Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
mrenesse@math.tu-berlin.de

Kapitel 1:

Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Elementare Aussagenlogik

Definition 1.1.1 *Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist. (Aristoteles)*

Bsp. 1.1.1

- *A: Bonn ist eine Stadt.*
- *B: Köln ist ein Dorf.*
- *C: Köln ist größer als Bonn.*
- *D: Köln ist eine Stadt.*
- *E: Nachts ist es kälter als draußen. (?)*

Verknüpfungen von Aussagen

Durch Verknüpfung können neue Aussagen gebildet werden.

Elementarverknüpfungen

Negation 'NICHT': $\neg A$.

Bonn ist nicht eine Stadt. (Bonn ist keine Stadt.)

Disjkunktion 'ODER': $A \vee B$.

Bonn ist eine Stadt oder Köln ist ein Dorf.

Konjunktion 'UND': $A \wedge B$:

Bonn ist eine Stadt und Köln ist ein Dorf.

Formale Definition: *Wahrheitstabelle*

Definition 1.1.2 *Für zwei Aussagen U und V definiert man*

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$\neg$ U	F	F	W	W
U $\vee$ V	W	W	W	F
U $\wedge$ V	W	F	F	F

Äquivalenzverknüpfung

Definition 1.1.3 ('$\Leftrightarrow$')

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Leftrightarrow V$	W	F	F	W

Sprechweise: U ist notwendig und hinreichend für V.
U ist äquivalent zu V.

Bsp. 1.1.2

- $A \Leftrightarrow \neg B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $\neg A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: F)*

Implikationsverknüpfung

Definition 1.1.4 ('$\Rightarrow$')

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$U \Rightarrow V$	W	F	W	W

Sprechweisen: U ist hinreichend für V.
U impliziert V.

Bsp. 1.1.3

- A $\Rightarrow \neg$ B. (Wahrheitswert: W)
- A $\Rightarrow$ B. (Wahrheitswert: F)
- B $\Rightarrow$ A. (Wahrheitswert: W)

Aussageformen und Tautologien

Aus **Aussagevariablen** enststehen durch Verknüpfung und Klammerbildung **Aussageformen** z.B.

$$\neg((U \wedge V) \Rightarrow \neg W).$$

Definition 1.1.5 *Aussageformen mit Wahrheitswert W (für beliebige Wahrheitswerte der Variablen) heißen* **Tautologien**.

Bsp. 1.1.4

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \vee \neg A$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
6. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Nachweis: Wahrheitstabelle

Beispiel 1

A	W	F
A ⇒ A	W	W

Beispiel 2

A	W	F
$\neg A$	F	W
$A \vee \neg A$	W	W

Beispiel 4

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A \vee B$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	W	W	W	W

Logisches Schliessen

Bsp. 1.1.5 *Bonn ist eine Stadt und Köln größer als Bonn. Also ist Köln kein Dorf.*

Struktur

- Prämisse 1: A
- Pämisse 2: C
- Prämisse 3: $\mathsf{A} \wedge \mathsf{C} \Rightarrow \mathsf{D}$
- Prämisse 4: $\mathsf{D} \Rightarrow \neg B$
- Konklusion: $\neg B$.

A:	Bonn ist eine Stadt
B:	Köln ist ein Dorf
C:	Köln ist größer als Bonn
D:	Köln ist eine Stadt

Benutzt Tautologie $\mathsf{A} \wedge \mathsf{C} \wedge (\mathsf{A} \wedge \mathsf{C} \Rightarrow \mathsf{D}) \wedge (\mathsf{D} \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$

Gültiges Schließen

Gegeben *Prämissen* $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$
(Aussageformen)

Folgerung *Konklusion* (C)
(Aussageform)

Schreibweise

$$(P_1), (P_2), \ldots, (P_n) \models (C)$$

Definition 1.1.6 *Ein Schluss heißt* **gültig**, *falls*

$$(P_1) \wedge (P_2) \wedge \cdots \wedge (P_n) \Rightarrow (C) \quad \textit{Tautologie}$$

Übung (Theodizee). Wenn es Supermann gibt und er ein guter Held ist, verhindert er alles Übel. Da es Übel in dieser Welt gibt, gibt es Supermann nicht, oder er ist kein guter Held.

1.2 Naive Mengenlehre

Naive Mengenlehre

Definition 1.2.1 *'Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten wolhunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.' (G. Cantor, 1845-1918)*

Schreibweisen

$a \in A$ 'a ist ein Element der Menge A'

$a \notin A$ 'a ist nicht ein Element der Menge A '

Beschreibung von Mengen

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ (Aufzählung)

$A = \{a \mid a \text{ hat Eigenschaft } \alpha\}$ (Eigenschaft)

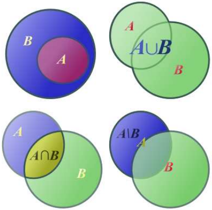
Bsp. 1.2.1

- M = *Teilnehmer des Tutoriums* = $\{$*Anna, Hans, ...* $\}$
- $G = \{z \mid z \text{ ist ein Vielfaches der Zahl } 7\}$.
- $X = \{x \mid x = x\}$ *(All-Menge)*
- $\emptyset := \{x \in X \mid x \neq x\}$ *(Leere Menge)*

Mengenalgebra - Grundoperationen

Definition 1.2.2

Teilmenge	$A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Gleichheit	$A = B :\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
Vereinigung	$A \cup B := \{x \vert x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt	$A \cap B := \{x \vert x \in A \wedge x \in B\}$
Komplement	$A \setminus B := \{x \vert x \in A \wedge x \notin B\}$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A) := \{M \vert M \subset A\}$



(Bel. Erweiterbar durch Verschachtelung)

Rechnen mit Mengen - Beispiele

$\emptyset \subset A$ für jede Menge A

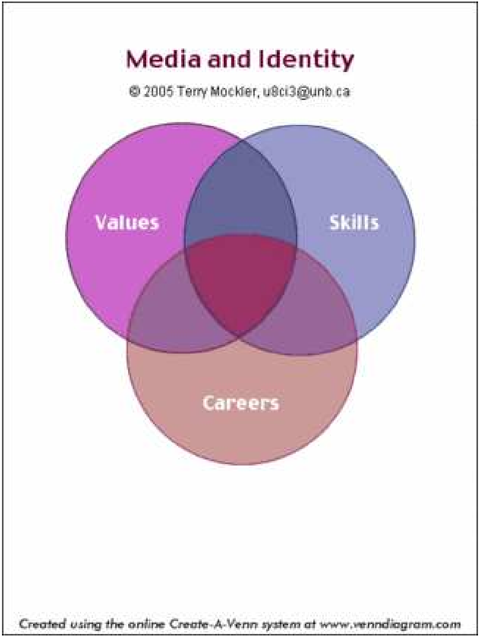
1. Distributivgesetz $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. De Morgan'sche Regel $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis:
$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A.$
Beweis:
$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
Beweis:
$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$

Übung: Anwendung von de Morgan
A = Weinliebhaber, B = Biertrinker, C = Milchbubis

Karriereplanung nach de Morgan ...



Cartesisches Produkt und Relationen

Definition 1.2.3 *Das* **Cartesische Produkt** *zweier Mengen A und B ist die Menge*

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

Bsp. 1.2.2 *Studenten $\times$ Dozenten $=:$ Uni*

Definition 1.2.4 *Eine* **Relation von** A **auf** B *ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$.*

Bsp. 1.2.3 $R = \{(S, D) \in Uni \,|\, S \text{ hört Vorlesung bei } D\}$

Definition 1.2.5 *Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt*
symmetrisch, *falls $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$*
transitiv, *falls $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.*
reflexiv, *falls $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$*

Bsp. 1.2.4 $R = \{(s, s') \in Studenten \times Studenten \,|\, s \text{ ist verliebt in } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \,|\, s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$
$R = \{(s, s') \in S \times S \,|\, s \text{ hat (echt) größere Füße als } s'\}$

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Definition 1.2.6 *Eine symmetrische, transitive und reflexive Relation auf einer Menge A heißt* **Äquivalenzrelation**.

Bsp. 1.2.5 $R = \{(s, s') \in S \times S \mid s \text{ kommt aus demselben Dorf wie } s'\}$

Definition 1.2.7 *Eine* **Klasseneinteilung** *einer Menge A ist eine Zerlegung von A in disjunkte Teilmengen, d.h. $\mathscr{Z} = \{A_i, i \in I\}$, $A_i \subset A$, so dass*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ wobei } A_i = A_j \text{ falls } A_i \cap A_j \neq \emptyset.$$

Bsp. 1.2.6 $S = \bigcup S_i$, S_i = *Studenten mit Schuhgröße i.*

Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Satz 1.2.1 *Für eine Äquivalenzrelation R auf A bilden die Mengen $A_i = \{a \in A \,|\, (a, i) \in R\}$, $i \in A$ eine Klasseneinteilung.*

Bew: *1) $i \in A_i$ (Refl.) $\Rightarrow \bigcup_{i \in A} A_i = A$.*
2) Falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, dann ex. $a \in A$: $(a, i) \in R$ und
$(a, j) \in R \Rightarrow (i, a) \in R$ (Symm.)
$\Rightarrow (i, j) \in R$ (Trans.)
$\Rightarrow A_j \subset A_i$, denn falls $(j, a) \in R \Rightarrow (i, a) \in R$ (Trans.)
(Analog) $\Rightarrow A_i \subset A_j$,
d.h. $A_i = A_j$, falls $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. *q.e.d.*

Definition 1.2.8 *A_i ist eine* **Äquivalenzklasse**, *i ist ein* **Repräsentant** *der Klasse A_i.*

Bsp. 1.2.7 *$S = \bigcup S_i$, S_i = Studenten mit Schuhgröße i.*

Einschub: Prädikate und **Quantoren**

Definition 1.2.9 *Ein* **Prädikat** *auf einer Menge A ist eine Aussageform mit den Mengenelementen als Variablen.*

Bsp. 1.2.8 *Menge S (Studenten), Prädikat P: 'Kommt aus Bayern'*

Mit Prädikaten auf Mengen kann man neue **Existenz**- bzw. **Allaussagen** formulieren.

