge$ V	W	F	F	F

Beispiel: Logik in der Mechanik
NEG- und UND-Maschine



Äquivalenzverknüpfung

Definition 1.3 ('$\Leftrightarrow$')

Für zwei Aussagen U und V definiert man

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Leftrightarrow V$	W	F	F	W

Sprechweise

U ist **notwendig und hinreichend** *für V bzw.*
U ist **äquivalent** *zu V.*

Bsp. 1.2

- $A \Leftrightarrow \neg B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $\neg A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: F)*

Implikationsverknüpfung

Definition 1.4 ('$\Rightarrow$') *Für zwei Aussagen U und V definiert man*

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Rightarrow V$	W	F	W	W

Sprechweisen *U ist* **hinreichend** *für V bzw.*
U **impliziert** *V.*

Bsp. 1.3

- A $\Rightarrow \neg$ B. (Wahrheitswert: W)
- A $\Rightarrow$ B. (Wahrheitswert: F)
- B $\Rightarrow$ A. (Wahrheitswert: W)

Aussageformen und Tautologien

Aus **Aussagevariablen** enststehen durch Verknüpfung und Klammerbildung **Aussageformen** z.B.

$$\neg((U \wedge V) \Rightarrow \neg W).$$

Definition 1.5 *Aussageformen mit Wahrheitswert W (für beliebige Wahrheitswerte der Variablen) heißen* **Tautologien**.

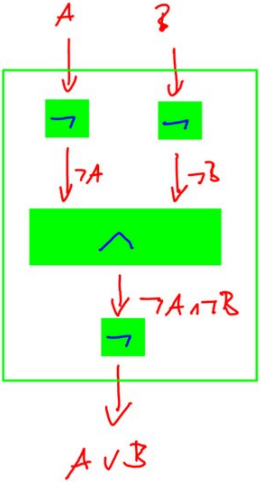
Bsp. 1.4

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \vee \neg A$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
6. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Bemerkung 5. & 6. heißen die **de Morgan'schen Regeln**.

Beispiel: de Morgan in der Mechanik. Eine ODER-Maschine

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$



Nachweis: Wahrheitstabelle

Beispiel 1

A	W	F
A $\Rightarrow$ A	W	W

Beispiel 2

A	W	F
$\neg A$	F	W
$A \vee \neg A$	W	W

Beispiel 4

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A \vee B$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	W	W	W	W

Logisches Schliessen

Bsp. 1.5 *Dresden ist eine Stadt und Leipzig größer als Dresden. Also ist Leipzig kein Dorf.*

Struktur

- Prämisse 1: A
- Prämisse 2: C
- Prämisse 3: A $\wedge$ C $\Rightarrow$ D
- Prämisse 4: D $\Rightarrow \neg B$
- Konklusion: $\neg B$.

A:	Dresden ist eine Stadt
B:	Leipzig ist ein Dorf
C:	Leipzig ist größer als Dresden
D:	Leipzig ist eine Stadt

Benutzt Tautologie $\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \wedge (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{D}) \wedge (\mathrm{D} \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$

Gültiges Schließen

Gegeben *Prämissen* $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$
(Aussageformen)

Folgerung *Konklusion* (C)
(Aussageform)

Schreibweise

$$(P_1), (P_2), \ldots, (P_n) \models (C)$$

Definition 1.6 *Ein Schluss heißt* ***gültig****, falls*

$$(P_1) \wedge (P_2) \wedge \cdots \wedge (P_n) \Rightarrow (C) \quad \textit{Tautologie}$$

Übung (Theodizee). Wenn es Supermann gibt und er ein guter Held ist, verhindert er alles Übel. Da es Übel in dieser Welt gibt, gibt es Supermann nicht, oder er ist kein guter Held.

1.2 Naive Mengenlehre

Naive Mengenlehre

Definition 1.7 *'Eine* **Menge** *ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.' (G. Cantor, 1845-1918)*

Schreibweisen

$a \in A$ 'a ist ein Element der Menge A'

$a \notin A$ 'a ist nicht ein Element der Menge A '

Beschreibung von Mengen

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (Aufzählung)

$A = \{a \mid a \text{ hat Eigenschaft } \alpha\}$ (Eigenschaft)

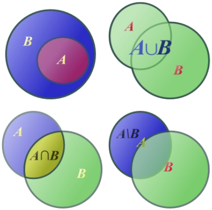
Bsp. 1.6

- M = *Teilnehmer des Tutoriums* = $\{$*Anna, Hans, ...* $\}$
- $G = \{z \mid$ *z ist ein Vielfaches der Zahl* $7\}$
- $X = \{x \mid x = x\}$ *(All-Menge)*
- $\emptyset := \{x \in X \mid x \neq x\}$ *(Leere Menge)*

Mengenalgebra - Grundoperationen

Definition 1.8

Teilmenge	$A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Gleichheit	$A = B :\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
Vereinigung	$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt	$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Komplement	$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subset A\}$



(Bel. Erweiterbar durch Verschachtelung)

Rechnen mit Mengen - Beispiele

$\emptyset \subset A$ für jede Menge A

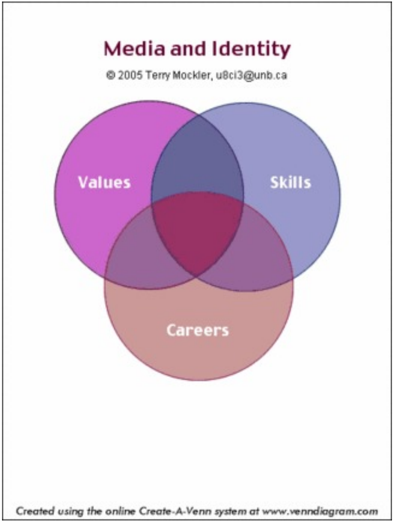
1. Distributivgesetz $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. De Morgan'sche Regel $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis:
$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A.$
Beweis:
$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
Beweis:
$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$

Übung: Anwendung von de Morgan
A = Weinliebhaber, B = Biertrinker, C = Milchbubis

Mengenlehre und HR Management ...



Cartesisches Produkt und Relationen

Definition 1.9 *Das* **Cartesische Produkt** *zweier Mengen* A *und* B *ist die Menge*

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

Bsp. 1.7 *Studenten* $\times$ *Dozenten* $=:$ *Uni*

Definition 1.10 *Eine* **Relation von** A **auf** B *ist eine Teilmenge* $R \subset A \times B$.

Bsp. 1.8 $R = \{(S, D) \in \mathit{Uni} \,|\, S \text{ hört Vorlesung bei } D\}$

Definition 1.11 *Eine Relation* $R \subset A \times A$ *heißt*

- **symmetrisch**, *falls* $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$,
- **transitiv**, *falls* $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- **reflexiv**, *falls* $(a, a) \in R$ *für alle* $a \in A$.

Bsp. 1.9 $R = \{(s, s') \in \mathit{Studenten} \times \mathit{Studenten} \,|\, s \text{ ist verliebt in } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \,|\, s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \,|\, s \text{ hat (echt) größere Füße als } s'\}$

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Definition 1.12 *Eine symmetrische, transitive und reflexive Relation auf einer Menge A heißt* **Äquivalenzrelation**.

Bsp. 1.10 $R = \{(s, s') \in S \times S \mid s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$

Definition 1.13 *Eine* **Klasseneinteilung** *einer Menge A ist eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen, d.h. $\mathcal{Z} = \{A_i, i \in I\}$, $A_i \subset A$, so dass*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ wobei } A_i = A_j \text{ falls } A_i \cap A_j \neq \emptyset.$$

Bsp. 1.11 $S = \bigcup S_i$, S_i = *Studenten mit Schuhgröße i.*

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Satz 1.1 *Für eine Äquivalenzrelation R auf A bilden die Mengen $A_i = \{a \in A \,|\, (a,i) \in R\}$, $i \in A$ eine Klasseneinteilung.*

Bew: *1) $i \in A_i$ (Refl.) $\Rightarrow \bigcup_{i\in A} A_i = A$.*
2) Falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$,
dann ex. $a \in A$: $(a,i) \in R$ und $(a,j) \in R$
$\Rightarrow (j,a) \in R$ (Symm.)
$\Rightarrow (j,i) \in R$ (Trans.)
$\Rightarrow A_j \subset A_i$, denn falls $(a',j) \in R \Rightarrow (a',i) \in R$ (Trans.)
Analog folgt $A_i \subset A_j$,
d.h. $A_i = A_j$, falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Definition 1.14 *A_i ist eine* **Äquivalenzklasse**, *i ist ein* **Repräsentant** *der Klasse A_i.*

Bsp. 1.12 *Hans (mit Schuhgröße 42) ist ein Repräsentant der Klasse aller Studierenden mit Schuhgröße 42.*

Nachtrag – Prädikate und Quantoren

Definition 1.15 *Ein* **Prädikat** *auf einer Menge A ist eine Aussageform mit den Mengenelementen als Variablen.*

Bsp. 1.13 *$S \widehat{=}$ Menge der Studenten, $P(s) :\Leftrightarrow s$ kommt aus Sachsen.*

Definition 1.16 (Quantoren) *Der* **All-Quantor**, *bzw.* **Existenz-Quantor** *für ein Prädikat P auf einer Menge S definiert eine Aussage gemäß*

$$\underset{s\in S}{\forall} P(s) :\Leftrightarrow \big(P(s_1) \wedge P(s_2) \wedge P(s_3) \dots\big)$$

$$\underset{s\in S}{\exists} P(s) :\Leftrightarrow \big(P(s_1) \vee P(s_2) \vee P(s_3) \dots\big).$$

Bsp. 1.14 *Alle Studenten kommen aus Sachsen:* $\underset{s\in S}{\forall} P(s)$

Bsp. 1.15 *Es existiert mindestens ein Student aus Sachsen:* $\underset{s\in S}{\exists} P(s)$

1.3 Zahlen

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.' L. Kronecker (1823-91).

Definition 1.17 *Die Menge der* **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *ensteht durch sukzessives Hinzufügen ('Addition') von '1'.*

Bemerkung $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$

Zulässige Operationen

Addition $m + n = m + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (n Mal)

Multiplikation $m \cdot n = m + m + m + \cdots + m$ (n Mal)

Vergleich $m \geq n \Leftrightarrow$ (es ex. ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $m = n + l$)

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Subtraktion in $\mathbb{N}_0$ wird definiert via $(m - n = l) :\Leftrightarrow (m = n + l)$, falls $m \geq n$

Definition 1.18 *Die* **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ *wird definiert durch*

1. $[z] \in \mathbb{Z} :\Leftrightarrow$ *(es ex.* $m, n \in \mathbb{N}$ *so dass [z]=[m-n])*
2. $[m_1 - n_1] = [m_2 - n_2] :\Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.

Bsp. 1.16 $[2 - 5] = [1 - 4] = [97 - 100] = [0 - 3] = [-3]$

Zulässige Operationen auf der Menge $\mathbb{Z}$

Definition 1.19

Addition $[m_1 - n_1] + [m_2 - n_2] := [(m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)]$,

Multiplikation $[m_1 - n_1] * [m_2 - n_2] := [(m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + m_2 n_1)]$

Vergleich $[m_1 - n_1] > [m_2 - n_2] :\Leftrightarrow m_1 + n_2 > m_2 + n_1$

Subtraktion $[m_1 - n_1] - [m_2 - n_2] := [(m_1 + n_2) - (n_1 + m_2)]$

Bemerkungen

- Schreibweise: $[0 - n] = -n$, $[m - 0] = m$
- $(-1)*(-1) = [0-1]*[0-1] = [(0\cdot 0+1\cdot 1)-(0\cdot 1+1\cdot 0)] = [1-0] = 1.$
- $n \in \mathbb{N}_0 \mapsto [n - 0] \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Division in $\mathbb{Z}$ wird definiert via $(p : r = q) \Leftrightarrow (p = q * r)$, falls r Teiler von p

Definition 1.20 *Die* **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ *wird definiert durch*

- $[q] \in \mathbb{Q} :\Leftrightarrow$ *es ex.* $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *so dass* $[q] = [p : r]$
- $[p_1 : r_1] = [p_2 : r_2] :\Leftrightarrow p_1 r_2 = p_2 r_1$

Bsp. 1.17 $[12 : 30] = [6 : 15] = [2 : 5]$

Zulässige Operationen auf $\mathbb{Q}$

Definition 1.21

Addition $[p_1 : r_1] + [p_2 : r_2] := [(p_1 r_2 + p_2 r_1) : r_1 r_2]$,

Subtraktion $[p_1 : r_1] - [p_2 : r_2] := [(p_1 r_2 - p_2 r_1) : r_1 r_2]$,

Multiplikation $[p_1 : r_1] * [p_2 : r_2] := [p_1 p_2 : r_1 r_2]$,

Vergleich $[p_1 : r_1] > [p_2 : r_2] :\Leftrightarrow (p_1 r_2 - p_2 r_1) r_1 r_2 > 0$

Division $[p_1 : r_1]/[p_2 : r_2] := [p_1 r_2 : r_1 p_2]$, *falls* $p_2 \neq 0$.

Bemerkungen

- Schreibweise $[p : r] = \frac{p}{r}$
- $z \in \mathbb{Z} \mapsto \frac{z}{1} \in \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Absolutbetrag und Abstand in $\mathbb{Q}$

Definition 1.22 (Betrag) *Für $q \in \mathbb{Q}$ ist der* **Betrag von** q *definiert durch*

$$|q| = \begin{cases} q & \textit{falls } q \geq 0 \\ -q & \textit{falls } q < 0. \end{cases}$$

Bemerkung $|p| = |-p|$ *und* $|p - q| \leq |p| + |q|$ *für alle* $p, q \in \mathbb{Q}$

Definition 1.23 (Abstand) *Für $p, q \in \mathbb{Q}$ ist der* **Abstand von** p **und** q *definiert durch*

$$d(p, q) = |p - q|$$

Bemerkung (Dreiecksungleichung) $|p - q| \leq |p - r| + |r - q|$ *für alle* $p, q, r \in \mathbb{Q}$

'Unvollständigkeit' der rationalen Zahlen

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (z.B. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele π (Flächeninhalt des Kreise mit Radius 1)
$\sqrt{2}$ (Länge der Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)

Satz 1.2 *Es gibt keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$.*

Bew: *(Widerspruchsbeweis:) Falls $q = \frac{p}{r}$, so können wir den Bruch so weit kürzen, dass p und r teilerfremd sind.*
Wegen $2 = \frac{p^2}{r^2}$ ist $p^2 = 2r^2$, somit ist p^2 eine gerade Zahl.
Also muss p selbst gerade sein, denn sonst wäre p^2 ungerade.
Also ist $p = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$.
Oben eingesetzt ergibt sich $2r^2 = (2k)^2 = 4k^2$,
und somit $r^2 = 2k^2$, d.h. r^2 ist ebenfalls gerade,
somit auch r selbst, d.h. $r = 2l$ mit einem $l \in \mathbb{N}$.
Insgesamt erhalten wir, dass $\frac{p}{q} = \frac{2l}{2k}$,
was nicht teilerfremd ist, also Widerspruch. *q.e.d.*

1.4 Die reellen Zahlen

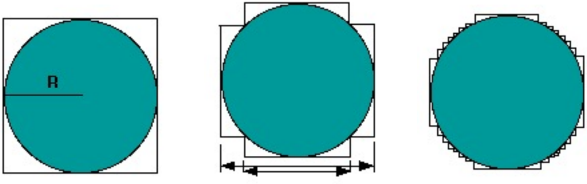
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (dh. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele $\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)
π (Flächeninhalt des Kreises mit Radius 1)

Ansatz Approximation durch rationale Zahlen.

Beispiel: π



Definition 1.24 (Intuitiv) *Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist eindeutig als 'größte untere Schranke' einer geeigneten Teilmenge $M \subset \mathbb{Q}$ definiert.*

Bemerkung $\mathbb{R} \simeq$ 'Zahlengerade'

Approximation durch Intervallschachtelung

Bsp. 1.18

$$s = \sqrt[3]{2} = ?$$

1. Schritt
$$\left.\begin{array}{ll} 1^3 < 2 & \Rightarrow 1 < s \\ 2^3 = 8 > 2 & \Rightarrow s < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow s \in]1, 2[=:]a_1, b_1[.$$

2. Schritt $m_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} = \frac{3}{2}$ *(Intervallmittelpunkt)*
$$m_1^3 = \frac{27}{8} > 2 \Rightarrow s < m_1 \Rightarrow s \in]a_1, m_1[=:]a_2, b_2[$$

3. Schritt $m_2 = \frac{b_2 + a_2}{2} = \frac{5}{4}$ *(Intervallmittelpunkt)*
$$m_2^3 = \frac{125}{64} < 2 \Rightarrow s > m_2 \Rightarrow s \in]m_2, b_2[=:]a_3, b_3[$$

4. Schritt $m_3 = \frac{b_3 + a_3}{2} = \frac{11}{8}$ *(Intervallmittelpunkt)*
$$m_3^3 = \frac{1331}{512} > 2 \Rightarrow s < m_3 \Rightarrow s \in]a_3, m_3[=:]a_4, b_4[$$

$\rightsquigarrow$ nach 4 Schritten:
$$\boxed{s \in]\tfrac{5}{4}, \tfrac{11}{8}[=]1.25, 1.375[} \quad (s \simeq 1,26).$$

Fundamentalfolgen (in $\mathbb{Q}$)

Definition 1.25 (Folge) *Sei A eine nichtleere Menge, dann heißt*

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \in A \times A \times A \cdots$$

eine **Folge** *in A bzw. A-Folge.*

Definition 1.26 (Fundamentalfolge) *Eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ heißt* **Fundamentalfolge**, *falls für alle $\epsilon > 0$*

$$|q_n - q_m| \leq \epsilon \textbf{ für schließlich alle } n \text{ und } m,$$

d.h. es ex. $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|q_n - q_m| \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N_\epsilon$.