Bsp. 1.2.9 *Alle Studenten kommen aus Bayern:* $\underset{s\in S}{\forall} P(s)$

Bsp. 1.2.10 *Es existiert mindestens ein Student aus Bayern:* $\underset{s\in S}{\exists} P(s)$

Definition 1.2.10 *Die Symbole $\forall$ heißen der* **All-Quantor**, *bzw. $\exists$ der* **Existenz-Quantor**. *Alternative Schreibweisen $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ Wahrheitswerte sind definiert gemäß*

$$\underset{s\in S}{\forall} P(s) \Leftrightarrow \big(P(s_1) \wedge P(s_1) \wedge P(s_3) \dots\big)$$

$$\underset{s\in S}{\exists} P(s) \Leftrightarrow \big(P(s_1) \vee P(s_1) \vee P(s_3) \dots\big)$$

1.3 Zahlen

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.' L. Kronecker (1823-91).

Definition 1.3.1 *Die Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *ensteht durch sukzessives Hinzufügen ('Addition') von '1'.*

Bemerkung $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$

Zulässige Operationen

Addition $m + n = m + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ (n Mal)

Multiplikation $m \cdot n = m + m + m + \dots + m$ (n Mal)

Vergleich $m \geq n \Leftrightarrow$ (es ex. ein $l \in N$ mit $m = n + l$)

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Subtraktion in $\mathbb{N}_0$ wird definiert via $(m - n = l) \Leftrightarrow (m = n + l)$, falls $m \geq n$

Definition 1.3.2 *1)* $(z \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ *(es ex. $m, n \in \mathbb{N}$ so dass 'z'='m-n')*
2) $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow$ *(es ex. ein $l \in \mathbb{N}_0$: $m_1 = m_2 + l$ und $n_1 = n_2 + l$)*

Beispiel '2-5'='1-4'='97-100'='0-3'= '-3'

Zulässige Operationen Addition, Multiplikation, Vergleich, Subtraktion

Bemerkung (-1)$*$(-1)= '0-1'$*$'0-1'= '$(0*0+1*1)$-$(0*1+1*0)$'='1-0'=1.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Division in $\mathbb{Z}$	wird definiert via $(p \div r = q) \Leftrightarrow (p = q * r)$, falls r Teiler von p
Definition 1.3.3	*1)* $(q \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow$ *(es ex.* $p, r \in \mathbb{Z}$ *so dass '*q*'='*$p \div r$*')* *2)* $q_1 = q_2) \Leftrightarrow$ *(es ex. ein* $t \in \mathbb{Z}$*:* $p_1 = p_2 * t$ *und* $r_1 = r_2 * t$*)*
Beispiel	'12$\div$ 30='6 $\div$ 15' = '2 $\div$ 5'= '$\frac{2}{5}$'
Definition '$\geq$'	$(q = \frac{m}{n} > 0) \Leftrightarrow (m \cdot n > 0)$ $(q_1 > q_2) \Leftrightarrow (q_1 - q_2 > 0)$
Zulässige Operationen	Addition, Multiplikation, Vergleich, Subtraktion Division

'Unvollständigkeit' der rationalen Zahlen

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (dh. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele π (Flächeninhalt des Kreise mit Radius 1)
$\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)

Satz 1.3.1 *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).*

Bew: *Widerspruchsbeweis: Falls $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, so können wir den Bruch so weit kürzen, dass p und q teilerfremd sind.*
Folglich (Quadrieren) $2 = \frac{p^2}{q^2}$, d.h. $p^2 = 2q^2$, somit ist p^2 eine gerade Zahl. Also muss p selbst gerade sein, denn sonst wäre p^2 ungerade. Also ist $p = 2r$ mit einem $r \in \mathbb{N}$. Also $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und (Kürzen) somit $q^2 = 2r^2$, d.h. q^2 ist ebenfalls gerade, somit auch q selbst, d.h. $q = 2s$ mit einem $s \in \mathbb{N}$. Ingseamt erhalten wir also, dass $\frac{p}{q} = \frac{2s}{2r}$, was nicht teilefremd ist, also Widerspruch. *q.e.d.*

1.4 Die rellen Zahlen

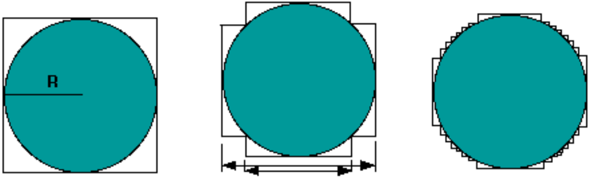
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (dh. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele $\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)
π (Flächeninhalt des Kreise mit Radius 1)

Ansatz Approximation durch rationale Zahlen.

Beispiel: π



Definition 1.4.1 (Intuitiv) *Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist eindeutig als 'größte untere Schranke' einer geeigneten Teilmenge $M \subset \mathbb{Q}$ definiert.*

Bemerkung $\mathbb{R} \simeq$ 'Zahlengerade'

Approximation durch Intervallschachtelung

Bsp. 1.4.1

$$s = \sqrt[3]{2} = ?$$

1. Schritt
$$\left.\begin{array}{ll} 1^3 < 2 & \Rightarrow 1 < s \\ 2^3 = 8 > 2 & \Rightarrow s < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow s \in]1,2[=:]a_1, b_1[.$$

2. Schritt $m_1 = \frac{b_1+a_1}{2} = \frac{3}{2}$ *(Intervallmittelpunkt)*

$$m_1^3 = \frac{27}{8} > 2 \Rightarrow s < m_1 \Rightarrow s \in]a_1, m_1[=:]a_2, b_2[$$

3. Schritt $m_2 = \frac{b_2+a_2}{2} = \frac{5}{4}$ *(Intervallmittelpunkt)*

$$m_2^3 = \frac{125}{64} < 2 \Rightarrow s > m_2 \Rightarrow s \in]m_2, b_2[=:]a_3, b_3[$$

4. Schritt $m_3 = \frac{b_3+a_4}{2} = \frac{11}{8}$ *(Intervallmittelpunkt)*

$$m_3^3 = \frac{1331}{512} > 2 \Rightarrow s < m_3 \Rightarrow s \in]a_3, m_3[=:]a_4, b_4[$$

nach 4 Schritten

$$\boxed{s \in]\tfrac{5}{4}, \tfrac{11}{8}[=]1.25, 1.375[} \quad (s \simeq 1,26).$$

Definition 1.4.2 *Sei A eine Menge, dann heißt*

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) \in A \times A \times A \cdots$$

eine **Folge** *in A. Falls $A = \mathbb{Q}$ so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (rationale) Zahlenfolge.*

Definition 1.4.3 *Eine (rationale) Zahlenfolge (a_n) heißt* **monton wachsend**, *falls $a_{n+1} \geq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ und* **monton fallend**, *falls $a_{n+1} \leq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definition 1.4.4 *Eine (rationale) Zahlenfolge heißt* **Nullfolge**, *falls*

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : |a_n| \leq \frac{1}{M}.$$

Bemerkung *Für $q \in \mathbb{Q}$ ist* $|q| := \begin{cases} q & \text{falls } q \geq 0 \\ -q & \text{falls } q < 0. \end{cases}$

Bsp. 1.4.2 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.

Bemerkung *Def. 1.4.4 $\Leftrightarrow$ '(a_n) schließlich beliebig nahe bei Null.'*

(Exkurs über Nullfolgen)

Satz 1.4.1 *Die Summe von zwei Nullfolgen ist eine Nullfolge.*

Lemma 1.4.1 $\forall\, p, q \in \mathbb{Q} : |p+q| \leq |p| + |q|$ *('Dreiecksungleichung').*

Bew: *(Fallunterscheidung)*

1) $p, q \geq 0$: $\quad |p+q| = p+q \quad \surd$

2) $p, q \leq 0$: $\quad |p+q| = -(p+q) = (-p)+(-q) = |p|+|q| \quad \surd$

3) $p > 0,\ q \leq 0, p+q > 0$:
$|p+q| = p+q = |p|-|q| \leq |p|+|q| \quad \surd$

4) $p > 0,\ q \leq 0,\ p+q \leq 0$:
$|p+q| = -(p+q) = -p-q = |q|-|p| \leq |p|+|q| \quad \surd$ *q.e.d.*

Bew: (Satz 1.4.1) *Sei* $M > 0$ *und* $N_1 : |a_n| \leq \frac{1}{2M} \forall n \geq N_1$ *bzw.*
$N_2 : |a'_n| \leq \frac{1}{2M} \forall n \geq N_2$.

$$\Rightarrow |a_n + a'_n| \leq |a_n| + |a'_n| \leq \frac{1}{2M} + \frac{1}{2M} = \frac{1}{M} \forall n \geq \max(N_1, N_2).$$

q.e.d.

Intervallschachtelungen

Definition 1.4.5 *Eine Menge der Form*

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq a \wedge q \leq b\} =: [a, b]$$

heißt ein (rationales) Intervall.

Definition 1.4.6 *Eine Folge von (rationalen) Intervallen* $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt (rationale)* **Intervallschachtelung**, *falls*

1) $b_n - a_n$ *ist eine Nullfolge*

2) $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N$: $(a_{n+1} \geq a_n) \wedge (b_{n+1} \leq b_n)$.

Bemerkung *2)* $\Leftrightarrow \begin{cases} (a_n) \text{ 'schließlich monoton wachsend'} \\ (b_n) \text{ 'schließlich monoton fallend'.} \end{cases}$

Definition 1.4.7 *Eine Intervallschachtelung* $([a_n, b_n])$ *heißt*
1) **positiv**, *wenn* $\exists N \in N, \forall n \geq N : a_n > 0$,
2) **negativ**, *wenn* $\exists N \in N, \forall n \geq N : b_n < 0$.
3) und andernfalls heißt $([a_n, b_n])$ **null-kongruent**.

Bemerkung *1)* $\Leftrightarrow$ '$([a_n, b_n]) > 0$' $\Leftrightarrow$ (a_n) *'schließlich positiv'*.
2) $\Leftrightarrow$ '$([a_n, b_n]) < 0$' $\Leftrightarrow$ (b_n) *'schließlich negativ'*.

Satz 1.4.2 *Falls* $([a_n, b_n])$ *null-kongruent, so sind* (a_n) *und* (b_n) *Nullfolgen.*

Bew: *Für* N_1 *hinreichend groß ist* $(a_n)_{n \geq N_1}$ *monoton wachsend und* $(b_n)_{n \geq N_1}$ *monoton fallend. Somit muss auch gelten, dass* $a_n \leq 0 \, \forall n \geq N_1$, *denn andernfalls wäre wegen der Monotonie von* $(a_n)_{n \geq N_1}$ *die Intervallschachtelung positiv. Analog gilt, dass* $b_n > 0 \, \forall n \geq N_1$.