Bsp. 1.19 $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ *vs.* $b_n = (-1)^n$.

Äquivalenz von Fundamentalfolgen

Definition 1.27 *Zwei Fundamentalfolgen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen* **äquivalent**, *falls zu jedem $\epsilon > 0$*

$$|q_n - r_n| \leq \epsilon \textbf{ für schließlich alle } n,$$

d.h. es ex. $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $|q_n - r_n| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N_\epsilon$.

Bsp. 1.20 *$(q_n := 2 + \frac{1}{n})$ und $(r_n := 2 + \frac{(-1)^n}{n^3})$ sind äquivalent.*

Bemerkung *Auf der Menge der Fundamentalfolgen*

$$\mathcal{F} := \{(a_n) \,|\, (a_n) \text{ ist Fundamentalfolge}\}$$

definiert dies eine Äquivalenzrelation

$$\mathcal{R} := \{\big((q_n),(r_n)\big) \,|\, (q_n) \text{ und } (r_n) \text{ äquivalent}\} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}.$$

Rechnen mit (Fundamental-)Folgen

Definition 1.28 *Für zwei Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

$$\begin{array}{lcl} (p \oplus q)_{n\in\mathbb{N}} & := & (p_n + q_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (p \ominus q)_{n\in\mathbb{N}} & := & (p_n - q_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (p \odot q)_{n\in\mathbb{N}} & := & (p_n \cdot q_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

und falls $q_n \neq 0$ für alle n

$$(p \oslash q)_{n\in\mathbb{N}} \quad := \quad (p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Satz 1.3 *Für zwei $\mathbb{Q}$-Fundamentalfolgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind $(p \oplus q)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p \ominus q)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p \odot q)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder $\mathbb{Q}$-Fundamentalfolgen.*
Falls zudem $(q)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht äquivalent zur Nullfolge $(0)_n$, so ist auch $(p \oslash q)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Q}$-Fundamentalfolge.

Bew: $|(p_n + q_n) - (p_m + q_m)| = |(p_n - p_m) + (q_n - q_m)|$
$\leq |p_n - p_m| + |q_n - q_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ *für schließlich alle* $n, m \in \mathbb{N}$.

Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definition 1.29 (Die Menge $\mathbb{R}$) *Die* **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ *wird definiert durch*

$$\mathbb{R} := \{\textit{Alle (Äquivalenzklassen von) } \mathbb{Q}\textit{-Fundamentalfolgen}\}.$$

Bsp. 1.21 $r = [(m_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ *(Mittelpunkt-Folge v. Intervallschachtelung).*

Bemerkung

- *Jede $\mathbb{Q}$-Fundamentalfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **repräsentiert** *eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R} = [(p_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.*
- *Zwei Fundamentalfolgen repräsentieren dieselbe reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn sie äquivalent sind, d.h.*

$$[(p_n)_{n\in\mathbb{N}}] = r = [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ äquiv. } (q_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung *Die rationalen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ repräsentiert durch die konstanten $\mathbb{Q}$-Folgen, d.h.*

$$[q] = [(q, q, q, \cdots)] \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Somit gilt insbesondere $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Elementar-Operationen auf $\mathbb{R}$

Definition 1.30 $0 := [(0)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$.

Definition 1.31 *Für* $r = [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ *und* $s = [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ *definiere*

$$r + s := [(r \oplus s)_{n\in\mathbb{N}}],$$

und analog für die Operationen $-$, $\cdot$ *sowie (falls* $s \neq 0$*) für* $\mathbf{:}$.

Definition 1.32 *Für* $r, s \in \mathbb{R}$

- $r = [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] > 0$
  $:\Leftrightarrow$ (*Es ex.* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $r_n > \frac{1}{N}$ *für schließlich alle* n).
- $r > s :\Leftrightarrow r - s > 0$,
  bzw. $r \geq s :\Leftrightarrow ((r > s) \vee (r = s))$.
- $|r| := \begin{cases} r & \text{falls } r \geq 0 \\ -r & \text{falls } r < 0. \end{cases}$
- $d(r, s) := |r - s|$.

Satz 1.4 $\mathbb{R}$ *bildet mit den Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *einen* **Körper** *d.h. es gilt*

1. *(Assoziativgesetz für* $+$*)*
$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$
2. *(Kommutativgesetz für* $+$*)*
$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$
3. *(Neutrales Element für* $+$*): Für alle* $r \in \mathbb{R}$
$$r + 0 = r \quad \forall r \in \mathbb{R}$$
4. *(Inverses Element für* $+$*): Zu jedem* $r \in \mathbb{R}$ *ex. ein* $r' \in \mathbb{R}$ *mit*
$$r + r' = 0$$
5. *(Assoziativgesetz für* $\cdot$*)*
$$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$
6. *(Kommutativgesetz für* $\cdot$*)*
$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$
7. *(Neutrales Element für* $\cdot$*): Mit* $1 := [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ *gilt für alle* $r \in \mathbb{R}$
$$r \cdot 1 = r$$
8. *(Inverses Element für* $\cdot$*): Zu jedem* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ex. ein* $\tilde{r} \in \mathbb{R}$
$$r \cdot \tilde{r} = 1$$
9. *Distributivgesetz*
$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}.$$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.33

1. *Eine Menge der Form*

$$\{r \in \mathbb{R} \,|\, r \geq a \wedge r \leq b\} =: [a, b] \subset \mathbb{R}$$

mit $a, b, \in \mathbb{R}$ heißt ein reelles abgeschlossenes **Intervall**.

2. *Eine Folge von reellen abg. Intervallen $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* **reelle Intervallschachtelung**, *falls*
   - *i) Die Folge $|b_n - a_n|_{n\in\mathbb{N}}$ ist schließlich kleiner jedem $\epsilon > 0$.*
   - *ii) für alle $n \in \mathbb{N}$: $(a_{n+1} \geq a_n) \wedge (b_{n+1} \leq b_n)$.*

Satz 1.5 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) *Eine reelle Intervallschachtelung hat genau einen* **inneren Punkt**, *d.h. es ex. genau ein $r \in \mathbb{R}$, s.d.*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{r\}$$

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ – Beweis*

Lemma 1.1 *Es sei $(q_n)_{n\in N}$ eine $\mathbb{Q}$-Folge und $C \in \mathbb{Q}$, so dass stets $q_{n+1} \geq q_n$ sowie $q_n \leq C$ gilt. Dann ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge.*

Lemma 1.2 *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $M > 0$. Dann ex. $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q > r$ und $q' < r$ und $d(q, r) \leq \frac{1}{M}$ bzw. $d(q', r) \leq \frac{1}{M}$.*

Bew: (Satz 1.5) *Existenz: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließlich konstant, d.h. $a_n = a$ für schliesslich alle n, so ist a offenbar im Durchschnitt aller Intervalle enthalten. – Andernfalls wähle man aus der Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Folgeglieder von Intervallen, so dass stets $a_{n+1} > a_n$ gilt. Die Durchschnittsmenge dieser ausgewählten Intervalle ist identisch zur ursprünglichen Durchschnittsmenge. Somit kann man nun davon ausgehen, das stets $a_{n+1} - a_n > 0$ gilt. Mit dem obigen Lemma findet man $\alpha_n \in \mathbb{Q}$, s.d. stets $a_n \leq \alpha_n \leq a_{n+1}$. Aus dem vorigen Lemma folgt, dass $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Q}$-Fundamentalfolge ist. Zudem gilt dann für $a := [(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, dass stets $a_n \leq a$ und $a \leq b_n$, also $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.*

Eindeutigkeit: (Übung) *q.e.d.*

Kapitel 2:

Grenzwerte

2.1 Folgengrenzwerte

Die Geschichte vom schlauen W.

W: " Ich leihe Dir 1 Euro für ein Jahr zum Zinssatz von 100%", dh. Du gibst mir nach einem Jahr (1+100%) * 1 = 2 Euro."

A: "Oh, so viel habe ich in einem Jahr nicht."

W: "Ok, wir machen 50% pro halbem Jahr, das kriegst Du besser hin."

A: "Schon besser, aber geht auch 25 % pro Quartal? "

W: "Wir können auch 8,3% pro Monat machen."

A: "Oder 0.27 % pro Tag?"

W: "Oder 0.011 % pro Stunde!"

Frage Welchen Betrag muss A bezahlen, wenn er die zwischenzeitlich anfallenden Schulden stets aus Neue zu den vereinbarten Bedingungen refinanziert und erst am Ende eines Jahr begleicht?

Antwort 2 Euro, bzw. $(1+0.5)^2 = 9/4 = 2.25$, bzw. $(1+0.25)^4 = 2.441$, bzw. $(1+0.083)^{12} = 2.603$, bzw. $(1+\frac{1}{365})^{365} = 2.71$ Euro.

Systematische Betrachtung

Frage Es sei $G_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Was passiert mit G_n, wenn $n \to \infty$?

Feststellung 1 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **monoton wachsend**, d.h. es gilt stets

$$G_{n+1} > G_n.$$

Denn $G_{n+1}/G_n = \left[\frac{n+2}{n+1} / \frac{n+1}{n}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left[\frac{n+2}{n}\right]^n \frac{n+2}{n+1} > 1$.

Feststellung 2 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **nach oben beschränkt**, d.h. es gilt stets

$$G_n \leq 3.$$

$\leadsto$ G_n steigt kontinuierlich gegen einen **Grenzwert**, d.h. es existiert eine Zahl $G \in \mathbb{R}$ mit $G \in [2, 3]$,

so dass G_n schließlich beliebig nahe bei G liegt.

Nachtrag: $G_n = (1+\frac{1}{n})^n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schreibweise $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdots 1$ (**n Fakultät**).

Behauptung 1 Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! \geq 2^{n-1}$.

Bew: *Durch* **vollständige Induktion**

Induktionsanfang *Für* $n = 1$ *gilt* $n! = 1 \geq 2^0$.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow (n+1)$ $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

Behauptung 2 $(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1} b + \frac{n!}{(n-2)!2!} a^{n-2} b^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!} a b^{n-1} + b^n$.

Behauptung 3 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bew: *Durch vollständige Induktion (Übung).*

Beh. 1 – 3 $\Rightarrow$

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \overset{(2)}{=} 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} \overset{(1)}{\leq} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} \overset{(3)}{\leq} 3 \quad \square$$

Der Grenzwert einer Zahlenfolge

Definition 2.1 (Grenzwert) *Für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt $a \in \mathbb{R}$ ein* **Grenzwert von** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *falls $|a - a_n|$* **schließlich beliebig klein** *wird, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass*

$$|a - a_n| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N_\epsilon.$$

Eindeutigkeit des Grenzwertes bei Konvergenz

Satz 2.1 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann höchstens einen Grenzwert haben.*

Bew: *Angenommen $a \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ seien beides Grenzwerte, dann gilt für $\epsilon > 0$ beliebig und hinreichend großes n*

$$\begin{aligned} |a - \tilde{a}| &= |(a - a_n) + (a_n - \tilde{a})| \\ &\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Die Zahlen a und $\tilde{a}$ liegen also beliebig nahe beieinander und müssen somit identisch sein.

Konvergenz einer Zahlenfolge – Sprechweisen

Falls a Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, schreibt man wahlweise

- $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $a = \lim_n a_n$
- $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$

und spricht

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** a bzw.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ist konvergent (gegen a)**,
- andernfalls ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **nicht konvergent** bzw.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **existiert nicht**.

Beispiele von (Nicht-)Konvergenz

Bsp. 2.1 $a_n := 2 + \frac{1}{n}$.

Behauptung: $\lim_n a_n = 2$.

Denn sei $\epsilon > 0$ *und* $N_\epsilon \geq \frac{1}{\epsilon}$, *dann*

$$|2 - a_n| = 2 + \frac{1}{n} - 2 = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N_\epsilon.$$

Bsp. 2.2 $b_n := (-1)^n$.

Behauptung: $\lim_n b_n$ *existiert nicht.*

Denn angenommen, $b = \lim_n b_n$ *existiert, so würde z.B. mit* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *für* $n \geq N_\epsilon$ *folgen, dass*

$$|b_{n+1} - b_n| = |(b_{n+1}) - (b - b_n)| \leq |b - b_{n+1}| + |b - b_n| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Tatsächlich gilt aber $|b_{n+1} - b_n| = 2$ *für alle* n, *also Widerspruch.*

Der schlaue W. und die Euler'sche Zahl

Satz 2.2 *Es sei (a_n) monoton wachsend*[1] *und nach oben beschränkt*[2]*. Dann existiert* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(Analog für fallende nach unten beschränkte Zahlenfolgen.)

Korollar 2.1 *Die Folge* $G_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *ist konvergent.*

Bew: *Die Folge G_n ist monoton wachsend mit $G_n \leq 3$ für alle n.*

Definition 2.2 (Euler'sche Zahl)

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n}$$

Bemerkung $e \approx 2.714$

[1] d.h. so dass stets $a_{n+1} \geq a_n$

[2] d.h. es ex. $C \in \mathbb{R}$, so dass stets $a_n \leq C$

Sätze für konvergente Folgen

Satz 2.3 (Cauchy-Kriterium) *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Grenzwert genau dann, wenn sie eine* **Fundamentalfolge** *ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass*

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N_\epsilon.$$

Satz 2.4 *Jede Folge kann höchstens einen Grenzwert haben, d.h. falls $a_n \to a$ und $a_n \to a'$, dann gilt $a = a'$.*

Satz 2.5 *Seien zwei konvergente Folgen, so dass stets $a_n < b_n$ bzw. stets $a_n \leq b_n$, dann gilt $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Sätze für konvergente Folgen (Forts.)

Satz 2.6 *Seien* (a_n), (b_n) *und* (c_n) *Folgen mit stets* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *und* $\lim a_n = \lim c_n$. *Dann existiert* $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$.

Satz 2.7 (Folgen - Grenzwertsatz) *Falls* $\lim a_n$ *und* $\lim b_n$ *existieren, dann gilt*

$$\lim(a_n \diamond b_n) = (\lim a_n) \diamond (\lim b_n)$$

wobei $\diamond = +, -$ *bzw.* $\cdot$ *bzw. auch* $\diamond = :$, *sofern* $\lim b_n \neq 0$.

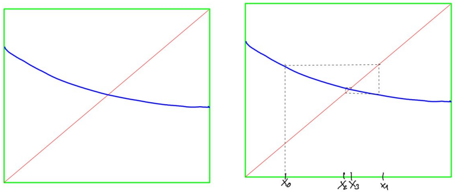
Bsp. 2.3 $\frac{5}{4} = \frac{5+0}{4+0+0} = \frac{\lim(5+\frac{3}{n^2})}{\lim(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{(5+\frac{3}{n^2})}{(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{5n^2+3}{4n^2+2n+1}$

Rekursionsfolgen: Wachstumsmodelle (Bsp.)

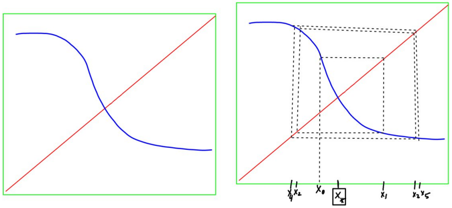
Rekursionsfolge $x_{n+1} := f(x_n)$, $x_0 \hat{=}$ Startwert.

$\rightsquigarrow$ Veranschaulichung nach der *Cobwebb-Methode*

Bsp. 2.4



Bsp. 2.5



Grenzwerte von Rekursionsfolgen – Beispiel

Bsp. 2.6 (Rekursive Folgendefinition) $a_1 := 2$, $a_{n+1} := a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}\right)$

Behauptung $a_n \to \sqrt{2}$.