Sei $M > 0$, *dann ex.* $N_2 \geq 0$, *s.d.* $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{M} \, \forall n \geq N_2$.
Folglich gilt für alle $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$|a_n| = -a_n \leq b_n - a_n = |b_n - a_n| \leq \frac{1}{M}. \qquad q.e.d.$$

Rechnen mit Intervallschachtelungen

Definition 1.4.8 *Es seien $([a_n, b_n])$ bzw. $([a'_n, b'_n])$ Intervallschachtelungen. Dann definiert man $+$, $-$, $\cdot$ und $\div$ wie folgt*

'$+$'
$$([a_n, b_n]) + ([a'_n, b'_n]) := ([a_n + a'_n, b_n + b'_n])$$

'$-$'
$$([a_n, b_n]) - ([a'_n, b'_n]) := ([a_n, b_n]) + (-([a'_n, b'_n]))$$
$$\text{mit } \; -([a_n, b_n]) := ([-b_n, -a_n])$$

'$\cdot$'
$$([a_n, b_n]) \cdot ([a'_n, b'_n]) :=$$
$$\begin{cases} ([a_n \cdot a'_n, b_n \cdot b'_n]) & \text{falls } ([a_n, b_n]) > 0, ([a'_n, b'_n]) > 0 \\ -\big((-([a_n, b_n])) \cdot ([a'_n, b'_n])\big) & \text{falls } ([a_n, b_n]) < 0, ([a'_n, b'_n]) > 0 \\ -\big(([a_n, b_n]) \cdot (-([a'_n, b'_n]))\big) & \text{falls } ([a_n, b_n]) > 0, ([a'_n, b'_n]) < 0 \\ \big(-([a_n, b_n])\big) \cdot \big(-([a'_n, b'_n])\big) & \text{falls } ([a_n, b_n]) < 0, ([a'_n, b'_n]) < 0 \\ ([0, 0]) & \text{sonst.} \end{cases}$$

'$\div$' *Falls $([a_n, b_n])$ nicht null-kongruent, dann*
$$([a_n, b_n]) \div ([a'_n, b'_n]) := ([a_n, b_n]) \cdot ([a'_n, b'_n])^{-1}$$
$$\text{mit } \; ([a'_n, b'_n])^{-1} := \begin{cases} ([(b'_n)^{-1}, (a'_n)^{-1}]) & \text{falls } ([a'_n, b'_n]\,) > 0 \\ -\big((-[a'_n, b'_n])^{-1}\big) & \text{falls } ([a'_n, b'_n]) > 0. \end{cases}$$

Satz 1.4.3 *Für zwei Intervallschachtelungen* $([a_n, b_n]), ([a'_n, b'_n])$ *sind* $([a_n, b_n]) + ([a'_n, b'_n])$, $([a_n, b_n]) - ([a'_n, b'_n])$ *und* $([a_n, b_n]) \cdot ([a'_n, b'_n])$ *wieder Intervallschachtelungen.* *Falls* $([a'_n, b'_n])$ *nicht null-kongruent, sind* $([a'_n, b'_n])^{-1}$ *bzw.* $([a_n, b_n]) \div ([a'_n, b'_n])$ *wieder Intervallschachtelungen.*

Bew: **Für '$+$'**:
(a_n) *schließlich monoton wachsend,* (a'_n) *schließlich monoton wachsend* $\Rightarrow (a_n + a'_n)$ *schließlich monoton wachsend.* $\surd$
Analog: $(b_n + b'_n)$ *schliesslich monoton fallend.* $\surd$
Ferner: $(b'_n + b_n) - (a'_n + a_n) = (b_n - a_n) + (b'_n - a_n)$ *Summe zweier Nullfolgen, also wieder Nullfolge.* $\surd$

Für '$-$':
Beh.: $-([a_n, b_n]) = ([-b_n, -a_n])$ *ist eine Intervallschachtelung, denn* (b_n) *schließlich* $\nearrow$*, daher* $(-b_n)$ *schließlich* $\searrow$*, Analog ist* $(-a_n)$ *schließlich* $\searrow$*. Außerdem* $(-a_n - (-b_n)) = b_n - a_n$ *Nullfolge* $\surd$*.*
$\Rightarrow ([a_n, b_n]) - ([a'_n, b'_n]) := ([a_n, b_n]) + (-([a'_n, b'_n]))$ *ist Intervallschachtelung.*

Bew: (Forts.)

Für '·': 1. Fall: $([a_n, b_n]) > 0$ *und* $([a'_n, b'_n]) > 0$*:*
(a_n) *schließlich* $\nearrow$ *und positiv,* (a'_n) *schließlich* $\nearrow$ *und positiv*

$$a_{n+1} \cdot a'_{n+1} = a_n \cdot a'_{n+1} + (a_{n+1} - a_n) \cdot a'_{n+1} \geq a_n \cdot a'_{n+1} = \cdots \geq a_n \cdot a'_n,$$

$\Rightarrow (a_n \cdot a'_n)$ *schließlich* $\nearrow$*; ... und* $(b_n \cdot b'_n)$ *schließlich* $\searrow$. $\surd$
Ferner gilt wegen schließlich $0 \leq a_n \leq b_n \leq$ *und* $(b_n) \searrow$*, dass*

$$0 < a_n \leq b_n \leq b_{N_1} \,\forall\, n \geq N_1,$$

bzw. analog

$$0 < a'_n \leq b'_n \leq b'_{N_2} \,\forall\, n \geq N_2$$

D.h
$\forall n \geq \max(N_1, N_2)$ *ist* $\max(a_n, b_n, a'_n, b'_n) \leq \max(b_{N_1}, b'_{N_2}) =: B$.

Gegeben $M > 0$ *: Wähle* $L \in \mathbb{N}$*,* $L \geq 2M \cdot B$ *und* $N_3, N_4 \in \mathbb{N}$*, s.d.* $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{L}\ \forall n \geq N_3$*,* $|b'_n - a'_n| \leq \frac{1}{L}\ \forall n \geq N_4$*.Dann gilt für alle* $n \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$

$$\begin{aligned} 0 \leq b_n b'_n - a_n a'_n &= b_n(b'_n - a'_n) + a'_n(b_n - a_n) \\ &\leq B \cdot (b'_n - a'_n) + B \cdot (b_n - a_n) \leq \frac{2B}{L} \leq \frac{1}{M}. \quad \surd \end{aligned}$$

Bew: (Forts.)

Für '$\cdot$': Fälle 2)–4): *Rückführung auf den Fall 1) unter Verwendung von '$-$'.* $\surd$

5. Fall: Falls $([a_n, b_n])$ *oder* $([a'_n, b'_n])$ *null-kongruent:*
$([a_n, b_n]) \cdot ([a'_n, b'_n]) := ([0, 0])$ *Intervallschachtelung* $\surd$

Für '$\div$':
Zeige für $([a_n, b_n]) > 0$ *gilt:* $([a_n, b_n])^{-1} := ([b_n^{-1}, a_n^{-1}])$ *ist eine Intervallschachtelung:*
Da schließlich $0 < (a_n) \nearrow$*, ist* $(\frac{1}{a_n})$ *schließlich* $\searrow$*. Analog* $(\frac{1}{b_n})$ *schließlich* $\searrow$*.* $\surd$
Für Nullfolgeneigenschaft der Intervallbreiten: Schließlich gilt

$$0 < A := a_{N_1} < a_n < b_n$$

Und somit schließlich auch

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leq \frac{1}{A^2}(b_n - a_n) \leq \frac{1}{LA^2} \leq \frac{1}{M} . \surd$$

Die anderen Fälle von $\div$ *folgen hieraus durch Verwendung von '$\cdot$' und '$-$'.* *q.e.d.*

Definition 1.4.9 *Zwei Intervallschachtelungen* $([a_n, b_n])$ *und* $([a'_n, b'_n])$ *heißen kongruent, falls* $(b'_n - a_n)$ *eine Nullfolge ist. Schreibweise:* $([a_n, b_n]) \sim ([a'_n, b'_n])$.

Satz 1.4.4 *Die Kongruenz* $\sim$ *definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Intervallschachtelungen.*

Bew: (Satz 1.4.4)

Reflexivität $\surd$

Symmetrie *Falls* $([a_n, b_n]) \sim ([a'_n, b'_n]) \Leftrightarrow b'_n - a_n$ *Nullfolge. Dann*

$$b_n - a'_n = b_n - a_n + a_n - b'_n + b'_n - a'_n = (b_n - a_n) + (a_n - b'_n) + (b'_n - a'_n)$$

Also $b_n - a'_n$ *Summe dreier Nullfolgen* $\Rightarrow$ *Nullfolge.*
$\Rightarrow ([a'_n, b'_n]) \sim ([a_n, b_n])$ $\surd$

Transitivität *Sei* $([a_n, b_n]) \sim ([a'_n, b'_n])$ *und* $([a'_n, b'_n]) \sim ([a''_n, b''_n])$*, dann*

$$b''_n - a_n = b''_n - a'_n + a'_n - b'_n + b'_n - a_n$$

Also $b''_n - a_n$ *Summe dreier Nullfolgen* $\Rightarrow$ *Nullfolge.*
$\Rightarrow ([a''_n, b''_n]) \sim ([a_n, b_n])$ *q.e.d.*

Definition 1.4.10 *Die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen heißt* **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. *D.h. jede Intervallschachtelung* $([a_n, b_n])$ *definiert eine reelle Zahl gemäß*

$$r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow r = \left\{ ([a_n', b_n']) \,\middle|\, ([a_n', b_n']) \sim ([a_n, b_n]) \right\}$$

Bemerkung *Schreibweise* $r = \{([a_n, b_n])\}$ *bzw.* $r = r_{(a_n, b_n)}$.