Bew:

1. Schritt: (Beschränktheit)

$a_n \geq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}$:
Denn $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 0$ *für* $a_n > 0$ *und für* $a > 0$ *ist*

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \frac{a^2}{4} + 1 + \frac{1}{a^2} - 2$$
$$= \frac{a^2}{4} - 1 + \frac{1}{a^2} = (\frac{a}{2} - \frac{1}{a})^2 \geq 0, \text{ d.h.}$$
$$\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{2} \quad \forall a > 0$$

Grenzwerte von Rekursionsfolgen – Beispiel (Forts.)

2. Schritt:
(Monotonie)

(a_n) ist monoton fallend:
Denn für $a_n \geq \sqrt{2}$ ist
$a_n^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} = a_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}) \leq a_n$
Schritt 1 & Schritt 2 $\Rightarrow \lim a_n$ existiert.

3. Schritt:
(Bestimmung des Grenzwertes)

$\lim a_n = \sqrt{2}$:
Mit dem Grenzwertsatz gilt

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} = (\lim a_n) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{(\lim a_n)^2})$$

D.h. für $a := \lim a_n \geq 0$.

$$a = a \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2}) \Rightarrow (\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2}) = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2} \qquad \square$$

2.2 Reihen

Reihen (Bsp.): Der schlaue Willi (erneut ....)

Beispiel Willi macht Dir (und Deinen Nachkommen) ein Angebot:

Willi (und seine Nachkommen) zahlen künftig zu Beginn jeden Jahres einen Euro. Als Gegengleistung sollst Du heute 60 Euro bezahlen.

Frage Ist das ein gutes Angebot, wenn man eine Inflation bzw. einen Diskontsatz von 2% p.a. unterstellt?

$\rightsquigarrow$ Ist der Barwert[3] der künftigen Zahlungen größer als 60?

$$60 \overset{?}{\leq} 1 + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^2} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^3} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^4} + \cdots$$

[3] engl. 'NPV' (**Net present value**)

Reihen (Bsp.): Bob der Baumeister

Beispiel Bob will einen Wolkenkratzer bauen. Am 1. Tag schafft er einen Meter, am Tag darauf die Hälfte, dh. $\frac{1}{2}$ m, danach wieder die Hälfte vom Vortag, dh. $\frac{1}{4}$ m ...

Frage Wie hoch wird das Haus werden (falls B unsterblich)?

Antwort (Veranschaulichung auf der Zahlengerade) $\Rightarrow$ Das Haus wird 2 Meter hoch.

Reihen (Bsp.): Bob der Baumeister (Forts.)

Modifkation Bob schafft an Tag eins 1 Meter, an Tag zwei schafft er $\frac{1}{2}$m, an Tag 3 schafft er $\frac{1}{3}$m ...

Antwort Das Haus wird unendlich hoch, denn

$$1+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})+(\tfrac{1}{8}+\dots) \geq 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdots \nearrow \infty$$

Modifikation Bob schafft an Tag eins 1 Meter, an Tag zwei reißt er einen halben Meter herunter, an Tag drei schafft er $\frac{1}{3}$m, an Tag 4 reißt er $\frac{1}{4}$m herunter ...

Antwort (Veranschaulichung auf der Zahlengerade) $\Rightarrow$ Das Haus erreicht eine eindeutig bestimmte Höhe $\leq$ 1m

(Konvergente) Reihen

Definition 2.3 *Für Es sei (a_n) eine Folge.*

1. $n \in \mathbb{N}$ *heißt*

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i$$

*die n-***te Partialsumme** *zur Folge (a_n).*

2. *Falls der* **Limes der Partialsummen** *existiert, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n =: S \text{ existiert} \in \mathbb{R},$$

so schreibt man

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i := S$$

und sagt, die **die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert**.

3. *Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt* **absolut konvergent**, *falls*

$$\bar{S} := \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| := \lim_{n\to\infty} |a_1| + \cdots + |a_n| \text{existiert.}$$

Beispiele

Bsp. 2.7

1. $\sum(\frac{1}{2})^i = 2$ *(absolut) konvergent*
2. $\sum \frac{1}{i}$ *nicht konvergent*[4]
3. $\sum \frac{(-1)^i}{i}$ *konvergent aber nicht abs. konvergent*[5].

Bemerkung *Ob eine Reihe (abs.) konvergiert, hängt nicht von den ersten Gliedern der Folge ab, d.h.*

$$\sum_{i\geq 1} a_i \text{ (abs.) konvergent} \Leftrightarrow \sum_{i\geq K} a_i \text{ (abs.) konvergent.}$$

---

[4] 'harmonische Reihe'

[5] 'alternierende harmonische Reihe'

Sätze über konvergente Reihen

Satz 2.8 (Cauchy-Kriterium)

1. *Die Reihe* $\sum a_n$ *konvergiert genau dann, wenn*
$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \epsilon\, \forall\, n, m \geq N.$$
2. *Die Reihe* $\sum a_n$ *konvergiert absolut genau dann, wenn*
$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{N} |a_i| < \infty.$$

Satz 2.9

1. *Falls* $\sum a_i$ *(abs.) konvergent, so gilt* $\lim a_i = 0$.
2. *Falls* $\sum a_i$ *absolut konvergent, so ist auch* $\sum a_i$ *konvergent.*

Satz 2.10 (Leibniz-Kriterium) *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \searrow 0$, *dann ist* $\sum_{i\geq 0}(-1)^i a_i$ *konvergent.*

Bsp. 2.8 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *('alternierende harmonische Reihe')*

Sätze über konvergente Reihen (Forts.)

Satz 2.11 (Teleskopsumme) *Falls $a_n = c_{n+1} - c_n$ für eine konvergente Folge $c_n \to c$, dann gilt $\sum a_n = c - c_1$.*

Bsp. 2.9 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = c_{n+1} - c_n$ mit $c_n = -\frac{1}{n}$.
$\sum_{i=1}^{n} a_n = c_{n+1} - c_n + c_n - c_{n-1} \cdots + c_2 - c_1 = -\frac{1}{n+1} - (-1) \to 1.$

Satz 2.12 (Majorantenkrit.) *Falls $|a_i| \leq b_i$ und $\sum b_i \leq K \in \mathbb{R}$, so ist $\sum a_i$ abs. konvergent.*

Bsp. 2.10 $a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n-1)}$ und $\sum \frac{1}{n(n-1)} = 1 < \infty$.

Die geometrische Reihe und die Barwertformel

Definition 2.4 *Für $\rho \in \mathbb{R}$ nennt man*

$$\sum_{i \geq 0} \rho^i.$$

die **geometrische Reihe mit Parameter** ρ.

Satz 2.13 (**Barwertformel**) *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\rho \neq 1$ gilt $\sum_{i=0}^{n} \rho^i = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$*

Bsp. 2.11 *Welchen Barwert (NPV) hat ein Wertpapier, das zehn Jahre lang genau einen Euro pro Jahr ausschüttet, bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 5%?*

$$NPV = \sum_{k=0}^{9} 1 \cdot \left(\frac{1}{1.05}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{10}}{1 - \frac{100}{105}}$$

Barwertformel – Beweis

Bew: *Beweis durch vollständige Induktion:*

Induktionsanfang $n = 0$:

$$\rho^0 = 1 = \tfrac{1-\rho}{1-\rho}$$

Induktionsschritt $(n-1) \rightsquigarrow n$: *Es gelte* $\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \rho^i = \rho^n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i &= \rho^n + \frac{1-\rho^n}{1-\rho} \\ &= \frac{\rho^n(1-\rho) + (1-\rho^n)}{1-\rho} = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}\end{aligned}$$

Korollar 2.2 *Die geom. Reihe konvergiert (absolut) genau dann, wenn* $|\rho| < 1$, *mit Grenzwert* $\sum_{i \geq 0} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$.

Bew: $|\rho| < 1 \Rightarrow \sum_0^n |\rho^i| = \frac{1-|\rho|^{n+1}}{1-|\rho|} \to \frac{1}{1-|\rho|}$. $|\rho| \geq 1 \Rightarrow |\rho^i| \not\to 0$.

Der schlaue W. & die Barwertformel (Forts.)

Frage $60 \overset{?}{\leq} 1 + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^2} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^3} + 1 \cdot \frac{1}{(1+\frac{2}{100})^4} + \cdots$

(Barwertformel) Mit $\rho := \frac{1}{1+2\%} = \frac{100}{102} < 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-\frac{100}{102}} = 51.$$

Ergebnis W. will uns über den Tisch ziehen: Er nimmt 60 Euro ein, legt 51 davon an, um die künftigen Zahlungen damit zu finanzieren, und geht für die restlichen 9 Euro eine Pizza essen ...

Sätze über konvergente Reihen (Forts.)

Satz 2.14 (Quotientenkrit.) *Falls ein $\epsilon > 0$ ex. so dass*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \epsilon \text{ für schließlich alle } n,$$

so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Bsp. 2.12 $a_n = \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$. *Dann* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ *abs. konvergent.*

Bemerkung *Falls* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 + \epsilon$ *f.s.a. n, ist $\sum a_i$ nicht konvergent.*

Sätze über konvergente Reihen (Forts.)

Satz 2.15 (Wurzelkrit.) *Falls ein $\epsilon > 0$ ex. so dass*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \epsilon \text{ für schließlich alle } n,$$

so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Bsp. 2.13 $a_n = (\frac{1}{2})^n$ *für n gerade und* $a_n = (\frac{1}{3})^n$ *falls n ungerade.*

Zur Bedeutung von absoluter Konvergenz*

Definition 2.5

1. *Umordnung von* $\mathbb{N}$ *ist eine Folge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{N}$*, so dass*

$$\mathbb{N} = \{n_k | k \in \mathbb{N}\} \text{ und } (n_k = n_l \Rightarrow k = l).$$

2. *Eine Umordnung der Folge* (a_n) *ist gegeben durch* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* (n_k) *einer Umordnung von* $\mathbb{N}$.

Bsp. 2.14 *Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}] - 1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}] - \frac{1}{3} \\
&\quad + \frac{1}{2}[\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}] - \frac{1}{5} + \cdots \\
&\quad \geq (1-1) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + \cdots = +\infty
\end{aligned}$$

Zur Bedeutung von absoluter Konvergenz* (Forts.)

Satz 2.16 (Umordnungssatz) *Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent genau dann, wenn $\sum a_{n_k} = \sum a_n$ gilt für jede Umordnung von (a_{n_k}) von (a_n).*

Satz 2.17 (Umordnungssatz von Weierstraß) *Es sei $\sum a_n$ konvergent aber nicht abs. konvergent und $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Dann ex. eine Umordnung (a_{n_k}) von (a_n), s.d. $\sum_k a_{n_k} = r$.*

2.3 Anwendung: Logarithmus und Exponential

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition 2.6 *Für $r \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$*

$$\boxed{r^m := r \cdot r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}$$

$$\boxed{r^{-m} := \frac{1}{r^m}}$$

$$\boxed{r^0 := 1}$$

Satz 2.18 *Eigenschaften:*

1. $r^m \cdot r^l = r^{l+m}$
2. $(r^l)^k = r^{k \cdot l}$
3. $r_1^l \cdot r_2^l = (r_1 \cdot r_2)^l$
4. *Für $r, s, m > 0$:* $(r > s) \Leftrightarrow (r^m > s^m)$ *(Monotonie bzgl. Basis)*

Bew: *(Übung)*

Wurzeln

Definition 2.7

Sei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

$$s \in \mathbb{R} \textbf{ eine m-te Wurzel } \textit{von } r$$
$$:\Leftrightarrow$$
$$s^m = r.$$

Schreibweise s $=$ '$r^{\frac{1}{m}}$', falls $s, r \geq 0$.

Satz 2.19 *Für alle $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine (positive) m-te Wurzel $s = r^{\frac{1}{m}}$.*

Bew: *1) Existenz: Intervallschachtelung & Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.*
2) Eindeutigkeit: Falls $0 \leq s < \tilde{s} \Rightarrow s^m < \tilde{s}^m$.
Also $s^m = (\tilde{s})^m = r \Rightarrow s = \tilde{s}$. $\square$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 2.8 *Für $r > 0$ und $k, m \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} := (r^{\frac{1}{m}})^k$$

$$\mathbf{r}^{-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} := \frac{1}{r^{\frac{k}{m}}}$$

Satz 2.20

1. $r^{\frac{l}{l\cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$
2. $r^{\frac{l}{k}} = (r^l)^{\frac{1}{k}}$
3. $r^{\frac{m\cdot l}{k\cdot l}} = r^{\frac{m}{k}}$
4. $r^{\frac{k}{l}} \cdot r^{\frac{k'}{l'}} = r^{\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}}$
5. $r_1^{\frac{k}{l}} \cdot r_2^{\frac{k}{l}} = (r_1 \cdot r_2)^{\frac{k}{l}}$

Beispiel:
Beweis von $\boxed{1}$

$(r^{\frac{l}{l\cdot k}})^k = \left((r^{\frac{1}{l\cdot k}})^l\right)^k$

$= (r^{\frac{1}{l\cdot k}})^{l\cdot k} = r$

$\Rightarrow r^{\frac{l}{l\cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$

Potenzen mit reellen Exponenten

Beispiel $2^\pi = ?$

Satz 2.21 *Für $r \geq 0$ und $s \in \mathbb{R}$ sei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{Q}$-Folge mit $s_k \xrightarrow{k\to\infty} s$. Dann existiert $\lim\limits_{k\to\infty} r^{s_k}$ und dieser Wert ist unabhängig von der speziellen Wahl von $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Bew: *Folgt aus der Monotonie r^q bzgl. q für $r > 1$ bzw. $r < 1$.*

Definition 2.9 *Für $r \geq 0$ und $s \in \mathbb{R}$*

$$\boxed{r^s := \lim_{k\to\infty} r^{s_k},}$$

wobei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige $\mathbb{Q}$-Folge mit $s_k \xrightarrow{k\to\infty} s$ ist.

Satz 2.22 *Eigenschaften:*

1. $r^{s_1} \cdot r^{s_2} = r^{s_1+s_2}$
2. $(r^{s_1})^{s_2} = r^{s_1 \cdot s_2}$
3. $r_1^s \cdot r_2^s = (r_1 \cdot r_2)^s$
4. $s_1 > s_2, r > 1 \Rightarrow r^{s_1} > r^{s_2}$
5. $r_1 > r_2, s > 0 \Rightarrow r_1^s > r_2^s$

Bew: *Folgt durch Approximation aus den entsprechenden Eigenschaften im Fall von rationalen Exponenten.*

Logarithmus – Definition

Definition 2.10

Zu $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *heißt*

$r \in \mathbb{R}$ **Logarithmus von a zur Basis b**

$$:\Leftrightarrow$$

$$a = b^r$$

Schreibweise $r = \log_b a$

Bsp. 2.16 *In wievielen Jahren verdoppelt sich eine Sparanlage bei einem Zinssatz von 5%?* $(1 + 0.05)^n \overset{!}{=} 2 \Rightarrow n = \log_{1,05} 2.$

Logarithmus – Existenz

Satz 2.23 *Für alle $a > 0$ und $b > 0$, $b \neq 1$ existiert eind. Logarithmus von a zur Basis b.*

Bew: *O.b.d.A. $b > 1$ andernfalls betrachten wir $(\frac{1}{b})^{-r} \stackrel{!}{=} a$.*
Existenz: Intervallschachtelung & Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:
Falls $a \geq 1$, dann ex. $M \in \mathbb{N}$ mit $b^M \geq a \rightsquigarrow r \in [1, M]$.
Falls $b^{\frac{M+1}{2}} \geq a$, so ist $r \in [\frac{M+1}{2}, M]$ andernfalls $r \in [1, \frac{M+1}{2}]$ usw.
Eindeutigkeit: Folgt aus der Monotonie von b^r bzgl. r.

Logarithmus-Gesetze

Satz 2.24 *Für $a, b, c > 0$ gilt:*

1. $\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c)$
2. $\log_b(a) = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
3. $\log_b(b) = 1$, $\log_b(1) = 0$.

Bew: *1)* $b^{\log_b(a \cdot c)} = a \cdot c = b^{\log_b a} \cdot b^{\log_b c} = b^{\log_b a + \log_b c}$.
2), 3) (Übung) □

Natürlicher Logarithmus

Definition 2.11 *Für $a > 0$*

$$\boxed{\ln(a) := \log_e(a)}$$

natürlicher Logarithmus *von a, wobei $e =$ Euler'sche Zahl.*

Bemerkung

1. $\ln(e) = 1$, $\ln(1) = 0$, $\ln(a) < 0$ *falls* $a < 1$.
2. $\log_{10}(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$ *bzw.* $\log_{1.05}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)}$

Exponential – Definition

Satz 2.25 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist die* **Exponentialreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Bew: *Quotientenkriterium*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

Definition 2.12 *Für $x \in \mathbb{R}$ heißt*

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

das **Exponential** *von x.*

Exponential – Funktionalgleichung

Satz 2.26 *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)}.$$

Bew: *Sei* $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ *, dann*

$$S_N(x)\cdot S_N(y) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \frac{x^N}{N!})\cdot(1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots \frac{y^N}{N!})$$

$$= 1 + (1\cdot y + 1\cdot x) + (\frac{x^2}{2} + x\cdot y + \frac{y^2}{2}) + (\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2}\cdot y + \cdots)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}x^m\cdot y^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m\cdot y^{n-m} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(x+y)^n = S_N(x+y)$$

Mit $N\to\infty$ und Folgen-Grenzwertsatz für '$\cdot$' folgt die Beh. $\square$

Bemerkung $(*) \Leftrightarrow$ **Binomischer Lehrsatz**: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}$.