Bemerkung *Jede Intervallschachtelung* $([a_n, b_n])$ **repräsentiert** *eine reelle Zahl* $r \in \mathbb{R}$, *wobei zwei verschiendene Intervallschachtelungen dieselbe reelle Zahl* $r \in \mathbb{R}$ *repräsentieren genau dann, wenn sie zueinander kongruent sind.*

Bemerkung *Die rationalen Zahlen sind in* $\mathbb{R}$ *repräsentiert durch die konstanten Folgen von einpunktigen Intervallen, d.h.*

$$q = \{([q, q])\} = r_{(q,q)} \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Somit gilt inbsesondere $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Satz 1.4.5 *Die Operationen* $+, -, \cdot, \div$ *aus Definition 1.4.8 sind verträglich mit der Kongruenz* $\sim$*, d.h. falls* $([a_n, b_n]) \sim ([A_n, B_n])$ *und* $([a'_n, b'_n]) \sim ([A'_n, B'_n])$*, so gilt*

$$([a_n, b_n]) + ([a'_n, b'_n]) \sim ([A_n, B_n]) + ([A'_n, B'_n]).$$

Entsprechend für $-$*,* $\cdot$ *und, falls* $([a'_n, b'_n]) \not\sim [0, 0]$*, für* $\div$*.*

Bew: (Am Beispiel '+') *Zu zeigen:* $([a_n, b_n]) + ([a'_n, b'_n]) \sim ([A_n, B_n]) + ([A'_n, B'_n])$*, falls* $([a_n, b_n]) \sim ([A_n, B_n])$ *und* $([a'_n, b'_n]) \sim ([A'_n, B'_n])$

$([a_n, b_n]) + ([a'_n, b'_n]) = ([a_n + a'_n, b_n + b'_n])$,

$([A_n, B_n]) + ([A'_n, B'_n]) = ([A_n + A'_n, B_n + B'_n])$

$(B_n + B'_n) - (a_n + a'_n) = (B_n - b_1) + (B'_n - b'_n) + (b_n - a_n) + (b'_n + a'_n)$

Summe von vier Nullfolgen $\Rightarrow$ *Nullfolge* $\Rightarrow$ *Behauptung.* $\surd$

Definition 1.4.11 *Die Addition $+$ wird auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$r + r' := \{[a_n + a'_n, b_n + b'_n]\},$$

wobei

$$r = \{([a_n, b_n])\} \quad r' = \{([a'_n, b'_n])\}.$$

Bzw. in Kurzform

$$r_{(a_n,b_n)} + r_{(a'_n,b'_n)} := r_{(a_n+a'_n,b_n+b'_n)}.$$

Analog: Subtraktion $r - r'$, Multiplikation $r \cdot r'$ und, sofern $r' \neq r_{(0,0)}$, Division $r \div r'$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung *In Kurzschreibweise erhalten wir somit*

'+' $$r_{(a_n,b_n)} + r_{(a'_n,b'_n)} := r_{(a_n+a'_n,b_n+b'_n)}$$

'−' $$r_{(a_n,b_n)} - r_{(a'_n,b'_n)} := r_{(a_n-b'_n,b_n-a'_n)}$$

'·' $$r_{(a_n,b_n)} \cdot r_{(a'_n,b'_n)} := \begin{cases} r_{(a_n\cdot a'_n,b_n\cdot b'_n)} & \textit{falls schl. } (a_n) > 0, (a'_n) > 0 \\ r_{(a_n\cdot b'_n,a'_n\cdot b_n)} & \textit{falls schl. } (b_n) < 0, (a'_n) > 0 \\ r_{(a'_n\cdot b_n,a_n\cdot b'_n)} & \textit{falls schl. } (b_n) > 0, (a'_n) < 0 \\ r_{(b_n\cdot b'_n,a_n\cdot a'_n)} & \textit{falls schl. } (b_n) < 0, (a'_n) < 0 \\ r_{(0,0)} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

'÷' *Falls* $r_{(a'_n,b'_n)} \not\sim r_{(0,0)}$ *dann*

$$r_{(a_n,b_n)} \div r_{(a'_n,b'_n)} := r_{(a_n,b_n)} \cdot \left(r_{(a_n,b_n)}\right)^{-1}$$

$$\textit{mit} \;\; \left(r_{(a'_n,b'_n)}\right)^{-1} := r_{((b'_n)^{-1},(a'_n)^{-1})}.$$

Bemerkung *Diese Definition setzt bekannten Operationen von* $\mathbb{Q}$ *auf* $\mathbb{R}$ *fort, d.h.* $r_{(q,q)} + r_{(q',q')} = r_{(q+q',q+q')}$ *etc. für* $q, q' \in \mathbb{Q}$.

Satz 1.4.6 *Auf* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ist ein* **Körper**, *d.h. es gilt*

1) (Assoziativgesetz für $+$*)*

$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

2) (Kommutativgesetz für $+$*)*

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

3) (Neutrales Element für $+$*): Mit* $0 := r_{(0,0)}$ *gilt für alle*

$$r \in \mathbb{R}\text{: } r + 0 = r \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

4) (Inverses Element für $+$*): Zu jedem* $r \in \mathbb{R}$ *ex. ein* $r' \in \mathbb{R}$ *mit*

$$r + r' = 0$$

5) (Assoziativgesetz für $\cdot$*)*

$$(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

6) (Kommutativgesetz für $\cdot$*)*

$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

7) (Neutrales Element für $\cdot$*): Mit* $1 := r_{(1,1)}$ *gilt für alle*

$$r \in \mathbb{R}\text{: } r \cdot 1 = r$$

8) (Inverses Element für $\cdot$*): Zu jedem* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ex. ein* $\tilde{r} \in \mathbb{R}$*:*

$$r \cdot \tilde{r} = 1$$

9) Distributivgesetz

$$r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$$

Bew: *1) – 3) (Nachrechnen)* $\surd$

4): Zu $r = r_{(a_n,b_n)}$ *sei* $r' = -r = r_{(-b_n,-a_n)}$. *Dann ist*

$$r + r' = r_{(a_n-b_n,b_n-a_n)} = r_{(0,0)} = 0,$$

weil $([a_n - b_n, b_n - a_n]) \sim ([0,0])$. $\surd$

5) – 7) (Nachrechnen) $\surd$

8) Zu $r =_{(a_n,b_n)} > 0$ *sei* $\tilde{r} = r_{(b_n^{-1},a_n^{-1})}$, *dann ist*

$$r \cdot \tilde{r} = r_{(\frac{a_n}{b_n},\frac{b_n}{a_n})} = r_{(1,1)},$$

denn $([\frac{a_n}{b_n}, \frac{b_n}{a_n}]) \sim ([1,1])$ *(Übung).*

9) (Nachrechnen) $\surd$ *q.e.d.*

Bemerkung *Die Konstruktion von* $\mathbb{R}$ *als Zahlenmenge mit Rechenoperationen ist damit fertiggestellt. Wir studieren noch einige Eigenschaften.*

Definition 1.4.12

1) Für $r = r_{(a_n,b_n)}$ ist $-r := r_{(-b_n,-a_n)}$.
2) Eine reelle Zahl $r = r_{(a_n,b_n)}$ heißt **nicht negativ** *falls $([a_n, b_n])$ positiv oder null-kongruent ist. Falls $([a_n, b_n]) > 0$ heisst r* **(strikt) postiv**. *Schreibweise: $r \geq 0$ bzw. $r > 0$.*

3) Wir sagen für $r, r' \in \mathbb{R}$, dass r **(strikt) größer als** *r ist, falls*
$$r - r' > 0 \text{ bzw. } r - r' \geq 0.$$
Analog $r < r' :\Leftrightarrow r' - r > 0$ und $r \leq r' :\Leftrightarrow r' - r \geq 0$

4) Der **Absolutbetrag** *$|r|$ eine reellen Zahl ist definiert durch*
$$|r| = \begin{cases} r & \text{falls } r > 0 \text{ oder } r = 0 \\ -r & \text{sonst.} \end{cases}$$

5) Der **Abstand** *zweier reller Zahlen ist definiert als*
$$d(r, r') := |r - r'|$$
6) Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt Nullfolge, falls $\forall M \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : |a_n| \leq \frac{1}{M}$.

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.4.13 *1) Eine Menge der Form*

$$\{r \in \mathbb{R} \mid q \geq a \wedge q \leq b\} =: [a, b]$$

mit $a, b, \in \mathbb{R}$ *heißt ein relles Intervall.*
2) Eine Folge von reellen Intervallen $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt reelle* **Intervallschachtelung**, *falls*

- *i)* $b_n - a_n$ *ist eine Nullfolge*
- *ii)* $\forall n \in \mathbb{N} : (a_{n+1} \geq a_n) \wedge (b_{n+1} \leq b_n)$.

Satz 1.4.7 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) *Eine reelle Intervallschachtelung hat genau einen* **inneren Punkt**, *d.h. es ex. genau ein* $r \in \mathbb{R}$, *s.d.*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{r\}$$

Lemma 1.4.2 *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $M > 0$. Dann ex. $q, q' \in \mathbb{Q}$ mit $q > r$ und $q' < r$ und $d(q, r) \leq \frac{1}{M}$ bzw. $d(q', r) \leq \frac{1}{M}$.*

Bew: *(Übung)*

Bew: (Satz 1.4.7) **Existenz**:
1) Falls $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in N : b_n = b_N \Rightarrow b_N \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$
2) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in N : a_n = a_N \Rightarrow a_N \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$
3) Andernfalls wähle aus der Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Folgeglieder von Intervallen, die paarweise strikt ineinander enthalten sind. Die Durchschnittsmenge sämtlicher ausgewählter Intervalle ist identisch zur ursprünglichen Durchschnittsmenge. Somit kann man in Fall 3) o.B.d.A. davon ausgehen, dass (a_n) strikt monoton wachsend und (b_n) strikt monoton fallend sind. Also $a_{n+1} - a_n > 0$ und $b_n - b_{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mit obigem Lemma findet man $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$, s.d.

$$a_n \leq \alpha_n \leq a_{n+1} \text{ bzw. } b_n \geq \beta_n \geq b_{n+1}.$$

Somit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $r_{(\alpha_n,\beta_n)} \in [a_k, b_k]$.
Folglich auch $r_{(\alpha_n,\beta_n)} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}[a_k, b_k] \quad \checkmark$
Eindeutigkeit: *(Übung)* *q.e.d.*

1.5 Teilmengen in $\mathbb{R}$

Infimum und Supremum

Definition 1.33 *1) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt* **nach oben bzw. nach unten beschränkt**, *falls ein u bzw. o existieren, so dass*

$$u \leq m \; \forall m \in M \quad \text{bzw.} \quad o \geq m \; \forall m \in M.$$

In diesem Fall heiß u bzw. o eine **untere bzw. obere Schranke von** *M. Schreibweise $u \leq M$ bzw. $o \geq M$. Falls $u \leq M$ und $M \leq o$ für $u, o \in \mathbb{R}$, so heißt M* **(beidseitig) beschränkt.**
2) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte Menge und $u \leq M$ u heißt **Infimum von** *M, falls es eine größte untere Schranke von M ist, d.h. falls gilt*

$$\tilde{u} \leq M \Rightarrow \tilde{u} \leq u.$$

Schreibweise $u = \inf M$. Analog **Supremum** *$o = \sup M$, falls o die* **kleinste obere Schranke von M**.
3) Eine Zahl u heißt **Minimum von M**, *falls $u = \inf M$ und $u \in M$. Schreibweise $u = \min M$. Analog $o = \max M$, falls $o = \sup M$ und $o \in M$.*

Satz 1.10 *Jede nichtleere nach unten beschr. Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Lemma 1.3 *Für $M \subset \mathbb{R}$, sei $(u_n)_{n\in N}$ eine Folge mit $u_n \leq M \,\forall n \in \mathbb{N}$. Falls $u \in \mathbb{R}$ mit $(u_n - u)$ Nullfolge, so gilt auch $u \leq M$.*

Bemerkung $(u_n - u)$ *Nullfolge* $:\Leftrightarrow (u_n)$ **'konvergiert gegen u'** *(Später).*

Bew: (Lemma) *Sei $m \in M$. Angenomen $u > m$, dann ex. $K > 0$, s.d.*

$$u - m > \frac{1}{K}.$$

Sei $n \in N$, s.d. $|u_n - u| \leq \frac{1}{2K}$, dann

$$\begin{aligned} u_n - m = u_n - u + u - m &\geq u - m - |u_n - u| \\ &\geq u - m - \frac{1}{2}(u - m) = \frac{1}{2}(u - m) > 0, \end{aligned}$$

also $u_n > m$, im Widerspruch zu $u_n \leq m \,\forall m \in M$. *q.e.d.*

Bew: (Satz 1.10) *(Konstruktion durch Intervallschachtelung.) Es sei* $u \leq M$ *und* $m \in M$. *Setze* $I_1 = [u, m] =: [u_1, m_1]$. *Sei* $s_1 = \frac{u_1 + m_1}{2}$.

– *Falls* $s_1 \leq M$, *setze* $[s_1, m_1] =: I_2 =: [u_2, m_2]$.

– *Falls* $s_1 \not\leq M$, *dann existiert ein* $m_2 \in M : m_2 \leq s_1$. *Dann setze* $[u_1, m_2] =: I_2 =: [u_2, m_2]$

In beiden Fällen:

$I_2 = [u_2, m_2] \subset I_1; \quad m_2 \in M; \quad u_2 \leq M; \quad m_2 - u_2 \leq \frac{1}{2}(m_1 - u_1)$.

Iteration des Verfahrens $\to$ *Folge* $(I_n = [u_n, m_n])_{n \in \mathbb{N}}$ *mit*

1) $I_{n+1} \subset I_n$

2) *Länge*$(I_{n+1}) \leq (\frac{1}{2})^n$ *Länge* (I_1)

3) $u_n \leq M$, $m_n \in M$

Aus 1) & 2) $\Rightarrow$ (I_n) *ist eine Intervallschachtelung.*

(Vollständigkeit von $\mathbb{R}$*)* $\Rightarrow$ *es ex. genau ein* $r \in \bigcap_n I$.

(Übung:) $(u_n - r)$ *und* $(r - m_n)$ *sind Nullfolgen.*

– *(Lemma)* $\Rightarrow r \leq M$. $\surd$

– r *ist größte unt. Schranke: Falls ex.* $\hat{u} > r$ *mit* $\hat{u} \leq M$, *dann wähle* m_n, *s.d.* $r - m_n < \frac{1}{2}(\hat{u} - r)$. *Dann gilt*

$$\hat{u} - m_n = \hat{u} - r + r - m_n > \frac{1}{2}(\hat{u} - r) > 0$$

also $\hat{u}$ *keine obere Schranke von* m, *d.h. Widerspruch.* $\surd$ *q.e.d.*

Bemerkung *Die Analoge Aussage gilt in $\mathbb{Q}$ nicht: Bsp.* $M = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \wedge q^2 \geq 2\}$.

Satz 1.11 *Für nach unten beschränktes $M \subset \mathbb{R}$ ist $u = \inf M$ genau dann, wenn $u \leq M$ und $\forall \epsilon > 0$: $\exists m \in M$: $m \leq u + \epsilon$.*

Bew: *'$\Rightarrow$': Widerspruchsbeweis: Fals $\exists \epsilon > 0$, s.d* $u + \epsilon \leq m \forall m \in M \Rightarrow \hat{u} = u + \epsilon$ *ist eine größere untere Schranke von M, also $u \neq \inf(M)$, Widerspruch.*
'$\Leftarrow$': Widerspruchsbeweis: Falls es. ex. eine größere untere Schranke $\hat{u}$, so ist mit $\hat{\epsilon} = \frac{\hat{u} - u}{2}$: $u + \epsilon < \hat{u} \leq m \forall m \in M$, d.h. $\nexists m \in M$: $u + \epsilon \geq m$. *Widerspruch.*

Satz 1.12 *Das Infimum einer Menge M ist eindeutig bestimmt, d.h.* $r = \inf M$ *und* $\tilde{r} = \inf M \Rightarrow r = \tilde{r}$.

Bew: $r = \inf M$ *und* $\tilde{r} \leq M \Rightarrow r \geq \tilde{r}$. *Analog* $\tilde{r} \geq r$. $\Rightarrow r = \tilde{r}$.

Satz 1.13 *Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $-M := \{-m \,|\, m \in M\}$. Dann gilt*

$$\inf M = -\sup(-M).$$

Bew: *(Übung)*

Intervalle

Definition 1.34 *Eine Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt* **Intervall**, *falls für alle $a, b \in I$, $r \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$a \le r \le b \;\Rightarrow\; r \in I.$$

Satz 1.14 *Ein beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist von der Form*
1) $[a, b] := \{r \in \mathbb{R} \,|\, a \le r \le b\}$,
2) $]a, b[:= \{r \in \mathbb{R} \,|\, a < r < b\}$,
3) $[a, b[:= \{r \in \mathbb{R} \,|\, a \le r < b\}$ *oder*
4) $]a, b] := \{r \in \mathbb{R} \,|\, a < r \le b\}$
mit $a = \inf I$ *und* $b = \sup I$.

Bemerkung *Andere Schreibweise für 2)-4):* (a, b), $[a, b)$ *bzw.* $(a, b]$.

Bemerkung *1)* **I 'abgeschlossen'**, *2)* **I 'offen'**, *3) & 4)* **I 'halboffen'**.

Bemerkung *Im einseitig beschränkten Fall gilt analog*
$I =]a, \infty[= \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > a\}$, $I =]\infty, b] = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r \le b\}$ *etc.*

Bew: *Sei* $a = \inf I$ *und* $b = \sup I$.

Fall 1): Falls $a \in I$ *und* $b \in I$ *gilt somit auch* $[a, b] \subset I$. *Angenommen es ex.* $s \in I$ *aber* $s < a$, *so ist* a *keine untere Schranke von* I, *Widerspruch. Analog gibt es kein* $s \in I$ *mit* $s > b$. $\Rightarrow I = [a, b]$.

Fall 3):
Falls $a \in I$ *und* $b \notin I$, *so gilt gibt es für alle hinreichend kleinen* $\epsilon > 0$ *ein* $b' \in I$ *mit* $b' > b - \epsilon$, *und somit* $[a, b'] \subset I$. *Also gilt für alle* $r \geq a$ *und* $r < b$, *dass* $[a, r] \subset I$, *also schließlich auch* $[a, b[\subset I$. *Ferner gibt es kein* $s \in I$ *mit* $s > b$, *weil* b *sonst* $b \not\geq I$. *Außerdem* $b \notin I$ *nach Voraussetzung* $\Rightarrow I = [a, b[$.

Die verbliebenen 2 Fälle analog. *q.e.d.*

Bemerkung *Insbesondere ist ein beschränktes Intervall abgeschlossen genau dann, wenn* $\inf I = \min I$ *und* $\sup I = \max I$. *In Fällen 2) – 4) existieren* $\min I$ *oder* $\max I$ *nicht,* $\inf I$ *und* $\sup I$ *schon.*

Exkurs: Abzählbarkeit

Definition 1.35 *Eine Menge A heißt* **abzählbar** *falls eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A ex. mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Die Folge (a_n) ist dann eine* **Abzählung** *von A. Eine nicht abzählbare Menge heißt* **überabzählbar**.

Satz 1.15 *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Bew: *Mit $q = \frac{z_1}{z_2}$ reicht eine Abzählung aller Zahlenpaare $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hierfür startet man z.B. einen Roboter in $(0,0)$ der stets auf das nächste noch nicht besuchte Feld zu seiner Linken bzw. sonst geradeaus springt.*

Satz 1.16 *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Bew: *Es reicht, die Überabzählbarkeit von $[0,1]$ zu zeigen. Jedes $r \in [0,1]$ ist eindeutig als $r = \rho_1 \cdot \frac{1}{2} + \rho_2 \cdot \frac{1}{4} + \rho_3 \frac{1}{2^3} + \cdots$ repräsentiert, wobei $\rho_i \in \{0,1\}$. Gegeben eine beliebige Folge $(r^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $r^{(n)} \in [0,1]$, dann setze*

$$\hat{\rho}_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } \rho_k^{(k)} = 1 \\ 1 & \text{falls } \rho_k^{(k)} = 0. \end{cases}$$

Für $\hat{r} = \hat{\rho}_1 \cdot \frac{1}{2} + \hat{\rho}_2 \cdot \frac{1}{4} + \hat{\rho}_3 \frac{1}{2^3} + \cdots \in [0,1]$ gilt dann $\hat{r} \neq r^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $(r^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Abzählung von $[0,1]$. *q.e.d.*

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
mrenesse@math.tu-berlin.de

Kapitel 2:

Folgen

2.1 Folgengrenzwerte

Definition 2.1 *Eine unendliches Tupel* $(a_1, a_2, a_3, \cdots) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ *heißt* **(reelle) (Zahlen-) Folge**. *Schreibweisen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bzw.* (a_n).