Exponential – Eigenschaften

Satz 2.27

1. $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\exp(-x) = 1/exp(x)\, \forall x \in \mathbb{R}$

Bew: $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$. $\Rightarrow \exp(x) \neq 0$, *denn sonst wäre* $\exp(x)\exp(-x) = 0$. *Damit folgt auch* 2). *Wegen* $\exp(x) = \exp(x/2)\exp(x/2) = (\exp(x/2))^2 > 0$ *ist* $\exp(x) > 0$.

Exponential – Eigenschaften (Forts.)

Satz 2.28 $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$ *und* $\exp(x) > \exp(y)$ *falls* $x > y$.

Bew: $\exp(x) > S_1(x) = 1 + x > 1$ *für* $x > 0$ *und*
$\exp(x) = \exp(y)\exp(x-y) > \exp(y)$, *falls* $x > y$.

Satz 2.29

1. $\exp(1) = e$
2. *Für alle* $r \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(r) = e^r = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{r}{n})^n$

Bew: *1) Durch expliziten Nachweis* $|S_n(1) - (1 + \frac{1}{n})^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
2) Für $r \geq$ *wie in 1). Für* $r < 0$ *mit* $\exp(-r) = \frac{1}{\exp(r)}$.

Darstellung von Potenzen mittels exp und ln

Korollar 2.3 *Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\boxed{a^b = e^{b \cdot \ln a}}$$

Bew: $\exp(b \cdot \ln a) = e^{b \cdot \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b$. $\square$

Bemerkung (Merkregeln)

1. *a^b mit $b \in \mathbb{R}$ ist i.A. nur für $a \geq 0$ definiert.*
2. *$\log_a c$ ist nur für $a > 0, a \neq 1$ und $c > 0$ definiert.*
3. *$a^b = \exp(b \cdot \ln a)$ mit $a > 0$ ist für alle $b \in \mathbb{R}$ definiert.*
4. *Es gilt $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.*
5. *Es gilt $\log_a c = \frac{\ln c}{\ln a}$ und $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$*

Kapitel 3:

Funktionen in einer Variablen

3.1 Der Funktionsbegriff

Abbildungen

Definition 3.1 *Eine* **Abbildung** $R : M \to N$ *von einer Menge* M *in eine andere Menge* N *ist eine Relation* $R \subset M \times N$ *mit*

für jedes $m \in M$ *ex. genau ein*[6] $n \in N$ *so dass* $(m, n) \in R$.

Bezeichungen M **Definitionsbereich**, N **Wertebereich** *von* R.

Scheibweisen Für $m \in M$ ist

$$R(m) = n :\Leftrightarrow (m, n) \in R.$$
$$R : M \mapsto N, \; m \mapsto n := R(m).$$

[6] d.h. $\forall m \in M \, \exists \, n \in N : (m, n) \in R$ und $((m, n_1) \in R \wedge (m, n_2) \in R) \Rightarrow n_1 = n_2$.

Abbildungen – Beispiele

Bsp. 3.1 $M :=$ *Menge aller Studierenden* $N :=$ *Menge aller Schuhgrößen*

$$R := \{(s, n) \in M \times N \,|\, s \text{ hat Schuhgröße } n\} \subset M \times N \qquad \surd$$

Bsp. 3.2 $M :=$ *Menge aller Studierenden* $N :=$ *Menge aller Schuhgrößen*

$$\hat{R} := \{(n, s) \in N \times M \,|\, s \text{ hat Schuhgröße } n\} \subset N \times M \qquad ϟ$$

Bsp. 3.3 (**Produktions-vorgang**)

- $X \hat{=}$ *Menge der Vorprodukte*
- $Y \hat{=}$ *Menge der Endprodukte*
- $y = f(x)$ *Endprodukt* y *entstanden in* f*-Produktion aus* x

Injektiv, surjektiv und bijektiv

Definition 3.2 *Eine Abbildung $A : M \to N$ heißt*

1. **injektiv** *genau dann, wenn*

$$(A(m) = A(m')) \Rightarrow (m = m')$$

2. **surjektiv** *genau dann, wenn*

$$\{A(m) \,|\, m \in m\} = N$$

3. *und* **bijektiv**, *falls A injektiv & surjektiv ist.*

Bsp. 3.4 *A: Menge der Studenten der Univ. Leipzig* $\longrightarrow \mathbb{N}$

$$A(s) = Matrikelnummer(s),$$

ist injektiv aber nicht surjektiv.

Bemerkung *A surjektiv $\Leftrightarrow A(M) = N$, wobei*
$A(M) := \{A(m) \,|\, m \in M\}$ **Bildmenge** *von A.*

Komposition (Hintereinanderschaltung) von Abbildungen

Definition 3.3 *Für $A : M \mapsto N$ und $B : N \mapsto L$ heißt*

$$B \circ A : M \mapsto L$$

$$(B \circ A)(m) := B(A(m))$$

die **Komposition** *bzw.* **Verkettung** *von A und B.*

Bsp. 3.5

$$A : Studenten \mapsto Matrikelnummern$$

$$B : Matrikelnummern \mapsto Daten \text{ (der Ersteinschreibung)}$$

$$\Rightarrow B \circ A : Studenten \mapsto Daten \text{ (der Ersteinschreibung)}.$$

Satz 3.1 *Falls A und B injektiv bzw. surjektiv so auch $B \circ A$.*

Umkehrabbildung

Definition 3.4 *Eine Abbildung $A \subset M \times N$ heißt* **umkehrbar**, *falls*

$$\hat{A} := \{(n, m) \in N \times M \,|\, (m, n) \in A\} \subset N \times M$$

eine Abbildung von N nach M ist.
In diesem Fall heißt $\hat{A}$ die **Umkehrabbildung** *von A.*

Satz 3.2 *$A : M \mapsto N$ umkehrbar $\Leftrightarrow$ A bijektiv.*

Bsp. 3.6 F : *Menschen* $\mapsto$ *Fingerabdrücke*

Satz 3.3 *Es sei $A : M \mapsto N$ umkehrbar.*

1. *Dann ist $\hat{A}$ umkehrbar, und $\hat{\hat{A}} = A$ und*
2. *$(\hat{A} \circ A)(m) = m$ bzw. $(A \circ \hat{A})(n) = n$.*

Bsp. 3.6 (Forts.)
$\hat{F}$: *Fingerabdrücke* $\mapsto$ *Menschen*
$F \circ \hat{F}$: *Fingerabdrücke* $\mapsto$ *Fingerabdrücke*
$\hat{F} \circ F$: *Menschen* $\mapsto$ *Menschen*

Reelle Funktionen

Definition 3.5

Eine (reelle) Funktion besteht aus einem

Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$

und einer

Funktionsvorschrift,

die jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in \mathbb{R}$ *zuordnet.*

Schreibweisen

$$f : D \to \mathbb{R}, \text{ bzw. } D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$D \ni x \to y = f(x) \in \mathbb{R}$$

Bemerkung *Eine Funktion ist eine Abbildung von* $D \subset \mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$.

Definition 3.6 $W(f) := \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ **Bildmenge von** f.

Beispiele

1. $D = \mathbb{R},\ f(x) = mx + b$
2. $D = \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
3. $D = [0, \infty[,\ f(x) = \sqrt{x}$
4. $D = \{1, 2, \pi, 4\}$,

x	1	2	π	4
y=f(x)	2	1	15	$\sqrt{2}$

5. $D = [0, 1] \cup \{2\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{falls } x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 1 & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

6. Pegelmessung an der Elbe:

t (in Stunden)	0	2	4	6	8
h (in cm)	319	330	360	372	365

Darstellung durch Funktionsgraphen

Definition 3.7

Die Menge aller Punktepaare

$$graph(f) = \{(x, y) \mid x \in D, y = f(x)\}$$

heißt **Funktionsgraph** *von* $f : D \to \mathbb{R}$.

Der Graph kann als Punktmenge im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Beispiele - Skizzen -

Beispiele elementarer Funktionseigenschaften

Definition 3.8

- f **gerade** $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
  Beispiel $y = x^2$
- f **ungerade** $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$
  Beispiel $y = x^3$
- f **monoton wachsend**
  $\Leftrightarrow (a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
  Beispiel $y = mx + b$ *mit* $m \geq 0$.
  Analog f **monoton fallend**.
- f **strikt monoton wachsend**
  $\Leftrightarrow (a > b \Rightarrow f(a) > f(b))$
  Beispiel $y = mx + b$ *mit* $m > 0$.
  Analog f **strikt monoton fallend**.
- f **periodisch mit Periode T**
  $\Leftrightarrow f(x + T) = f(x)$
  Beispiele:
  1) $f(x) = \sin(x),\ T = 2\pi$
  2) $f(x)$=*Iodidkonzentration zum Zeitpunkt* x
  bei der Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr) ...

Die Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr)

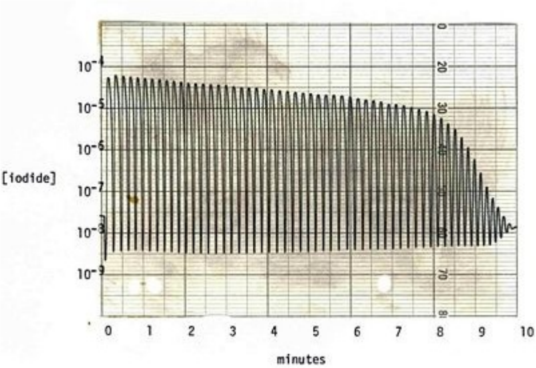


Figure . Oscillations produced by a solution of 0.050M potassium iodate, 0.038M malonic acid, 0.0050M manganese II sulfate, 0.88M hydrogen peroxide, 0.035M perchloric acid and 0.01% starch.

: (Quelle: Wikipedia)

Standard-Funktionen

Lineare Fkt.	$f(x) = mx + b$, $D(f) = \mathbb{R}$
Polynom	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N$, $D(f) = \mathbb{R}$ (Bezeichung: $a_0, a_1, \dots, a_N$ **Koeffizienten**, N **Grad**.)
Rationale Fkt.	$f = \frac{g}{h}$ mit g, h Polynom. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\}$.
Betrag	$f(x) = \lvert x \rvert$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Potenzfkt.	$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $D(f) =]0, \infty[$ bzw. $[0, \infty[$ falls $\alpha \geq 0$.
Exponentialfkt.	$f(x) = a^x$, $(a \geq 0)$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Logarithmusfkt.	$f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$, $D(f) =]0, \infty[$

Operationen mit Funktionen

Summe f+g $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$.

Differenz $f - g$

Produkt $f \cdot g$ - analog -

Quotient $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$ und $g(x) \neq 0$.

Bsp. 3.7 $f(x) = x^2, g(x) = x \Rightarrow \frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \frac{f}{g}(x) = x.$

Verkettung $f \circ g$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, falls $x \in D(f)$ und $g(x) \in D(f)$.

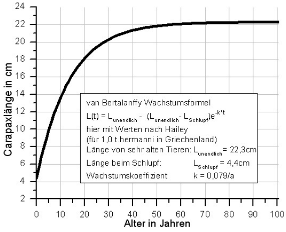
Bsp. 3.8 $D(g) = [1, \infty[, g(x) = x - 1,\ D(f) = [0, \infty[,\ f(x) = \sqrt{x}$
$\Rightarrow f \circ g : [1, \infty[\to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = \sqrt{x-1}.$

Bsp. 3.9 *Beispiel 2: Gewichtszunahme bei Schildkröten ...*

Beispiel: Schildkrötenwachstum

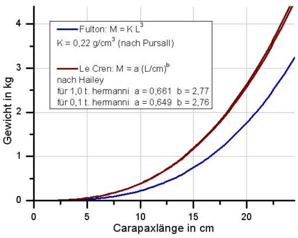
Bertalannfy Wachstumsgesetz:

Alter $\to$ Länge

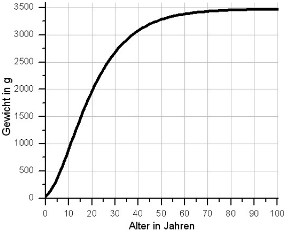


Fulton'sches Gewichtsgesetz

Länge $\to$ Gewicht



Alter $\to$ Gewicht



Umkehrfunktion

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv
  $\Leftrightarrow$ Graph(f) hat mit jeder Parallele zur x-Achse höchstens einen Schnittpunkt, d.h. $(f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow (x = x')$.
- Falls $f : D \mapsto \mathbb{R}$ injektiv, so ist $f : D \mapsto W(f)$ bijektiv, d.h. umkehrbar.

Definition 3.9 *Für $f : D \mapsto \mathbb{R}$ injektiv heißt*

$$W(f) \ni y \to x(y) \in \mathbb{R}, \ \textit{mit}\ y = f(x)$$

Umkehrfunktion von f.

Schreibweise

$$\boxed{f^{-1} : W(f) \to \mathbb{R}}$$

Grafisch $\mathrm{graph}(f^{-1}) = \{(y,x) \,|\, y \in W(f), f(x) = y\} = \hat{f} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(Spiegelung von graph(f) an der Diagonalen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.)

Umkehrbarkeit von Funktionen – Beispiele

Bsp. 3.10

- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ *umkehrbar. Umkehrfunktion* $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *nicht umkehrbar,* *weil nicht injektiv (z.B.* $f(1) = f(-1) = 1$*).*
- $D = [0, \infty[$, $f(x) = x^2$ *umkehrbar. Umkehrfunktion* $f^{-1} : [0, \infty[\mapsto [0, \infty[$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Berechnung der Umkehrfunktion - Beispiel

Bsp. 3.11 (Zerfallgesetz) $f(x) = M_0\gamma^{-x}$, $D(f) = [0, \infty[$.
mit $M_0 > 0, \gamma > 1$

Monotonie *Wegen* $\gamma > 1$ *ist* $x \to \gamma^{-x} = (\frac{1}{\gamma})^x$ *strikt monoton fallend*
$\Rightarrow f$ *umkehrbar.*

Wertebereich $W(f) =]0, M_0]$

Umkehrfunktion *Sei* $y \in]0, M_0]$, *gesucht:* $x \in D(f)$ *so dass* $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= M_0\gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{M_0} &= \gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow -x &= \log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \\ \Leftrightarrow x &= -\log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \end{aligned}$$

Also $f^{-1}(y) = -\log_\gamma(\frac{y}{M_0})$, $D(f^{-1}) =]0, M_0]$.

Bedeutung $f^{-1}(y) =$ Zeitpunkt x, wenn $f(x) = y$.

Satz 3.4 *Für* $f(x) = a^x$ *mit* $a > 0$ *und* $D(f) = \mathbb{R}$ *dann ist*
$f^{-1}(x) = \log_a(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_{>0}$. $\square$

Quadratische Funktionen

Definition 3.10 $f(x) = ax^2 + bx + c$ **Quadratische Funktion**

Scheitelform

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
&= a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2)) \\
&= a\big((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\big) =: A\big((x - B)^2 + C\big)
\end{aligned}
$$

Scheitelpunkt $S = \big(-\frac{b}{2a}, c - a(\frac{b}{2a})^2\big) = (B, AC)$

Öffnung nach oben: $A > 0$, nach unten: $A < 0$.

Nullstellen $x_{1/2} = B \pm \sqrt{-C} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$ (**p-q-Formel**), falls $C \leq 0$, ansonsten keine.