Bsp. 2.1

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & falls\ n \notin \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \\ 1 & falls\ n \in \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \end{cases}$
- $c_n = (-1)^n$
- $d_n = q^n$ *mit* $q \in \mathbb{R}$
- $e_n = \sin(\frac{1}{n})$
- $f_n = \cos(\frac{1}{n})$
- $g_1 = 2,\ g_{n+1} = \frac{3}{4g_n} + 1$
- $h_1 = 2,\ h_2 = 2,\ h_{n+1} = h_n + h_{n-1}$

Definition 2.2 *Die Zahl* $a \in \mathbb{R}$ *heißt* **Grenzwert von** (a_n), *falls* $(a - a_n)$ *eine Nullfolge ist, d.h. falls*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Schreibweisen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *bzw.* $\lim a_n = a$ *bzw.* $a_n \to a$.

Sprechweisen (a_n) **konvergiert gegen** a.

Bsp. 2.2 $a_n := \frac{1}{n} \to 0.\ \surd.$

Bsp. 2.3 $a_n := \frac{n}{n+1}$. *Beh.* $a_n \to 1$.

Bew: *Sei* $\epsilon > 0$. *Dann gilt für* $n \geq N-1$ *mit* $N \geq \frac{1}{\epsilon}$:
$|a_n - a| = |\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{(n+1)-1}{n+1} - 1| = |-\frac{1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \epsilon.$
denn $n \geq N-1 \Rightarrow n+1 \geq N \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N}$ *und* $\frac{1}{N} \leq \epsilon$.

Bemerkung *Falls es keine Zahl* $a \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $(a - a_n)$ *Nullfolge, so sagen wir, dass* (a_n) **nicht konvergiert**, *d.h.* $\lim a_n$ **ex. nicht.**

Bsp. 2.4

- $$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \notin \{10^k, k = 1, 2, \ldots\} \\ 1 & \text{falls } n \in \{10^k, k = 1, 2, \ldots\} \end{cases}$$
  $\Rightarrow \lim b_n$ *ex. nicht.*
- $$\lim q^n \begin{cases} = 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ = 1 & \text{falls } q = 1 \\ \text{ex. nicht} & \text{falls } |q| > 1 \text{ oder } q = -1 \end{cases}$$
- $\lim \sin(\frac{1}{n}) = 0, \lim \cos(\frac{1}{n}) = 1$

Satz 2.1 *Jede Folge kann höchstens einen Grenzwert haben, d.h. falls $a_n \to a$ und $a_n \to a'$, dann gilt $a = a'$.*

Bew: *(Widerspruchsbeweis) Angen. $a \neq a'$, dann ex. ein $\epsilon > 0$, s.d. $|a - a'| > \epsilon$. Es ex. aber $n \in \mathbb{N}$, s.d. $|a - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ und $|a' - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$, d.h.*

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| \leq \epsilon$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Satz 2.2 *Seien zwei konvergente Folgen $a_n < b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ oder $a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Bew: *(Übung.)*

Satz 2.3 *Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim a_n = \lim c_n$. Dann $\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n$.*

Bew: *(Übung.)*

Bemerkung '$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$' $\Leftrightarrow$ ($\lim a_n$ *ex. und* $\lim a_n = a$).

Satz 2.4 (Folgen - Grenzwertsatz) *Falls* $\lim a_n$ *und* $\lim b_n$ *existieren, dann gilt*

$$\lim(a_n \otimes b_n) = (\lim a_n) \otimes (\lim b_n)$$

wobei $\otimes = +,-$ *bzw.* $\cdot$ *bzw. auch* $\otimes = \div$*, sofern* $\lim b_n \neq 0$.

Bsp. 2.5 $\frac{5}{4} = \frac{5+0}{4+0+0} = \frac{\lim(5+\frac{3}{n^2})}{\lim(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{(5+\frac{3}{n^2})}{(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{5n^2+3}{4n^2+2n+1}$

Lemma 2.1 *Falls* $\lim a_n$ *existiert, so ist* (a_n) *beschränkt, d.h. es ex.* $M \in \mathbb{R}$, *s.d.* $|a_n| \leq M \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bew: *Für* $\lim a_n =: a$, $\epsilon = 1$ *sei* $N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $|a - a_n| \leq 1 \, \forall n \geq N$.
Falls $n \geq N$: $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1$.
$\Rightarrow |a_n| \leq M := \max(|a_1|, \cdots, |a_N|, |a|+1) =: M \, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lemma 2.2 *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. $\square$

Bew: (Satz 2.4) *Für '$\cdot$': Sei* $a_n \to a$, $b_n \to b$. *Seien* $|a_n| \leq M_1$; $|b_n| \leq M_2$; $\epsilon > 0$:
$|a \cdot b - a_n \cdot b_n| = |a(b-b_n) + b_n(a-a_n)| \leq M_1|b-b_n| + M_2|a-a_n|$
$\Rightarrow |a \cdot b - a_n \cdot b_n| \leq \epsilon$ *falls* $|b - b_n| \leq \frac{\epsilon}{2M_1}$ *und* $|a - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2M_2}$. $\square$

Bemerkung *Für den Quotientengrenzwertsatz* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *falls* $\lim b_n \neq 0$ *braucht man noch das folgende Resultat.*

Lemma 2.3 *Falls* $\lim a_n = a \neq 0$, *dann ist auch* $a_n' := \frac{1}{a_n}$ *schließlich beschränkt, d.h. es ex.* $M \geq 0$ *und* $N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $|\frac{1}{a_n}| \leq M \, \forall n \geq N$.

Bew: *Sei* $a_n \to a \neq 0$, *dann ist* $|a| > 0$. *Wähle* $\epsilon = \frac{|a|}{2}$.
Dann ex. $N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $|a - a_n| \leq \frac{|a|}{2} \, \forall n \geq N$.
Ferner $|a| = |(a - a_n) + a_n| \leq |a - a_n| + |a_n|$, *d.h.*

$$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} = \epsilon \, \forall n \geq N.$$

Somit

$$|\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{|a_n|} \leq \frac{1}{\epsilon} =: M \, \forall n \geq N.$$

□

Bemerkung *(Inverse Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag). Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad (*)$$

Bew:

$$\left.\begin{array}{l} |a| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b| \\ |b| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a-b| \end{array}\right\} \Rightarrow (*).$$

□

Satz 2.5 *Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, d.h.*

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ und } a_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mit einem gewissen $A \in \mathbb{R}$, dann ist (a_n) konvergent.

Bemerkung *Analog für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen.*

Bew: *Die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt.*
(Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Es ex. $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
Sei $\epsilon > 0$. (Supremumseigenschaft) Es ex. a_N, s.d. $a - \epsilon < a_N$.
(Monotonie von (a_n)): $a_n \geq a - \epsilon, \forall n \geq N$.

$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - (a - \epsilon) = \epsilon \quad \forall n \geq N. \qquad \square$$

Bsp. 2.6 $a_1 := 2$, $a_{n+1} := a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}\right)$ (Rekursive Folgendefinition)
Beh. $a_n \to \sqrt{2}$.

Bew: **Beh 1.** $a_n \geq \sqrt{2} \, \forall n \in \mathbb{N}$:

Denn $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a\,n} > 0$ *für* $a_n > 0$ *und für* $a > 0$ *ist*

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \frac{a^2}{4} + 1 + \frac{1}{a^2} - 2$$
$$= \frac{a^2}{4} - 1 + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0, \textit{ d.h.}$$
$$\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{2} \quad \forall a > 0$$

Beh 2. (a_n) *ist monoton* $\searrow$:

Denn für da $a_n \geq \sqrt{2}$ *ist*

$a_n^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}\right) \leq a_n$

Beh. 1 & Beh 2 $\Rightarrow \lim a_n$ *existiert.*

Beh 3. $\lim a_n = \sqrt{2}$.

Mit dem Grenzwertsatz gilt

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} = (\lim a_n) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\lim a_n)^2}\right)$$

D.h. für $a := \lim a_n \geq 0$:

$$a = a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2}\right) = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$\square$

Definition 2.3 *1) Die Folge (a_n)* **divergiert bestimmt gegen** $+\infty$, *falls*

$$\forall K \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: a_n \geq K \, \forall n \geq N.$$

2) Die Folge (a_n) **divergiert bestimmt gegen** $-\infty$, *falls*

$$\forall K \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: a_n \leq K \, \forall n \geq N.$$

3) Die Folge (a_n) **wächst über alle Grenzen**, *falls*

$$\forall K \geq 0 \, \exists N \in \mathbb{N}: |a_n| \geq K \, \forall n \geq N.$$

Bemerkung $(1 \vee 2) \Rightarrow 3$, *aber i.A.* $3 \not\Rightarrow (1 \vee 2)$

Bemerkung *Schreibweisen*

1) $\Leftrightarrow a_n \to \infty$

2) $\Leftrightarrow a_n \to -\infty$

3) $\Leftrightarrow |a_n| \to \infty$

Bemerkung *Andere Sprechweise*

'(a_n) konvergiert nicht' $:\Leftrightarrow$ **'(a_n) divergiert'.**

Bsp. 2.7 *1)* $a_n = (-1)^n$ *konvergiert nicht (= 'divergiert').*

2) $a_n = n$ *divergiert best. gegen* $+\infty$.

3) $a_n = -n$ *divergiert best. gegen* $-\infty$.