Linear-Faktor-Zerlegung

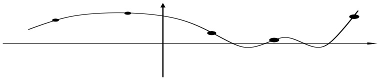
$$
\begin{aligned}
&A(x - x_1) \cdot (x - x_2) \\
&= A\big((x - B) - \sqrt{-C}\big) \cdot \big((x - B) + \sqrt{-C}\big) \\
&= A((x - B)^2 + C) = f(x)
\end{aligned}
$$

Polynome

Definition 3.11 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_N x^N$ **Polynom**

Bsp. 3.12
$$\begin{aligned} p(x) &= 3(x-1)(x-5)(x+2) \\ &= 3(x-1)(x^2-3x-10) \\ &= 3x^3 - 12x^2 - 21x + 30 \end{aligned}$$

Satz 3.5 *Für $N+1$ Punktepaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{N+1}, y_{N+1})$ (mit $x_i \neq x_j$ f. $i \neq j$) ex. Polynom $x \to p(x)$ mit Grad N, so dass $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots N+1$*



Bew: *(Induktiv)* $p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i)} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$

Bsp. 3.13 *Prognose ('Interpolation') von bekannten auf unbekannte Datenpunkte, z.B. im Marketing.*

Polynomdivision

Satz 3.6 *Zu zwei Polyomen p, q ex. Polynome s, r so dass*

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x) \, \forall x \in \mathbb{R} \text{ und grad}(r) < \text{grad}(q)$$

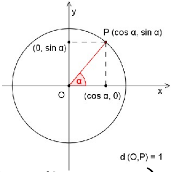
Bemerkung $\Leftrightarrow p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ *und grad(r) < grad(q).*

Bsp. 3.14

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 5) : (2x+1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{8}x + \frac{49}{16} - \frac{129}{16}\frac{1}{2x+1} \\
-\underline{(x^4 + \frac{1}{2}x^3)} \\
\qquad \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 \\
\qquad -\underline{(\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2)} \\
\qquad\qquad -\frac{25}{4}x^2 + 3x \\
\qquad\qquad -\underline{(-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{8}x)} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{49}{8}x - 5 \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{(\frac{49}{8}x + \frac{49}{16})} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{129}{16} = \mathit{Rest}
\end{array}
$$

Bsp. 3.15 $(3x^5 + 6x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 + 2x - 1) = 3x^2 + 3x - 3 + \frac{9x-1}{x^2+2x-1}$

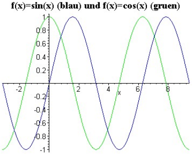
Sinus und Cosinus



Definition

$$\left.\begin{array}{l}\text{sinus} = \text{y-Koordinate}\\ \text{cosinus} = \text{x-Koordinate}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{vom Kreispunkt}\\ \text{zum Winkel } \alpha\end{array}$$

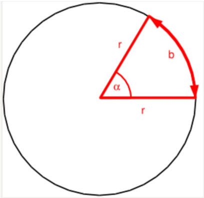
Graphen



2π periodisch,
sin ungerade, cos gerade
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Bemerkung (Pythagoras) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Erinnerung – Winkel- und Bogenmaß



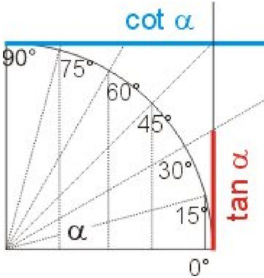
Eine Ameise läuft auf einem Kreisbogen mit Radius r, wobei der Winkelbereich $[0, \alpha]$ überstrichen wird. Welche Wegstrecke hat sie zurückgelegt?

Fall r=1 b ist proportional zu α.
Falls $\alpha = 360^\circ \Rightarrow b = 2\pi$ (Kreisumfang), d.h.

$$\boxed{b(\alpha) = \alpha \cdot \frac{2\pi}{360}}$$

Fall $r \neq 1$ $b = r \cdot \alpha \cdot \frac{2\pi}{360}$

Tangens und Cotangens

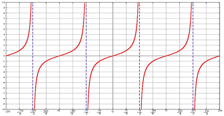


Definition

tangens $=$ Steigung $= m = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ zum Winkel α

cotangens $= m' = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ Steigung zum Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$

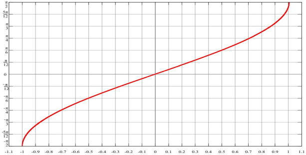
Graph



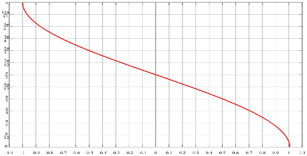
π-periodisch,
ungerade

Arkusfunktionen

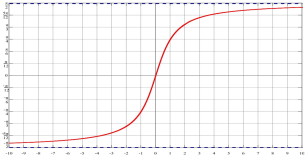
$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$



$\arctan = \tan^{-1} :]-\infty, \infty[\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

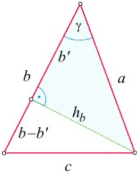


Trigonometrische Identitäten – Beispiele

Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{gathered}\cos^2 x + \sin^2 x = 1\\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x\end{gathered}}$$

Cosinussatz



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Beweis: (Übung)

3.2 Stetigkeit

Stetigkeit

Definition 3.12 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **stetig im Punkt** *$x \in D$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to x$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Bemerkung (Ökonomisch:) *Ein Input-Output Zusammenhang $x \mapsto f(x)$ ist stetig an der Inputstelle $x = x_*$, falls für* **jede** *Approximation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x_*$ gilt:*

Der Grenz-Output entlang von (x_n)
gleicht dem Output an der Grenze x_*.

Stetigkeit – Beispiele

Bsp. 3.16
$$f(x) = sign(x) := \begin{cases} -1 & \textit{falls } x < 0 \\ 1 & \textit{falls } x \geq 0 \end{cases}$$
ist nicht stetig in $x = 0$ und stetig in allen $x \neq 0$.

Bsp. 3.17 $f(x) = x^2$ *ist stetig in allen $x \in \mathbb{R}$, denn*
$f(x_n) - f(x) = x_n^2 - x^2 = (x_n - x)(x_n + x) \to 0 \cdot 2x = 0.$

Bsp. 3.18 (Nachfrage-funktion) *Hängt der Absatz eines Produktes stetig vom Preis ab (zum Beispiel bei einer Erhöhung von 0,99 Euro auf 1,00 Euro)?*

Operationen mit stetigen Funktionen (I)

Definition 3.13 *f stetig in $D \subset \mathbb{R} :\Leftrightarrow f$ stetig in allen Punkten $x \in D$.*

Satz 3.7 *$f, g : D \to \mathbb{R}$ seien stetig in $x \in D$, dann sind auch $f + g, f - g, f \cdot g$ stetig in $x \in D$.*

Falls $g(x) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in x.

Bew: *Z.B. für '+': $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und falls $x_n \to x$, so ist $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$, wg. Stetigkeit von f und g.* $\square$

Operationen mit stetigen Funktionen (II) – Komposition

Satz 3.8 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : W(f) \to \mathbb{R}$ mit f stetig im Punkt $x \in D$ und g stetig im Punkt $f(x)$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x.*

Bew: *Sei $y = f(x)$ und $z = g(y)$, dann ist $g \circ f(x) = g(y) = z$ und falls $x_n \to x$ so ist $y_n = f(x_n) \to y$, wg. Stetigkeit von f. Wg. der Stetigkeit von g gilt dann auch $g(y_n) \to g(y) = z$, also $g \circ f(x_n) \to z = g \circ f(x_n)$.* $\square$

Stetigkeit bei Verkettung – Beispiel

Bsp. 3.19 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \textit{falls } x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.

Bew: *Falls* $x \neq 0$, *so ist* f *stetig in* x *wg. der vorigen beiden Sätze.*
Falls $x = 0$, *so ist* $f(x) = 0$, *und falls* $x_n \to 0$, *so ist*
$|f(x_n) - f(x)| = |0 - x_n \sin(1/x_n)| = |x_n \sin(1/x_n)| \leq |x_n| \to 0$. □

Operationen mit stetigen Funktionen (III) – Umkehrfunktion

Satz 3.9 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und umkehrbar, dann ist auch $f^{-1} : W(f) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Bsp. 3.20 *Für $a > 0$ ist $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ stetig. (Umkehrfunktion von $\mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \to a^x \in \mathbb{R}$.)*

Nullstellensatz

Satz 3.10 (Nullstellensatz) *Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$, dann ex. ein $\xi \in [a,b]$ so dass $f(\xi) = 0$.*

Bew: *Durch Intervallschachtelung.*

Bsp. 3.21 (Existenz eines Gleichgewichtspunkts für Marktmodell) *Gegeben: Stetige Nachfrage- und Angebotsfunktionen*

$$n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p \mapsto n(p)$$

$$a : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad p \mapsto a(p)$$

für ein Gut als Funktion des Preises.

Falls $a(0) \leq n(0)$ und $a(P) \geq n(P)$ für ein $P \geq 0$, so ex. ein $p_* \in [0,P]$, so dass

$$\boxed{a(p_*) = n(p_*).}$$

Beweis: Nullstellensatz für $f := a - n$ auf $[0,P]$.

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Satz 3.11 (Zwischenwertsatz) *Falls* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $y \in [f(a), f(b)]$, *so ex. ein* $\xi \in [a, b]$ *mit* $f(\xi) = y$.

Bew: *Nullstellensatz für* $\tilde{f}(t) := f(t) - y$.

Bemerkung *Bedeutung: Intervall* $\xrightarrow{f}$ *Intervall, falls* f *stetig.*

Anwendung des Zwischenwertsatzes (Bsp.)

Bsp. 3.22 (Existenz eines 'fairen' Diskontsatzes) *Es gibt einen Diskontsatz d_*, so dass der hiermit gebildete Barwert einer Zahlung von je einem Euro zu Beginn der jeweils 9 kommenden Jahre genau 8 Euro beträgt (0-te Zahlung bei Vertragsabschlusss).*

$$a(d) := \frac{1}{1+d},$$
$$f(d) := 1 + a(d) + a^2(d) + \cdots + a(d)^9$$
$$= \frac{1-a(d)^{10}}{1-a(d)}, \text{ falls } d \neq 0 \text{ bzw. } = 10, \text{ falls } d = 0.$$
$$f(0) = 10,\ f(1) \leq 2$$
$$\text{(ZWS)} \Rightarrow \text{Es ex. } d_* \in [0,1], \text{ s.d. } f(d_*) = 8.$$

Satz vom Maximum und Minimum

Satz 3.12 (Minimax) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum auf $[a,b]$ an, d.h. ex. $x_{min} \in [a,b]$ und $x_{max} \in [a,b]$, so dass*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Bew: *Intervallschachtelung, mit Unterscheidung in welchem der betrachteten Teilintervalle größere (bzw. kleinere) Maximal- (bzw. Minimal-)werte beobachtet werden.*

Bsp. 3.23 (Optimale Produktionsmenge) *Existenz einer optimalen Produktionsmenge m_*, so dass der*

$$\mathit{Gewinn}(m_*) = \mathit{Einnahmen}(m_*) - \mathit{Kosten}(m_*)$$

maximal unter allen möglichen Produktionsmengen $m \in [a,b]$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 3.14 *Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ist* **'gleichmäßig stetig auf $B \subset D$'**, *falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \text{ falls } x, y \in B \text{ und } |x - y| \leq \delta.$$

Satz 3.13 *Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig auf $[a.b]$.*

Bew: *Durch Widerspruch: Andernfalls ex. $\epsilon > 0$ und Folgen $\delta_k \to 0$, $x_k \to x_*$, $y_k \to x_* \in [a, b]$, $|x_k - y_k| \leq \delta_k$, $|f(x_k) - f(y_k)| > \epsilon$. Limes $k \to \infty$ ergibt $|f(x_*) - f(x_*)| \geq \epsilon > 0$, d.h. Widerspruch.*

Bsp. 3.24 (Nachfrage-Stabilität) *Sei $[a, b] \ni p \to n(p) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Nachfrage eines Gutes zum Preis p. Falls n stetig, so gibt es zu gegeb. $\epsilon > 0$ eine Maximal-Schrittweite $\delta > 0$, so dass die Nachfrage bei Preisänderung von maximal δ nicht mehr als ϵ schwankt.*

Kapitel 4:

Differentialrechnung

4.1 Der Ableitungsbegriff

Differenzierbarkeit

Definition 4.1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **differenzierbar im Punkt** *$a \in D$, falls eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass*

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{für jede Folge } (a_n) \textit{ mit} \\ D \ni a_n \neq a \textit{ und } a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \textit{ gilt:} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a_0)}{a_n - a} = m. \end{array}}$$

Schreibweisen $m = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$

Sprechweise m $\widehat{=}$ **Ableitung von f im Punkte a**

Bemerkung *Sekantensteigung* $\widehat{=}$ **Differenzenquotient**
Ableitung $\widehat{=}$ **Grenzwert der Differenzenquotienten**

Beispiele

- $f(x) = \lambda x + \mu$ überall diffbar
- $f(x) = x^2$ überall diffbar
- $f(x) = |x|$ diffbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = x \sin(1/x)$ diffbar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ überall diffbar
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$ überall diffbar

Ökonomische Anwendungen (Bsp.)

Bsp. 4.1 (**Preiselastizität**)

$\mathbb{R} \ni p \to n(p) \in \mathbb{R}$ *'Nachfragefunktion' (diffbar)*

$$n'(p) \mathrel{\hat{=}} \textbf{Preiselastizität}$$

Änderung der Nachfrage bei kleinen Preisänderungen Δp

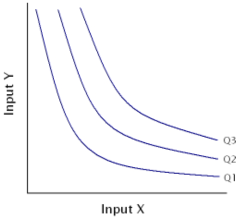
$$\Delta n(p) := n(p + \Delta p) - n(p) \approx n'(p)\Delta p.$$

Bsp. 4.2 (**Substitutionsrate**)

'Isoquanten'-Funktionen beschreiben (x, y)*-Paare mit konstantem Output* q*:* $y = y_q(x)$

$$\boxed{s_q := y_q'(x) \approx \frac{dy_q}{dx}}$$

$\rightsquigarrow$ *Verhältnis der Veränderung der Input-Faktoren bei konstantem Output*



Bestimmung der Ableitung – Beispiele

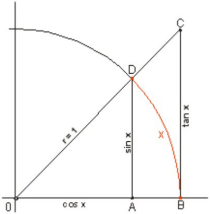
$f(x) = x^2$ $\quad \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^2-a^2}{a_n-a} = \frac{(a_n-a)(a_n+a)}{a_n-a} = a_n + a$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \lim_n (a_n + a) = 2a = f'(a)$.

$f(x) = x^k$ $\quad \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^k-a^k}{a_n-a} = a_n^{k-1} + a \cdot a_n^{k-2} + \cdots + a^{k-2}a_n + a^{k-1}$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = ka^{k-1} = f'(a)$.

$f(x) = 1/x$ $\quad$ Sei $a \neq 0$: $\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{1/a_n-1/a}{a_n-a} = \frac{\frac{a-a_n}{a\cdot a_n}}{a_n-a} = -\frac{1}{a\cdot a_n} \to \frac{-1}{a^2} = f'(a)$.

$\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

1) $\sin'(0) = 1$: $\lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 = f'(0)$



Vergleich der Flächeninhalte
(Eingeschlossene Fläche: A$= \frac{x}{2}$.)

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = f'(0) \leq 1.$$

2) $\cos'(0) = 0$: $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \Rightarrow 0 = 2\sin(x)\sin'(x) + 2\cos(x)\cos'(x)$

$$\overset{\text{in } x=0}{\Longrightarrow} 0 = 0 \cdot 1 + 1\cos'(0) \Rightarrow \cos'(0) = 0.$$

3) $\sin'(x) = \cos(x)$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dh}_{|h=0}\sin(x+h).$$

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dh}_{|h=0}\sin(x+h) = \sin(x)\cos'(0) + \sin'(0)\cos(x) = \cos(x).$$

$\exp'(x) = \exp(x)$

1) $\exp'(0) = 1$

$$\exp(h) - 1 = \sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{k!} - 1$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{h^k}{k!} = h \sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\exp(h) - 1}{h} = \sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| \leq |h| \sum_{k\geq 1} \frac{|h|^k}{(k+2)!}$$

$$\overset{\text{falls } |h|\leq 1}{\leq} |h| \exp(1) \to 0 \text{ für } h \to 0$$

2)$\exp'(x) = \exp'(x)$

$$\exp'(x) = \frac{d}{dh}_{|h=0} \exp(x+h)$$

$$= \frac{d}{dh}_{|h=0} \exp(x) \cdot \exp(h)$$

$$= \exp(x) \cdot \frac{d}{dh}_{|h=0} \exp(h) = \exp(x) \cdot 1$$

Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Satz 4.1 *Falls $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$, so ist f auch stetig in x_0.*

Bew: *Sei $x_n \to x_0$ und $m = f'(x_0)$, dann*

$$\begin{aligned}
\lim_n (f(x_n) - f(x_0)) &= \lim_n \left[\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} (x_n - x_0) \right] \\
&= \lim_n \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \lim_n (x_n - x_0) \\
&= m \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Tangentengleichung

Definition 4.2 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$. Dann heißt eine lineare Funktion $t(x) = mx + b$ eine* **Tangente an den Graphen von f im Punkt** *$x_0 \in D$, falls*

$$1)\ t(x_0) = f(x_0) \text{ und } 2)\ m = f'(x_0).$$

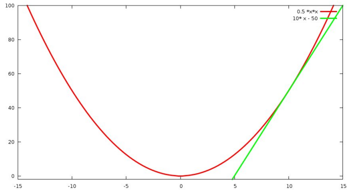
Satz 4.2 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = m$ so ist*

$$t(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$$

die Tangente an den Graphen von f im Punke $x_0 \in D$.