4) $a_n = (-1)^n \cdot n$ *wächst über alle Grenzen.*

2.2 Teilfolgen

Definition 2.4 *Es sei* $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ *eine Folge und*

$$(n_k) = (n_1, n_2, \cdots) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots$$

eine strikt monotone (Index-)Folge in $\mathbb{N}$*. Dann heißt*

$$(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots$$

eine **Teilfolge von** (a_n)*.*

Bemerkung *Bedeutung:* (n_k) **Auswahlfolge**. (a_{n_k}) *geht aus* (a_n) *durch Auswahl der Folgenindizes* $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *hervor.*

Bsp. 2.8

- $a_n = (-1)^n$, $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = 1 \quad \forall k$.
- $a_n = \frac{1}{n}$, $n_k = 2^k \Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Satz 2.6 $a_n \to a$ *genau dann, wenn* $a_{n_k} \to a$ *für jede Teilfolge* (a_{n_k})*.*

Bew: '$\Rightarrow$': *Zu* $\epsilon > 0$ *sei* $N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $|a - a_n| \leq \epsilon \, \forall n \geq N$. *Sei* $K \in \mathbb{N}$, *s.d.* $n_k \geq N \, \forall \, k \geq K$, *dann gilt*

$$|a - a_{n_k}| \leq \epsilon \, \forall k \geq K.$$

'$\Leftarrow$': *Falls* $a_n \not\to a$, *so ex* $\epsilon > 0$, *s.d.* $|a - a_n| \geq \epsilon$ *für unendlich viele* $n \rightsquigarrow$ *Teilfolge.* $\square$

Satz 2.7 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Bew: *Zu* (a_n) *beschränkt sei* $A_n := sup\{a_k \mid k \geq n\}$, *dann ist* (A_n) *fallend und beschränkt, also konvergent. Sei* $\mu \in \mathbb{R}$ *mit* $A_n \searrow \mu$.
Induktive Konstruktion: Konstruktionsanfang (n_1)*:*
Zu $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$ *ex.* l_1, *s.d.*

$$|\mu - A_{l_1}| = A_{l_1} - \mu \leq \tfrac{1}{2}$$

Zu l_1 *ex.* $n_1 \geq l_1$, *s.d.*

$$|A_{l_1} - a_{n_1}| = A_{l_1} - a_{n_1} \leq \tfrac{1}{2}$$

Konstruktionsschritt $(n_{k-1} \to n_k)$*:*
Seien $n_1, \cdots, n_{k-1}$ *bereits gefunden, dann wähle zu* $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$ *ein* $l_k > n_{k-1}$, *s.d.*

$$|\mu - A_{l_k}| = A_{l_k} - \mu \leq \tfrac{1}{2^k}$$

und $n_k \geq l_k$, *s.d.*

$$|A_{l_k} - a_{n_k}| = A_{l_k} - a_{n_k} \leq \tfrac{1}{2^k}$$

Dann gilt

$$n_{k+1} > n_k \text{ und } |\mu - a_{n_k}| \leq \tfrac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \square$$

Definition 2.5 *Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n) falls eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert, s.d. $a_{n_k} \to h$.*

Bemerkung *1) '$(a_n) \to \infty$' $:\Leftrightarrow \forall\, K > 0\, \exists N \in \mathbb{N}:\ a_n \geq K\, \forall n \geq N$.*
2) '$(a_n) \to (-\infty)$' $:\Leftrightarrow \forall\, K < 0\, \exists N \in \mathbb{N}:\ a_n \leq K\, \forall n \geq N$.

Bsp. 2.9 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, *Häufungspunkte:* $-1, 1$.

Satz 2.8 *Die Zahl $h \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von (a_n) genau dann, wenn*
$$\forall \epsilon > 0:\ |h - a_m| \leq \epsilon \text{ für unendlich viele } m \in \mathbb{N}.$$

Bew: *(Übung)*

Definition 2.6 *Es sei (a_n) eine Folge, dann heißt*
$$\sup\{h \in \mathbb{R} \,|\, h \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}$$
der **Limes superior**, $\limsup_{n\to\infty} a_n$, *von (a_n).*
Analog heißt
$$\inf\{h \in \mathbb{R} \,|\, h \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)\}$$
der **Limes inferior**, $\liminf_{n\to\infty} a_n$, *von (a_n).*

Satz 2.9 *Es sei (a_n) beschränkt, dann sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ der größte bzw. kleinste Häufungspunkt von (a_n).*

Bew: *Für $\Lambda := \limsup a_n \in \mathbb{R}$ genügt es zu zeigen, dass Λ wieder ein Häufungspunkt ist. Sei $\epsilon > 0$, dann ex. wg. Supremumseigenschaft ein Häufungspunkt h, s.d. $|\Lambda - h| = \Lambda - h \leq \frac{\epsilon}{2}$. Da h Häufungspunkt, ex. unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, s.d. $|h - a_m| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Folglich ex. unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, s.d. $|\Lambda - a_m| \leq \epsilon$. Analog für $\liminf a_n$.* $\square$

Lemma 2.4 *Es sei (a_n) beschränkt. Dann gilt für $\epsilon > 0$ beliebig*
$a_n \in](\liminf a_n) - \epsilon, (\limsup a_n) + \epsilon[$ *für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bew: *Falls $a_n \geq \limsup a_n + \epsilon$ für unendl. viele n, so ex. wg. Bolzano-Weierstraß Teilfolge $a_{n_k} \to: A \geq \limsup a_n + \epsilon$. Also $\limsup a_n$ nicht größter Häufungspunkt, Widerspruch.* $\square$

Satz 2.10 *Für (a_n) beschränkt gilt: (a_n) konvergiert genau dann, wenn $\limsup a_n = \liminf a_n$.*

Bew: *'$\Rightarrow$': Falls $a_n \to a$, so ist a ein Häufungspunkt. Weil schließlich alle Folgeglieder beliebig nahe bei a liegen, gibt es keinen anderen.*
'$\Leftarrow$': Folgt aus obigem Lemma mit $\mu := \limsup a_n = \liminf a_n$:
$\forall \epsilon > 0 : \ a_n \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[$ *für schießlich alle $n \in \mathbb{N}$.* $\square$

Satz 2.11 *Es sei (a_n) n.o. beschränkt, dann gilt für $A_n := \sup_{m\geq n} a_m$*
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup a_n.$$

Bemerkung *Analog für n.u. beschränktes (a_n): $\inf_{m\geq n} a_m \to \liminf a_n$.*

Bew: *(Bew von Satz 2.7 $\Rightarrow$) $A_n \to: \mu$ mit μ Häufungspunkt von (a_n). Falls μ nicht der größte Häufungspunkt, so gibt es Teilfolge $a_{n_k} \to \Lambda > \mu + \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Somit $A_{n_k} \geq \mu + \frac{\epsilon}{2}$ für schließlich alle $k \in \mathbb{N}$. (Monotonie von (A_n)) $\Rightarrow A_n \geq \mu + \frac{\epsilon}{2}$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \to \mu$.* $\square$

Satz 2.12 (Cauchy-Kriterium) *Es gilt $a_n \to a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn*
$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \ |a_n - a_m| \leq \epsilon \, \forall n, m \geq N. \qquad (*)$$

Bew: *'$\Leftarrow$': (a_n) ist beschränkt wg. $(*)$. Sei ferner $A_n := \sup_{m\geq n} a_n$ und $B_n = \inf_{m\geq n} a_m$. Dann gilt $A_n \to \limsup a_n$ und $B_n \to \liminf a_n$. Aus $(*)$ folgt $|A_n - B_n| \leq \epsilon \, \forall n \geq N \Rightarrow \liminf a_n = \limsup a_n$.* $\surd$
'$\Rightarrow$': Zu $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$, s.d. $|a - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \, \forall \, n \geq N$, dann gilt $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \epsilon \, \forall \, n, m \geq N$. $\square$

Definition 2.7 *1) Für $M \subset \mathbb{R}$ heißt $x \in \mathbb{R}$* **Häufungspunt von** $M \subset \mathbb{R}$

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists\, m \in M : \; |x - m| < \epsilon.$$

2) Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **abgeschlosssen**, *falls M alle seine Häufungspunkte enthält.*

3) Die **Abschluss** *von M ist die Menge*

$$\overline{M} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$$

Bsp. 2.10 *i)* $M = [a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$.

ii) $M = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \overline{M} = M \cup \{0\}$

iii) $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$.

Definition 2.8 $M \subset \mathbb{R}$ *heißt* **kompakt** $:\Leftrightarrow$ *M abgeschlossen und beschränkt.*

Satz 2.13 (Heine-Borel) $M \subset \mathbb{R}$ *ist kompakt* $\Leftrightarrow$ *Jede folge (a_n) mit Werten $a_n \in M$ enthält eine konvergente Teilfolge a_{n_k} mit $\lim a_{n_k} \in M$.*

Bew: *'$\Rightarrow$': (a_n) beschränkt (Bolzano-Weierstr.) $\Rightarrow$ ex. Teilfolge $a_{n_k} \rightarrow: a$. Da $\forall \epsilon > 0 : \exists a_{n_k} \in M : |a_{n_k} - a| < \epsilon \Rightarrow a \in \overline{M} = M$.*
'$\Leftarrow$': Falls M nicht beschr.: Ex. best. divergente Folge (a_n). (a_n) enthält keine konv. Teilfolge. Falls M beschr. und $x \in \overline{M} \setminus M$: Wähle $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in M$: $|a_n - x| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \rightarrow x$ aber $x \notin M$. $\square$

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

2.3 Reihen

Reihen: Motivation

Beispiel Bob will einen Wolkenkratzer bauen. Am 1. Tag schafft er einem Meter, am Tag darauf die Hälfte, dh. $\frac{1}{2}$ m, danach wieder die Hälfte vom vortag, dh. $\frac{1}{4}$ m ...

Frage Wie hoch wird das Haus werden (B ist unsterblich)?

Antwort (Veranschaulichung auf der Zahlengerade) $\Rightarrow$ Das Haus wird 2 Meter hoch.

Modifkation Bob schafft an Tag eins 1 Meter, an Tag zwei schafft er $\frac{1}{2}$m, an Tag 3 schafft er $\frac{1}{3}$m ...

Antwort Das Haus wird unendlich hoch, denn

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\dots\right)\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdots\nearrow\infty$$

Modifkation Bob schafft an Tag eins 1 Meter, an Tag zwei reißt er einen halben Meter herunter, an Tag drei schafft er $\frac{1}{3}$m, an Tag 4 reißt er $\frac{1}{4}$m herunter ...

Antwort (Veranschaulichung auf der Zahlengerade) $\Rightarrow$ Das Haus erreicht eine eindeutig bestimmte Höhe $\leq$ 1m

Definition 2.9 *Es sei (a_n) eine Folge.*
1) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

*die n-***te Partialsumme** *oder* **abgebrochene Reihe** *zur Folge (a_n). Symbol für die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

$$\sum a_i = (S_1, S_2, \cdots)$$

Bezeichnung $\sum a_i$ **Reihe** *zur Folge (a_n).*
2) Falls der **Limes der Partialsummen** *existiert, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} S_n =: S \in \mathbb{R},$$

so heißt die **die Reihe $\sum a_i$ konvergent**.
Schreibweise:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S \in \mathbb{R}.$$

3) Die Reihe $\sum a_i$ heißt **absolut konvergent**, *falls $\sum |a_i|$ konvergiert d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \in \mathbb{R}$$

Bsp. 2.11 *1) $\sum (\frac{1}{2})^i = 2$ (absolut) konvergent, 2) $\sum \frac{1}{i}$ nicht konvergent,*
3) $\sum \frac{(-1)^i}{i}$ konvergent aber nicht abs. konvergent.