Bew: $t'(x) = m = f'(x_0)$ und $t(x_0) = f(x_0)$ $\square$

Bsp. 4.3 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x_0 = 10$, $t(x) = 50 + 10(x - 10) = 10x - 50$.



Ableitungsregeln

Satz 4.3 (**Summenregel**) *Falls $f'(a)$ und $g'(a)$ ex. in $a \in D_f \cap D_g$ so ex.*

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

Satz 4.4 (**Produktregel**) *Falls $f'(a)$ und $g'(a)$ ex. in $a \in D_f \cap D_g$ so ex.*

$$\boxed{(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}$$

Bsp. 4.4 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
$(f \cdot g)(x) = x^5$, $(f \cdot g)'(x) = 5x^4 = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$

Ableitungsregeln (II)

Satz 4.5 (Kettenregel) *Falls $g'(a)$ ex. und $f'(A)$ ex. in $A = g(a)$, dann ex.*

$$\boxed{(f \circ g)'(a) = f'(A) \cdot g'(a)}$$

Bsp. 4.5 $h(x) = e^{3x^2}$, $h = f \circ g$ mit $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x^2$
$h'(x) = (f \circ g)'(x) = e^{3x^2} \cdot 3 \cdot 2x = 6xe^{3x^2}$.

Satz 4.6 (Quotientenregel) *Falls $f'(a)$ existieren mit $g'(a) \neq 0$ dann existiert*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}}$$

Bsp. 4.6 $h(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), \qquad \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)\end{aligned}$$

Ableitungsregeln (III)

Satz 4.7 (**Umkehrfunktion**) *Falls $0 \neq f'(a)$ ex. in $a = f^{-1}(x)$, dann ex.*

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(a)}}$$

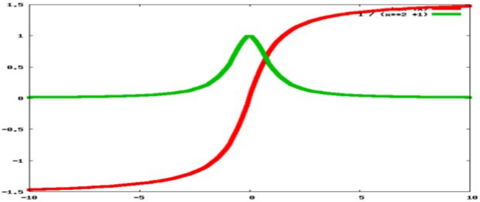
Bsp. 4.7 $\left(\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$

$f(x) = \tan x,$

$f^{-1}(x) = \arctan x$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{1+\tan^2(a)} \quad \textit{mit } a = \arctan x, \textit{ d.h.}$$

$$= \frac{1}{1+\tan(\arctan x)\cdot\tan(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

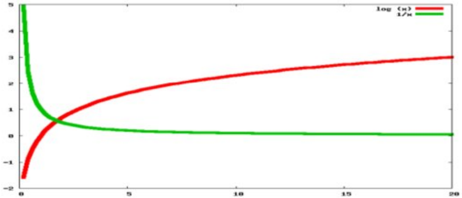


Beispiele (Forts.)

Bsp. 4.8 $\left(\ln'(x) = \frac{1}{x}\right)$

$f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$, $(x > 0)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(a)|_{a=\ln(x)}} = \frac{1}{e^a_{|a=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$



Bsp. 4.9 $\left((x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\right)$

$$h(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$
$$\Rightarrow h = f \circ g \ mit \ f(x) = e^x,\ g(x) = \alpha \ln x$$
$$\Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

4.2 Differenzierbare Funktionen

Lokale Extrema

Definition 4.3 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, dann hat f* **in x_0 ein lokales Minimum**, *falls $\exists \delta > 0$, s.d.*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Sprechweisen x_0 heißt **lokale Minimalstelle**, der zugeh. Funktionswert $f(x_0)$ ein **lokales Minimum**.

Bemerkung *Analog für* **lokales Maximum** *etc.*

Globale Extrema

Definition 4.4 *Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein* **globales Minimum von f in D**, *falls*

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in D.$$

Sprechweisen In diesem Fall ist x_0 eine **gobale Minimalstelle von f auf D**, der zugeh. Funktionswert $f(x_0)$ ist ein **globales Minimum von f in D.**

Bemerkung *Jede globale Extremstelle ist insbesondere eine lokale Extremstelle.*

Notwendiges Kriterium für lokale Minimalstellen

Satz 4.8 (Notw. Kriterium) *Falls $x_0 \in D$ ein* **innerer Punkt**[7] *von D und eine lokale Minimalstelle von $f : D \to \mathbb{R}$ und f diff'bar in x_0, so gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Bemerkung *Analog für* **lokale Maximalstellen**.

Bew: *Sei $x_k \searrow x_0$, dann gilt*
$(f(x_k) - f(x_0))/(x_k - x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0.$
Sei $\tilde{x}_k \nearrow x_0$, dann gilt
$(f(\tilde{x}_k) - f(x_0))/(\tilde{x}_k - x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0.$
Also $f'(x_0) = 0$. $\square$

[7] d.h. es ex. $\rho > 0$ s.d. $]x - \rho, x + \rho[\subset D$.

Satz von Rolle

Satz 4.9 (Satz v. Rolle) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$ sowie $f(a) = f(b)$, dann ex. $\xi \in]a, b[$, s.d. $f'(\xi) = 0$.*

Bew: *Klar, falls f konstant. Andernfalls existieren eine Minimalstelle und eine Maximalstelle, mindestens eine davon muss ein innerer Punkt von $[a, b]$ sein. Hier ist die Ableitung Null (Notw. Krit.).*

Bsp. 4.10 (Bergtour) *Falls bei einer Bergtour die Höhen über N.N. von Start- und Zielpunkt übereinstimmen, muss der Weg mindestens über eine Bergkuppe oder durch ein Tal führen.*

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 4.10 (MWS Diff'Rechg.) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$, dann ex. $\xi \in]a, b[$, s.d.*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bew: *Folgt aus Satz v. Rolle für $h(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.* $\square$

Bsp. 4.11 (Bergtour) *Bei einer Bergtour muss der Weg mindestens über eine Stelle führen, an welcher die Steigung identisch ist mit der mittleren Steigung für die gesamte Tour.*

Ableitung und Monotonie

Satz 4.11 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$, dann gilt*

1. $f'(x) = 0 \,\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ *konstant*
2. f *monoton wachsend auf* $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \,\forall x \in]a, b[$.
3. $f'(x) > 0 \,\forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ *streng monoton wachsend.*

Bew: *1) '$\Leftarrow$' $\surd$.*
'$\Rightarrow$' Falls f nicht konstant, so ex. $\alpha < \beta \in [a, b]$, s.d.
$f(\alpha) \neq f(\beta) \Rightarrow \exists \xi \in]\alpha, \beta[: f'(\xi) = (f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha) \neq 0$.
2) & 3) (Übung) $\square$

Bemerkung *Umkehrung von 3) i.A. falsch, z.B. $f(x) = x^3$.*

Ableitung und Monotonie (Forts.)

Bemerkung *Analog* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \, \forall x \in]a,b[$ *und* $f'(x) < 0 \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ *streng monton fallend auf* $[a,b]$.

Satz 4.12 (Hinr. Kriterium(I)) *Sei* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *diffbar und* $x_0 \in]a,b[$ *mit* $f'(x) \geq 0$ *für* $x \geq x_0$ *und* $f'(x) \leq 0$ *für* $x \leq x_0$, *dann hat* f *in* x_0 *ein (lok.) Minimum.*

Bew: f *wachsend auf* $[x_0, b[$, *fallend auf* $]b, x_0] \Rightarrow x$ *lok. Min'st. von* f.

Fehler-Schrankensatz

Satz 4.13 (Fehler-Schrankens.) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$, sowie $|f'(x)| \leq C \forall x \in]a, b[$, dann gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Bew: $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq C|x - y|.$ □

Bsp. 4.12 (Nachfragestabilität) *Sei $p \to n(p)$ diff'bare Nachfragefunktion mit Preiselastizität $|n'(p)| \leq C$ für alle p, dann ist*

$$|n(p') - n(p)| \leq C|p - p'|.$$

Allgemeiner MWS der Differentialrechnung

Satz 4.14 (Allgemeiner MWS) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$ mit $g'(x) \neq 0 \,\forall x \in]a, b[$, dann ex. $\xi \in]a, b[$, s.d.*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bew: *Satz v. Rolle für* $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

L'Hospital'sche Regel

Satz 4.15 (L'Hospital) *Falls $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff"bar auf $]a,b[$ mit $f(a) = 0 = g(a)$ und*

$$\rho := \lim_{a_k \to a} \frac{f'(a_k)}{g'(a_k)} \text{ für jede Folge } a_k \searrow a.$$

Dann gilt für jede Folge $a_k \searrow a$

$$\lim_{a_k \to a} \frac{f(a_k)}{g(a_k)} = \rho.$$

Bew: $\overset{(Allg.MWS)}{\Longrightarrow} \exists \xi_k \in]a, a_k[$, s.d. $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(x_k)-f(a)}{g(x_k)-g(a)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \rho$. $\square$

Bemerkung *L'Hospital'sche Regel gilt analog für $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$, falls $|f(x_k)| + |g(x_k)| \to \infty$ und $x_k \to a$ bzw. $|x_k| \to +\infty$.*

L'Hospital'sche Regel – Beispiele

Bsp. 4.13 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} = 1$ *fur* $x_k \to 0$.
Denn mit $f(x) = \sin(x)$ *und* $g(x) = x$ *ist* $\frac{\sin(x_k)}{x_k} = \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$.
$f(0) = 0,\ g(0) = 0$.
$f'(x) = \cos(x),\ g'(x) = 1$.
$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(a_k)}{g'(a_k)} = 1$ *für alle* $a_k \to 0$. $\overset{L'Hospital.}{\Longrightarrow}$ *Beh.* □

Bsp. 4.14 $\lim\limits_{x_k\to\infty} \frac{x_k}{e^{x_k}} = \lim\limits_{x_k\to\infty} \frac{1}{e^{x_k}} = 0$.

Höhere Ableitungen

Definition 4.5 *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *diff'bar auf* $]a,b[$ *Dann heißt* f

1. **stetig differenzierbar** *in* $]a,b[$, *falls*
$$g :]a,b[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) \textit{ stetig auf }]a,b[$$
2. **zweimal differenzierbar in** $x_0 \in]a,b[$, *falls*
$$f' :]a,b[\to \mathbb{R} \textit{ diff'bar in } x_0.$$

Diferenzierbar aber nicht stetig differenzierbar – Beispiel

Bsp. 4.15 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textit{falls } x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist diff'bar in $\mathbb{R}$ *mit* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \textit{falls } x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0. \end{cases}$$

f' *diff'bar in* $x \neq 0$ *und* f' *unstetig in* 0.

$\Rightarrow$ f *ist*
– *differenzierbar auf* $\mathbb{R}$,
– *aber in* $x = 0$ *nicht stetig differenzierbar und*
– *unendlich oft differenzierbar in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Höhere Ableitungen (Forts.)

Definition 4.6 *$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt* **k-mal differenzierbar** *in $]a,b[$, falls für alle $x \in]a,b[$ und $i = 1, \cdots k$ die Ableitungen $g_i'(x)$ existieren mit mit $g_i :]a,b[\to \mathbb{R}, g_i(x) := g_{i-1}'(x), g_1 := f$. Falls $g_k :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f* **k-mal stetig differenzierbar.**

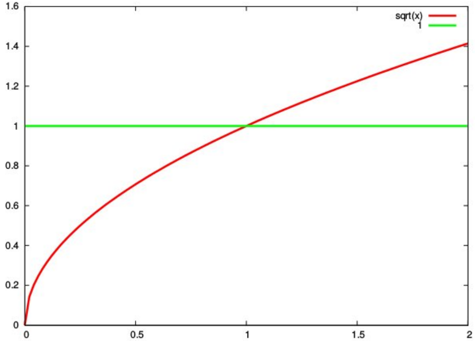
Bemerkung *Schreibweise $g_k = f^{(k)}$ (*k**-te Ableitung von** f*).*

Bsp. 4.16 $f(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow f^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$.

Der Satz von Taylor – Motivation

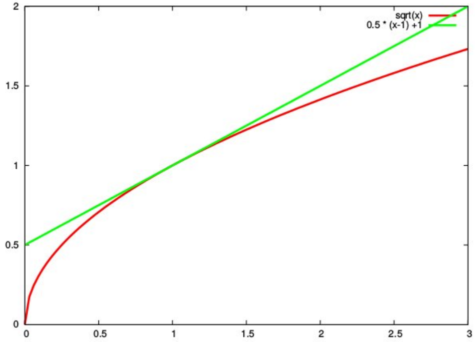
Beispiel Berechne $\sqrt{1.3}$ möglichst genau
ohne Taschenrechner! (TR: 1.1401754)

0. Idee: Konstante $f(x) = \sqrt{x}$, gesucht $f(1.3)$.



$f(1.3) \simeq C$ mit $C = f(1) = 1$.
Approximationsfehler: $\Delta_0 = 0.1401$

1. Idee: Tangente

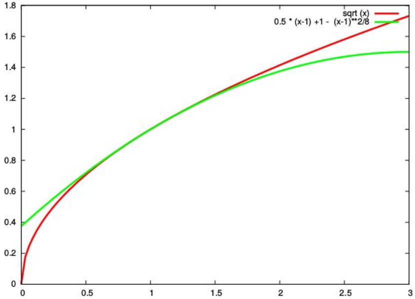


$t_a(x) = m \cdot (x - a) + C$
mit $m = f'(a)$ und $C = f(a)$ und $a = 1$.
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow t_1(x) = \frac{1}{2}(x-1) + 1}$$

$\Rightarrow t_1(1.3) = 0.15 + 1 = 1.15$
Approximationsfehler: $\Delta_1 = -0.0099$

2. Idee: Parabel



$p = p_a(x) = t_a(x) + \alpha(x-a)^2$,wobei α so gewählt, dass

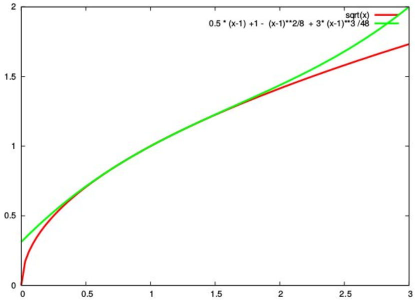
$$\boxed{p''(a) = f''(a) \Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2} f''(a)}$$

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}(x^{-1/2})' = -\tfrac{1}{4}x^{-3/2}, \Rightarrow f''(1) = -\tfrac{1}{4}$$

$$\boxed{\Rightarrow p_a(x) = t_a(x) - \tfrac{1}{8}(x-a)^2}$$

i.e $p_a(1.3) = 1.15 - 0.09/8 = 1.13875$
Approximationsfehler: $\Delta_2 = +0.002$

3. Idee: Polynom 3. Ordnung



$q_a(x) = p_a(x) + \beta(x-a)^3$,wobei β so gewählt, dass

$$\boxed{q'''(a) = f'''(a) \Rightarrow \beta = \frac{1}{6} f'''(a)}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}(x^{-3/2})' = \frac{3}{8}(x^{-5/2}), \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\Rightarrow q_a(x) = p_a(x) + \frac{3}{48}(x-a)^3}$$

i.e $q_a(1.3) = 1.13875 + \frac{3}{48} \cdot 0.3^3 = 1.1404375$
Approximationsfehler: $\Delta_3 = +0.00028$

Taylor-Polynom

Definition 4.7 *Für $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ n-mal diff'bar und $x_0 \in]a,b[$, heißt die Funktion*

$$x \to f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

n-**tes Taylorpolynom von** f **zum Entwicklungspunkt** x_0.

Bemerkung *Kurzschreibweise* $T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Bemerkung *Verallgemeinerung der Idee einer Tangente auf Approximation durch Polynome hherer Ordnung*

Taylorpolynom – Beispiel

Bsp. 4.17 $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$.

$$f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } k = 2l+1 \textit{ mit } l \textit{ gerade} \\ -1 & \textit{falls } k = 2l+1 \textit{ mit } l \textit{ ungerade }) \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{8,0}(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} x^7.$$

Satz von Taylor – Aussage

Satz 4.16 (Satz v. Taylor) *Sei* $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$*-mal differenzierbar,* $x_0 \in]a,b[$*. Dann gibt es zu* $x \in]a,b[$ *ein* ξ *zwischen* x_0 *und* x*, so dass*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Satz von Taylor – Beweis

Bew: (Taylor) *Zu* $x \in]a, b[$ *sei*

$$p(t) := f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$\Rightarrow p'(t) = f'(t) - f'(t) + (x-t)f''(t) - (x-t)f''(t) \cdots$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Ferner: $p(x) = f(x)$ *und* $p(x_0) = T_{n,x_0}(x)$.

Sei $g(t) := (x-t)^{n+1}$.

Falls $x > x_0$ *dann wg. Allg. MWS für* $t \in [x_0, x]$

$$\exists \xi \in]x_0, x[: \quad \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{p(x)-p(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}$$

Analog im Fall $x < x_0$. $\square$

Fehlerabschätzung für das Taylorpolynom

Korollar 4.1 *Sei* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$*-mal diff'bar und* $C > 0$*, so dass*

$$|f^{(n+1)}|(x) \leq C \text{ für alle } x \in]a, b[$$

dann gilt

$$|f(x) - T_{n,x_0}(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \quad \forall x \in]a, b[.$$

Bsp. 4.18 $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$, *dann*

$$|\sin(x) - (x - \frac{1}{3!}x^3)| \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{1920} \text{ falls } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Lokale Extrema – Hinreichendes Kriterium(II)

Satz 4.17 *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in]a, b[$, s.d.*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ferner sei und $f^{(n)}$ stetig in x_0.

Dann hat f in x_0

1. *ein lokales Minimum, falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$,*
2. *ein lokales Maximum, falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$,*
3. *einen Sattelpunkt, falls n ungerade.*

Bsp. 4.19 $f(x) = x^n$, $x_0 = 0$.

Hinreichendes Kriterium – Beweis

Lemma 4.1 *Es sei* $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ *stetig in* $x_0 \in]a, b[$ $f(x_0) > 0$, *dann ex.* $\delta > 0$ *so, dass* $f(x) > 0$ *für alle* $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[$.

Bew: *Satz v. Taylor* $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ *mit einem* ξ *zwischen* x *und* x_0.

Fall 1: $f^{(n)}$ *in* x_0 *stetig* $\Rightarrow f^{(n)}(\xi) > 0 \forall \xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *für ein* $\delta > 0$.

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \forall x \in]x - \delta, x + \delta[$$

Fall 2: *folgt aus Fall 1) mit* $\tilde{f} := -f$.

Fall 3: *Wenn* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *dann* $f^{(n)}(\xi) > 0 \forall \xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n > f(x_0)$, *falls* $x \in]x_0, x_0 + \delta[$,
bzw. $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n < f(x_0)$, *falls* $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, *d.h.* x_0 *Sattelstelle von* f. $\square$

Hinreichendes Kriterium – Beispiel

Bsp. 4.20 *$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, hat ein lokales Minimum in $x_0 = \frac{1}{e}$.*

Bew: *Aussage folgt aus hinr. Kriterium, denn*

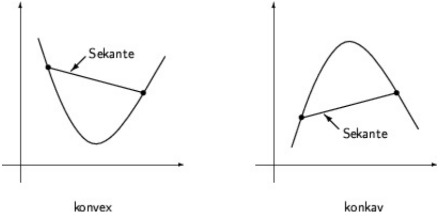
$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(\frac{1}{e}) = \ln(e^{-1}) + 1 = 0.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x_0) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0.$$

Bemerkung *Im Punkt $x_0 = \frac{1}{e}$ hat f sogar (s)ein globales Minimum, denn*
1) $x \ln x \to \infty$ für $x \to \infty$,
2) $x \ln x \to 0$ für $x \to 0$ (L'Hospital für $\frac{\ln x}{1/x}$),
3) $f(x) \leq 0$ für $x \in]0, 1]$ und
4) keine weiteren Stellen $\tilde{x} \neq x_0$ mit $f'(\tilde{x}) = 0$ (vergl. notw. Kriterium).

Konvexität



Definition 4.8 $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *heißt* **konvex** *(bzw. linksgekrümmt), falls*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{für alle } x,y \in [a.b].$$

$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *heißt* **konkav** *(bzw. rechtsgekrümmt), falls*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{für alle } x,y \in [a.b].$$

Bemerkung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvex* $\Leftrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ *für alle* $x,y \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$.

Satz 4.18 *Es sei $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann*

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in]a, b[.$$

Satz 4.19 *Falls $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ konkav, dann gilt für alle $x \leq y, \Delta > 0$*

$$f(y + \Delta) - f(y) \leq f(x + \Delta) - f(x).$$

Bemerkung *Analog mit "$\geq$", falls f konvex.*

Bsp. 4.21 (Nutzenfunktion) *$x \mapsto n(x)$ 'Nutzen' eines Konsumenten bei Konsum von x Einheiten eines Gutes.*

Konkavität von n $\Leftrightarrow$ Abnehmender Zusatznutzen durch Mehrkonsum von jeweils Δ.

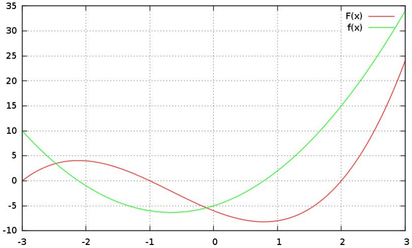
Wendestellen

Definition 4.9 *Für $f \in]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar heißt $x_0 \in]a,b[$* **Wendestelle von** *f, falls*

$$f' \text{ hat eine lokales Maximum oder Minimum in } x_0.$$

Bemerkung *Wendestellen $\hat{=}$ Übergangsstellen zwischen Konkavitäts- und Konvexitätsbereichen.*

Bsp. 4.22 $F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6,\ f(x) = F'(x) = 3x^2 + 4x - 5$



Wendestelle von F bei $x_w = -\frac{2}{3}$

Hinreichendes Kriterium für Wendestellen

Satz 4.20 (hinr. Kriterium für Wendestellen) *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in]a,b[$, s.d.*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ferner sei $f^{(n)}$ stetig in x_0. Falls n ungerade, hat f in x_0 eine Wendestelle, mit Übergang von konvex nach konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. von konkav nach konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$. Falls n gerade, so ist f keine Wendestelle.

Bew: *Folgt durch Anwendung des hinr. Kriteriums für lokale Extremstellen auf die Funktion f'.*

Kurvendiskussion

gegeben: $f : D(f) \mapsto \mathbb{R}$

Ziel: Möglichst genaue Beschreibung einer Funktion mit Methoden der Differentialrechnung

1. Nullstellen
2. lokale Extrema
3. Monotoniebereiche
4. Wendestellen
5. Verhalten von f am Rande des Definitionsbereiches

Kurvendiskussion – Beispiel

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (Polynom dritten Grades).

Nullstellen

Erste Nullstelle (erraten): $x_1 = -1$.
Für weitere Nullstellen $\rightsquigarrow$ Polynomdivision:

$$(x^3 + 2x - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$$

$$\Rightarrow x^3 + 2x - 5x - 6 = (x^2 + x - 6)(x + 1)$$

p–q–Formel $\rightsquigarrow$ Weitere Nullstellen:

$$x_2 = 2 \text{ und } x_3 = -3 \qquad .$$

Extremstellen

Notw. Kriterium $f'(x_e) \stackrel{!}{=} 0$. $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$.
$\rightsquigarrow$ Nullstellen von f' ('Kritische Punkte')

$$x_4 = -\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{19} \text{ und } x_5 = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt{19}$$

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema: $f''(x_e) \neq 0$.

$$f''(x) = 6x + 4 \rightsquigarrow f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\tfrac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow f''(x_4) < 0 \rightsquigarrow x_4 \text{ lok. Maxstelle}$$

$$f''(x_5) > 0 \rightsquigarrow x_5 \text{ lok. Minstelle}$$

Kurvendiskussion – Beispiel (Forts.)

Monotonie-Bereiche

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$
Graph von f' ist eine nach oben geöffnete Parabel,
Nullstellen von f' sind x_4 und x_5
$\Rightarrow f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_4, x_5]$, ansonsten ist $f'(x) \geq 0$.
$\Rightarrow f$ monoton fallend auf $[x_4, x_5]$, ansonsten monoton wachsend.

Wendestellen

$f''(x_w) \stackrel{!}{=} 0$ (notw. Kriterium)
$f''(x) = 6x + 4 \rightsquigarrow x_6 = -\frac{2}{3}$ (krit. Punkt von f').
x_6 ist Wendestelle mit Übergang von konkav nach konvex,
denn $f'''(x_6) = 6 > 0$ (Hinreichendes Krit. für Wendestellen).

Kurvendiskussion – Beispiel (Forts.)

Verhalten am Rande des Def.-Bereichs

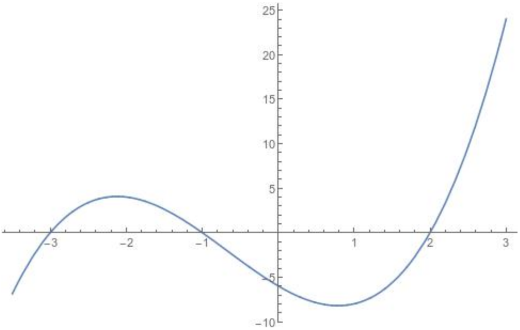
$D(f) = \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)}{x^3} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} \approx 1 \text{ für } |x| \to \infty.$$

$$\Rightarrow f(x) \approx x^3, \text{ wenn } x \to \infty \text{ oder } x \to -\infty$$

$$f(x) \to +\infty, \text{ für } x \to \infty \text{ und } f(x) \to -\infty \text{ für } x \to -\infty.$$

Skizze des Graphen



Kapitel 5:

Integralrechnung in einer Variablen

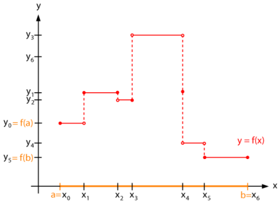
5.1 Das Integral für Regelfunktionen

Treppenfunktionen

Definition 5.1

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt* **Treppenfunktion**
$:\Leftrightarrow$ *Es ex. Punkte* $a = x_0 < x_1 < \cdots x_2 < \cdots < x_N = b$*, so dass* $\forall i = 0, \cdots, N-1$*:*

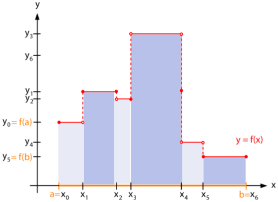
$$f :]x_i, x_{i+1}[\to \mathbb{R} \text{ konstant}$$



Bemerkung

1. *Die Punkte* $x_i, i = 0, \cdots, N$ *bilden eine* **zulässige Trennung auf** $[a, b]$ **für die Treppenfunktion** f.
2. *Durch Hinzunahme von weiteren Punkten* $x' \in [a, b] \setminus \{x_0, \cdots, x_N\}$ *zu* $\{x_0, \cdots, x_N\}$ *entsteht wieder eine zulässige Trennung auf [a,b] für* f.
3. *Die Werte von* f *auf den Punkten* x_i*,* $i = 0, \cdots, N$*, sind dabei irrelevant.*

Elementar-Integral für Treppenfunktionen



Definition 5.2 (Elementarintegral) *Es sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ eine zulässige Trennung für f, d.h. so dass $\forall i = 0, \cdots, N-1$:*

$$f(t) = c_i \text{ falls } t \in]x_i, x_{i+1}[, \text{ dann heißt die Zahl}$$

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{N-1} c_i\,(x_{i+1} - x_i)$$

das **Integral von** f **auf dem Intervall** $[a, b]$**.**

Wohldefiniertheit des Elementarintegrals

Lemma 5.1 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit zul. Trennung*
$$a = x_0 < x_1 \cdots < \cdots < x_N = b.$$
Sei $a = y_0 < y_1 \cdots < \cdots < y_M = b$ eine **Verfeinerung** *von $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ d.h.*
$$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_0, \cdots, y_M\}$$
mit $f =: \tilde{c}_j$ auf $]y_j, y_{j+1}[$ dann ist
$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{c}_j\,(y_{j+1} - y_j)\,.$$

Korollar 5.1 *Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer Treppenfunktion ist wohldefiniert, d.h. von der genauen Wahl der zulässigen Trennung unabhängig.*

Bew: *Folgt aus Lemma durch Übergang zu gemeinsamer Verfeinerung.*

Eigenschaften des Elementarintegrals (I)

Satz 5.1 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $c \in]a,b[$.*
Dann sind $f : [a,c] \to R$ bzw. $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bew: *Durch Einfügen von c in die Menge der Unterteilungspunkte.*

Definition 5.3 *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$* **definiert** *man $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.*

Eigenschaften des Elementarintegrals (II)

Satz 5.2 *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen. Dann gilt:*

(Linearität) 1. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist wieder eine Treppenfunktion und*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

(Monotonie) 2. *Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(Beschränktheit) 3. *$|f|$ ist wieder eine Treppenfunktion und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Bew: *1) Sei $\{x_i\}$ eine zul. Trennung für f und $\{y_j\}$ eine zul. Trennung für g, dann ist $\{z_k\} := \{x_i\} \cup \{y_j\}$ eine zul. Trennung für $\alpha f + \beta g$, die $\{x_i\}$ und $\{y_j\}$ verfeinert.*
Ferner sei $f(t) = c_k$ bzw. $g(t) = \tilde{c}_k$ für $t \in]z_k, z_{k+1}[$, dann ist

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx &= \sum_k (\alpha c_k + \beta \tilde{c}_k)(z_{k+1} - z_k) \\ &= \alpha \sum_k c_k(z_{k+1} - z_k) + \beta \sum_k \tilde{c}_k(z_{k+1} - z_k) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

2) (Übung)
3) Sei $\{x_i\}$ eine zul. Trennung für f, dann

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_i c_i(x_{i+1} - x_i)\right| \le \sum_i |c_i|(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b |f(x)|dx \\ &\le \max_i |c_i| \cdot \sum_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= (b-a)\max_i |c_i| \le (b-a) \max_{x \in [a.b]} |f(x)|. \qquad \square\end{aligned}$$

Konvergenz vom Integral bei max-Approximation

Korollar 5.2 *Für zwei Treppenfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Bew:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \quad \square$$

Integral – Definition durch Approximation

Korollar 5.3 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ mit*

$$|f(x) - t_k(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in [a,b].$$

Dann ist die Folge der Integrale $I_k := \int_a^b t_k(x)dx$ konvergent.

Bew:

$$\left|\int_a^b t_k(x)dx - \int_a^b t_l(x)dx\right| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |t_k(x) - t_l(x)|$$

$$\leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} \Big(|t_k(x) - f(x)| + |f(x) - t_l(x)|\Big) \leq (b-a)(\frac{1}{k} + \frac{1}{l})$$

Die Folge der Integrale ist somit eine Fundamentalfolge. □

Definition 5.4 *In der Situation wie oben definiert man* **Integral von** *f* **von** *a* **bis** *b als Limes*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{k\to\infty} \int_a^b t_k(x)dx.}$$

Wohldefiniertheit des Integrals

Bemerkung *In Definition 5.4 hängt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ nicht von der genauen Wahl der Approximationsfolge $(t_k)_k$ für f ab.*

Bew: *Sei $(\tilde{t}_k)_k$ eine Approximation durch eine zweite Folge von Treppenfunktion, dann gilt*

$$\left|\int_a^b t_k(x)dx - \int_a^b \tilde{t}_k(x)dx\right| \leq (b-a)\max_{x\in[a,b]} |t_k(x) - \tilde{t}_k(x)|$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]}\Big([|t_k(x) - f(x)| + |f(x) - \tilde{t}_k(x)|\Big) \leq (b-a)\frac{2}{k}.$$

Somit $\lim_k \int_a^b \tilde{t}_k(x)dx = \lim_k \int_a^b t_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$ □

5.2 Regelfunktionen

Regelfunktionen – Definition

Definition 5.5 *Eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt* **Regelfunktion**, *wenn zu* $\epsilon > 0$ *bel. eine Treppenfunktionen* $t_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$|f(x) - t_\epsilon(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Bemerkung *Anschaulich: In einen bel. engen* ϵ*-Schlauch um den Graphen von* f *auf* $[a, b]$ *passt der Graph einer Treppenfunktion.*

Bsp. 5.1 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig dann ist* f *eine Regelfunktion.*

Bew: *Folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von* f *auf* $[a, b]$.

Charakterisierung von Regelfunktionen

Definition 5.6 *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x \in [a,b[$ heißt $c \in \mathbb{R}$ der* **rechtsseitige Grenzwert $f(x_+)$ von f in x** *falls*

$$c = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$$

für jede Folge (x_k) mit $x_k > x\,\forall k$ und $x_k \searrow x$.

Analog **linksseitiger Grenzwert $f(x_-)$ von f in $x \in]a,b]$.**

Bemerkung

1. *Andere Schreibweisen $f(x_+) = \lim\limits_{x\to x_+} f(x) = \underset{x\to x}{r\text{-}\lim} f(x)$.*
2. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x \in]a,b[$ genau dann, wenn $f(x_-) = f(x) = f(x_+)$.*

Satz 5.3 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion auf $[a,b]$ genau dann wenn $f(x_+)$ in allen Punkten $x \in [a,b[$ und $f(x_-)$ in allen Punkten $x \in]a,b]$ existieren.*

Regelfunktionen – Beispiele

Bsp. 5.2 *Jede monotone Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist eine Regelfunktion.*

Bsp. 5.3 *Die Funktion* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(0) := 0$ *und* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *für* $x \in]0, 1]$ *hat keinen rechtss. Limes* $f(0_+)$ *in* $x = 0$ *und ist somit keine Regelfunktion.*

Bsp. 5.4 *Die Funktion* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, *falls* $x \in \mathbb{Q}$ *und* $f(x) = 1$ *falls* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *hat in keinem* $x \in [0, 1]$ *einseitige Limiten und ist somit auch keine Regelfunktion.*

Bemerkung *Ausblick: Das Integral für Funktionen wie* f *aus Bsp. 5.4 kann mithilfe des* $\leadsto$ **Lebesgue'schen Integralbegriffs** *behandelt werden.*

Die Familie der Regelfunktionen

Korollar 5.4

- *Stückweise stetige Funktionen*[8] *sind Regelfunktionen.*
- *Falls* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Regelfunktion und* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist* $g \circ f$ *wieder eine Regelfunktion.*
- *Summe, Produkt und Quotienten** *von Regelfunktionen sind Regelfunktionen.*
- *Das Punktweise gebildete Maximum* $h(x) := \max(f(x), g(x))$ *bzw. Minimum* $h(x) = \min(f(x), g(x))$ *zweier Regelfunktonen* f, g *ist wieder eine Regelfunktion.*

Bew: *Folgt unmittelbar aus Anwendung von Satz 5.3.* □

Satz 5.4 *Falls* $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Folge von Regelfunktionen auf* $[a, b]$ *mit* $|h(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k}\, \forall x \in [a, b]$*, so ist* h *wieder eine Regelfunktion.*

Bew: *(Übung).*

---

[8] d.h. es ex. $x_0 = a < x_1 \cdots < x_N = b$ und $f :]x_i, x_{i+1}[\to \mathbb{R}$ stetig mit rechtss. Grenzwerten in x_i bzw. linkss. Grenzwerten in x_{i+1} für alle i.

Eigenschaften des ('Regel'-)Integrals (I)

Satz 5.5 *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Dann gilt:*

(Linearität) 1. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist wieder eine Regelfunktion und*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

(Monotonie) 2. *Falls $f(x) \le g(x) \, \forall x \in [a,b]$ so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

(Beschränktheit) 3. *$|f|$ ist wieder eine Regelfunktion, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Bew: *Durch Grenzübergang ($k \to \infty$) aus den entspr. Eigenschaften für Treppenfunktionen.* □

Eigenschaften des ('Regel'-)Integrals (II)

Satz 5.6 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $c \in]a, b[$. Dann sind $f : [a, c] \to R$ bzw. $f : [c, b] \to \mathbb{R}$ wieder Regelfunktionen und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bew: *Durch Grenzübergang ('$k \to \infty$') aus der entspr. Eigenschaft für Treppenfunktionen.* □

Satz 5.7 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ so, dass*

$f(x) = g(x) in\ [a, b]$ *bis auf endlich viele Ausnahmepunkte x.*

Dann ist g auch Regelfunktion auf $[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Bew: *Folgt durch Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle, in denen $f = g$ und durch Anwendung von obigem Satz.* □

5.3 Der Hauptsatz der Differentialrechnung

Hauptsatz der Differentialrechnung

Satz 5.8 'Funktion der oberen Grenze'

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und sei*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s) ds.$$

Dann gilt für alle $x \in]a, b[$

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Hauptsatz – Beweis

Bew: *Sei* $x \in [a, b[$.

$$\frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right) dt.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right) dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \max_{s\in[x-|h|,x+|h|]} |f(s) - f(x)| \\ &= \max_{s\in[x-|h|,x+|h|]} |f(s) - f(x)| \xrightarrow{h\to 0} 0.\end{aligned}$$

Bemerkung*: Hauptsatz für allg. Regelfunktionen (I)

Satz 5.9 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und sei*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)ds.$$

Dann gilt für alle $x \in [a,b[$:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x_+). \qquad (*)$$

Bemerkung *1) Bedeutung von $(*)$: Für jede Folge (h_k) mit $h_k > 0$ und $h_k \to 0$ gilt*

$$(F(x+h_k) - F(x))/h_k \to f(x_+).$$

2) $\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =: F'_+(x)$ **Rechtsableitung von F in** x.

3) Rechtsableitung der Integrals = Rechtslimes des Integranden

Bemerkung*: Hauptsatz für allg. Regelfunktionen (II)

Satz 5.10 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und sei*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)ds.$$

Dann gilt für alle $x \in]a,b]$:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{F(x) - F(x+h)}{(-h)} = f(x_-). \tag{$*$}$$

Bemerkung *1) Bedeutung von $(*)$: Für jede Folge (h_k) mit $h_k < 0$ und $h_k \to 0$ gilt*

$$(F(x+h_k) - F(x))/h_k \to f(x_-).$$

2) $\lim\limits_{h \to 0-} \frac{F(x)-F(x+h)}{(-h)} =: F'_-(x)$ **Linksableitung von F in** x.

3) Linksableitung der Integrals = Linkslimes des Integranden

Stammfunktionen

Definition 5.7 *Eine diff'bare Funktion $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ heißt* **Stammfunktion** *von $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Satz 5.11 *Zwei Stammfunktionen von $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, d.h.*

$$F(s) - F(t) = G(s) - G(t)$$

für alle $s, t \in]a, b[$, falls $G' = F' = f$ auf $]a, b[$.

Satz 5.12 *Für $f : [a, b] \to R$ stetig und $c \in [a, b]$ ist*

$$F(x) := \int_c^x f(s) ds$$

die eindeutig bestimmte Stammfunktion von f mit $F(c) = 0$.

5.4 Integrationsmethoden

Bestimmtes Integral und Stammfunktion

Satz 5.13 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so berechnet sich das* **bestimmte Integral** *gemäß*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bew: $G(x) := \int_a^x f(s)ds$ *ist eine Stammfunktion von f.*

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(a) - G(b) = F(b) - F(a).$$

Schreibweise Falls $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann ist $F\big|_a^b := F(b) - F(a)$.

Bestimmtes Integral und Stammfunktion – Beispiel

Bsp. 5.5	$\int_1^2 x^2 dx$
Stammfunktion	$F(x) = \frac{1}{3}x^3.$
$\Rightarrow$ Integralwert	$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}7 = \frac{7}{3}.$

Methode der Partiellen Integration

Satz 5.14 *Sei $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f bzw. g, dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x)dx = F \cdot G\big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x)dx$$

Bew: *Setze $H(x) := F(x) \cdot G(x)$, dann gilt*

$$H'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x) =: h(x).$$

$$\Rightarrow \int_a^b h(x) = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx = H\big|_a^b.$$

Partielle Integration – Beispiel

Bsp. 5.6

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \cdot x \, dx &= \int_0^1 f(x)G(x)dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)g(x)dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 \\
&= (e - 0) - (e - 1) = 1
\end{aligned}
$$

Partielle Integration – Weitere Beispiele

Bsp. 5.7

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2(x)dx &= \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)dx \\ &= (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\cos(x)dx \\ &= (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (1-\sin^2(x))dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)dx = (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 1dx = 0 + \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Bsp. 5.8

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \sqrt{1-x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\epsilon} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{1-\epsilon} \sqrt{1-x^2}\cdot 1\,dx\\ &= \sqrt{1-x^2}x\Big|_0^{1-\epsilon} + \int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= -\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin(x)\Big|_0^{1-\epsilon}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Methode der Substitution

Satz 5.15 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$, dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)dy.$$

Bew: *Falls $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stf. von f, dann ist $y \to F(\phi(y))$ eine Stammfunktion von $y \to f(\phi(y)) \cdot \phi'(y)$ und somit*

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\,dy &= F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Substitionsregel (Forts.)

Bemerkung *Schreibweise, falls* $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *umkehrbar*
$x = \phi(y) = x(y)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{y^{-1}(a)}^{y^{-1}(b)} f(x(y)) \frac{dx}{dy} dy}$$

Bsp. 5.9

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \overset{x:=\phi(y)=\sin(y)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(y)} \cos(y) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\, dy = \frac{\pi}{4}$$

Substitionsregel – Weitere Beispiele

Bsp. 5.10

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx \overset{x:=\phi(y)=1-y}{=} \int_1^0 (1-y)^2\sqrt{y}\cdot(-1)\,dy$$
$$= \int_0^1 (1-y)^2\sqrt{y}\,dy$$
$$= \int_0^1 (\sqrt{y} - 2y^{3/2} + y^{5/2})dy$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}$$

Bsp. 5.11

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x^2)dx \overset{x:=\phi(y)=\sqrt{y}}{=} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{y}\sin(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi^2}{4}))$$

Nachtrag: Stammfunktion via Integration

Bsp. 5.12 *Gesucht: Stammfunktion von* $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_1^x \ln(s) ds = \int_1^x 1 \cdot \ln(s)\, ds \\ &= s \ln(s)\Big|_{s=1}^{s=x} - \int_1^x s \frac{1}{s}\, ds \\ &= x \ln(x) - (x-1) \\ &= x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

Definition 5.8 *Zu* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt die Menge aller Stammfunktionen*

$$\left\{ F :]a,b[\to \mathbb{R} \;\middle|\; F' = f \text{ auf }]a,b[\right\} = \int f(x) dx$$

das **unbestimmte Integral von f**.

Bemerkung *Andere Schreibweise*

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ *ist eine Stammfunktion von* f.

5.5 Uneigentliche Integrale

(Nicht-kompakte) Intervalle

Definition 5.9

- *Eine Teilmenge* $I \subset \mathbb{R}$ *heißt* **Intervall**, *falls für alle* $a \leq b$ *mit* $a, b \in I$ *gilt, dass* $[a, b] \subset I$.
- *Falls ein* $R > 0$ *existiert, so dass* $I \subset [-R, R]$, *so heißt* I **beschränkt**, *andernfalls* **unbeschränkt**.
- *Falls* $I = [a, b]$ *für* $a \leq b$, *so heißt* I **kompakt**, *andernfalls* **nicht-kompakt**.

Bsp. 5.13

- $[0, 1] \cup \{2\}$ *kein Intervall*
- $[0, 1]$ *kompakt*
- $]0, 1[$ *beschränkt, nicht-kompakt*
- $[0, \infty[$ *unbeschränkt, nicht-kompakt*

Definition 5.10 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Folge von kompakten Intervallen $I_n := [a_n, b_n] \subset I$ heißt* **(kompakte) Ausschöpfung von I**, *falls*

$$I_n \subset I_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } I = \bigcup_n I_n.$$

Bsp. 5.14

- $I =]0,1[$, $I_n := [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.
- $I = [0, \infty[$, $I_n := [0, n]$.

Definition 5.11 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls $f(x_+)$ & $f(x_-)$ ex. in jedem Punkt $x \in I$.*

Bsp. 5.15 $I =]0,1[$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$ *Regelfunktion auf I.*

Integral von Regelfunktionen auf bel. Intervallen

Definition 5.12 *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann heißt f* **auf I (uneigentlich) integrierbar**, *falls für jede kompakte Ausschöpfung $(I_n = [a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ von I der limes*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx =: \int_I f(x)dx \in \mathbb{R}$$

unabhängig von der konkreten Wahl der Ausschöpfung existiert.

Beispiele – I beschränkt

Bsp. 5.16 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *ist int'bar auf* $]0,1[$ *mit* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\big|_{a_n}^{b_n} = 2\sqrt{b}_n - 2\sqrt{a}_n \to 2 - 0 = 2.$ $\square$

Beispiele – I beschränkt (Forts.)

Bsp. 5.17 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *ist nicht integrierbar auf* $]0,1[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} \rightsquigarrow \frac{1}{0} - 1$ *konvergiert nicht.* □

Bsp. 5.18 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}$ *ist nicht integrierbar auf* $]0,1[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \sin(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} dx = \cos(\frac{1}{x})|_{a_n}^{b_n} = \cos(\frac{1}{b_n}) - \cos(\frac{1}{a_n}) \rightsquigarrow \sin(1) - \sin(\frac{1}{0})$
konvergiert nicht. □

Beispiele – I unbeschränkt

Bsp. 5.19 *$f:]1,\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}$ ist integrierbar auf $]1,\infty[$ mit $\int_1^\infty f(x)dx = 1$.*

Bew: *Sei $a_n \searrow 1$ und $b_n \nearrow \infty$, d.h. für alle $K>0$ ex. $N\in\mathbb{N}$, s.d. $b_n \geq K\,\forall n\geq N$. Dann $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n} \to 1$.* □

Beispiele – I unbeschränkt (Forts.)

Bsp. 5.20 $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *ist nicht integrierbar auf* $]1,\infty[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow \infty$, *d.h. für alle* $K > 0$ *ex.* $N \in N$, *s.d.* $b_n \geq K \,\forall n \geq N$. *Dann* $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \rightsquigarrow \infty$ *konvergiert nicht.* $\square$

Bsp. 5.21 $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ *ist integrierbar auf* $[0,\infty[$ *mit* $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

Bew: *Sei* $a_n = 0$ *und* $b_n \nearrow \infty$, *dann* $\int_{a_n}^{b_n} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{a_n}^{b_n} = e^0 - e^{-b_n} \to 1 - 0 = 1.$ $\square$

Absolute Integrierbarkeit*

Definition 5.13 *Eine Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt* **absolut integrierbar** *genau dann, wenn $|f|$ auf I integierbar.*

Satz 5.16 *$f : I \to \mathbb{R}$ auf I absolut integrierbar $\Rightarrow$ f auf I integrierbar.*

Bew: *Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Ausschöpfung von I, dann gilt für $n \geq m$*

$$\begin{aligned} \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_{a_m}^{b_m} f(x)dx\right| &= \left|\int_{a_n}^{a_m} f(x)dx - \int_{b_m}^{b_n} f(x)dx\right| \\ &\leq \int_{a_n}^{a_m} |f(x)|dx + \int_{b_m}^{b_n} |f(x)|dx \\ &= \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx - \int_{a_m}^{b_m} |f(x)|dx \leq \epsilon \end{aligned}$$

falls $n, m \geq N$, da $A_n := \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx$ Fundamental-Folge.
Somit ist $\tilde{A}_n := \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ ebenfalls eine Fundamental-Folge.
Der Limes $\lim_n \tilde{A}_n$ hängt nicht von der Folge $([a_n, b_n])$ ab (Übung). □

Integrierbarkeitskriterien

Satz 5.17 (Maj.-Krit.) *Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq g(x)$ und g auf I integierbar, so ist f auf I absolut integrierbar.*

Bew: *Ähnlich zum Beweis von Satz 5.16.*

Bsp. 5.22 $f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$ *(Gauß'sche Glockenkurve)*
Aus $\frac{x^2}{2} \geq |x| - \frac{1}{2}$ *folgt* $e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}-|x|}$ *und somit*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 2 \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}-x} dx = 2\sqrt{e} \approx 3.297 < \infty.$$

Bemerkung $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \approx 2.506$ *(Analysis II).*

Integrierbarkeitskriterien (Forts.)

Satz 5.18 (Reihenkrit.) *Zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definierte $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x) := a_n \text{ für } x \in [n-1, n[$$

so ist f auf $[0,\infty[$ (absolut) integrierbar genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergiert.

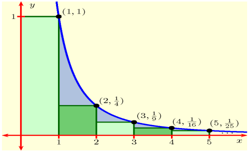
Bew: *$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion und*

$$\int_0^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ bzw. } \int_0^N |f|(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} |a_n|. \qquad \square$$

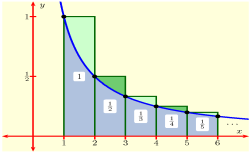
Vergleichssatz für Integrale und Reihen

Satz 5.19 *Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ monton fallend und $a_n := f(n)$, dann gilt*

$$\int_0^N f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} a_n \geq \int_0^N f(x+1)\,dx.$$

Bew: 

$\geq$



$\square$

Integralkriterium für Reihen – Beispiel

Satz 5.20 *Die Reihe* $\sum \frac{1}{n^s}$ *konvergiert genau dann, wenn* $s > 1$.

Bew: *Sei* $f(x) := \frac{1}{n^s}$ *für* $x \in [n-1, n[$

- *Fall* $s < 1$*:*
  $\int_0^N f(x)dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^s}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_{x=0}^{x\to\infty} \rightsquigarrow \infty.$
- *Fall* $s = 1$*:*
  $\int_0^N f(x)dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \ln(x)|_{x=1}^{x\to\infty} \rightsquigarrow \infty.$
- *Fall* $s > 1$*:*
  $\int_0^N f(x)dx \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = 1 + \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} = 1 + \frac{1}{s-1} < \infty.$