Bemerkung *Ob eine Reihe (abs.) konvergiert, hängt nicht von den ersten Gliedern der Folge ab, d.h.*

$$\sum_{i\geq 1} a_i \text{ (abs.) konvergent} \Leftrightarrow \sum_{i\geq K} a_i \text{ (abs.) konvergent.}$$

Satz 2.14 *1) Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \left|\sum_{n+1}^{m} a_n\right| \leq \epsilon\, \forall\, n, m \geq N.$$

2) Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut genau dann, wenn

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{N} |a_i| < \infty.$$

Bew: *1) Cauchy-Kriterium für die Folge S_n: $S_m - S_n = \sum_{n+1}^{m} a_n$.*
2) $S_n^* := \sum_{i=1}^{n} |a_i| \nearrow$, d.h. konvergiert $\Leftrightarrow \sup_n S_n^* < \infty$. □

Satz 2.15 *1) Falls $\sum a_i$ (abs.) konvergent, so gilt $\lim a_i = 0$.*
2) Falls $\sum a_i$ absolut konvergent, so ist auch $\sum a_i$ konvergent.

Bew: *1): Cauchy-Kriterium $|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| \leq \epsilon\, \forall\, n \geq N$.*
2): Cauchy-Kriterium: Für OBdA $n \geq m$ und $\epsilon > 0$:

$$|S_n - S_m| = |\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i| = |\sum_{i=m+1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| \leq \epsilon$$

für $n, m \geq N$ und N groß genug wg. Konvergenz von $\sum |a_i|$. □

Satz 2.16 (Leibniz-Kriterium) *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \searrow 0$*, dann ist* $\sum_{i\geq 0}(-1)^i a_i$ *konvergent.*

Bew: *(Vorausetzungen)* $\Rightarrow S_0 \geq S_2 \geq S_4 \cdots$ *bzw.* $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \cdots$ *und* $|S_k - S_{k+1}| = a_{k+1} \to 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} =: S$
Somit konvergiert auch jede andere Teilfolge S_{n_k} *gegen* S □

Satz 2.17 (Teleskopsumme) *Falls* $a_n = c_{n+1} - c_n$ *für eine konvergente Folge* $c_n \to c$*, dann gilt* $\sum a_n = c - c_1$*.*

Bsp. 2.12 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = c_{n+1} - c_n$ *mit* $c_n = -\frac{1}{n}$*.*

$$\sum_{i=1}^n a_n = c_{n+1} - c_n + c_n - c_{n-1} \cdots + c_2 - c_1 = -\frac{1}{n+1} - (-1) \to 1.$$

Satz 2.18 (Majorantenkrit.) *Falls* $|a_i| \leq b_i$ *und* $\sum b_i \leq K \in \mathbb{R}$*, so ist* $\sum a_i$ *abs. konvergent.*

Bew: $\sum_1^n |a_i| \leq \sum_1^n b_i \leq K$*.* □

Bsp. 2.13 $a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n\cdot(n-1)}$ *und* $\sum \frac{1}{n(n-1)} = 1 < \infty$*.*

Definition 2.10 *1) Die Reihe* $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i}$ *heißt die* **harmonische Reihe**.
2) Die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i \frac{1}{i}$ *heißt* **alternierende harm. Reihe**.

Satz 2.19 *Die harmonische Reihe ist divergent. Die alternierende harm. Reihe ist konvergent aber nicht abs. konvergent.* □

Definition 2.11 *Zu* $\rho \in \mathbb{R}$ *heißt* $\sum_{i\geq 0} \rho^i$ **geometrische Reihe mit Parameter** ρ.

Satz 2.20 *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $\rho \neq 1$ *gilt* $\sum_{i=0}^{n} \rho^i = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$

Bew: *Beweis durch* **Vollständige Induktion:**
(Induktionsanfang) Zeige, dass die Beh. richtig ist für $n = 0$*:*

$$\rho^0 = 1 = \frac{1-\rho}{1-\rho} \quad \surd$$

(Induktionsschritt) Folgere aus der Beh. für $0, 1, \cdots, n-1$ *die Beh. für n: Es gelte also insbes.* $\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \rho^i = \rho^n + \frac{1-\rho^n}{1-\rho} = \frac{\rho^n(1-\rho)+(1-\rho^n)}{1-\rho} = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \quad \surd \quad \square$$

Korollar 2.1 *Die geom. Reihe konvergiert (absolut) genau dann, wenn* $|\rho| < 1$*, mit Grenzwert* $\sum_{i\geq 0} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$.

Bew: $|\rho| < 1 \Rightarrow \sum_{0}^{n} |\rho^i| = \frac{1-|\rho|^{n+1}}{1-|\rho|} \to \frac{1}{1-|\rho|}$. $|\rho| \geq 1 \Rightarrow |\rho^i| \not\to 0$. □

Satz 2.21 (Quotientenkrit.) *Falls* $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, *so ist* $\sum a_n$ *absolut konvergent.*

Bemerkung *Falls* $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_i$ *nicht konvergent.*

Bew: *Es ex.* $\rho < 1$ *und* $N = N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \rho \, \forall n \geq N$. *Also auch*

$$|a_{n+1}| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \cdot |a_N| \leq \rho^{n+1-N} \cdot |a_N|$$

Somit gilt mit $C = \rho^N \cdot |a_N|$

$$|a_i| \leq C \cdot \rho^i \text{ für schließlich alle } i \in \mathbb{N}$$

Da $\sum \rho^i < \infty$ *folgt die Beh. mit dem Majorantenkriterium.* $\square$

Bsp. 2.14 $a_n = \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$. *Dann* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ *abs. konvergent.*

Satz 2.22 (Wurzelkrit.) *Falls* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *so ist* $\sum a_n$ *absolut konvergent.*

Bew: *(Übung)*

Bsp. 2.15 $a_n = (\frac{1}{2})^n$ *für n gerade und* $a_n = (\frac{1}{3})^n$ *falls n ungerade.*

Zur Bedeutung von absoluter Konvergenz

Definition 2.12 *1) Eine Umordnung von $\mathbb{N}$ ist eine Abzählung von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, in der jedes $n \in \mathbb{N}$ nur einmal auftritt, d.h. es gilt*

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} n_k \text{ und } (n_k = n_l \Rightarrow k = l).$$

2) Eine Umordung der Folge (a_n) ist gegeben durch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit (n_k) einer Umordnung von $\mathbb{N}$.

Bsp. 2.16 *Umordnung der alt. harm. Reihe*

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{11} - \cdots - \frac{1}{17} + \frac{1}{8} \cdots$$
$$\leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \to -\infty.$$

Satz 2.23 (Umordnungssatz) *Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent genau dann, wenn $\sum a_{n_k} = \sum a_n$ gilt für jede Umordnung von (a_{n_k}) von (a_n).*

Satz 2.24 (Umordnungssatz von Weierstraß) *Es sei $\sum a_n$ konvergent aber nicht abs. konvergent und $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Dann ex. eine Umordnung (a_{n_k}) von (a_n), s.d. $\sum_k a_{n_k} = r$.*

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

2.4 Logarithmus und Exponential

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition 2.13 *Für $r \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$*

$$\boxed{r^m := r \cdot r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}$$

$$\boxed{r^{-m} := \frac{1}{r^m}}$$

$$\boxed{r^0 := 1}$$

Satz 2.25 *Eigenschaften:*

1. $r^m \cdot r^l = r^{l+m}$
2. $(r^l)^k = r^{k \cdot l}$
3. $r_1^l \cdot r_2^l = (r_1 \cdot r_2)^l$
4. $(r > s) \Leftrightarrow (r^m > s^m)$ *(Strenge Monotonie bzgl. Basis)*

Bew: *(Übung)*

Wurzeln

Definition 2.14

Sei $m \in \mathbb{N}$.

$$s \in \mathbb{R} \text{ (eine) } m\text{-te Wurzel von } r$$
$$:\Leftrightarrow$$
$$s^m = r.$$

Schreibweise s $=$ '$r^{\frac{1}{m}}$', falls $s, r \geq 0$.

Satz 2.26 *Für alle $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine (positive) m-te Wurzel $s = r^{\frac{1}{m}}$.*

Bew: *1) Existenz: Sei $s := \inf\{r \geq 0 \,|\, q^m \geq r\}$, dann gilt $s^m = r$ (Übung).*
2) Eindeutigkeit: Falls $0 \leq s < \tilde{s} \Rightarrow s^m < \tilde{s}^m$.
Also $s^m = (\tilde{s})^m = r \Rightarrow s = \tilde{s}$. $\square$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 2.15 *Für $r > 0$ und $k, m \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{r}^{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} := (r^{\frac{1}{m}})^k$$

$$\mathbf{r}^{-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}} := \frac{1}{r^{\frac{k}{m}}}$$

Satz 2.27

1. $r^{\frac{l}{l \cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$
2. $r^{\frac{l}{k}} = (r^l)^{\frac{1}{k}}$
3. $r^{\frac{m \cdot l}{k \cdot l}} = r^{\frac{m}{k}}$
4. $r^{\frac{k}{l}} \cdot r^{\frac{k'}{l'}} = r^{\frac{k}{l} + \frac{k'}{l'}}$
5. $r_1^{\frac{k}{l}} \cdot r_2^{\frac{k}{l}} = (r_1 \cdot r_2)^{\frac{k}{l}}$

Beispiel:
Beweis von $\boxed{1}$

$(r^{\frac{l}{l \cdot k}})^k = \left((r^{\frac{1}{l \cdot k}})^l\right)^k$

$= (r^{\frac{1}{l \cdot k}})^{l \cdot k} = r$

$\Rightarrow r^{\frac{l}{l \cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$

Potenzen mit reellen Exponenten

Beispiel $2^\pi = ?$

Definition 2.16 *Für $r \geq 0$ und $s \in \mathbb{R}$ definiert man $s^r \in \mathbb{R}$ wie folgt:*
Falls $r \geq 1$

$$\boxed{\mathbf{r^s} := \inf\{r^{\frac{k}{m}} \mid \frac{k}{m} \geq s\}}$$

bzw. falls $0 < r < 1$

$$\boxed{\mathbf{r^s} := \inf\{r^{\frac{k}{m}} \mid \frac{k}{m} \leq s\}.}$$

Lemma 2.5 *Sei $r \geq 1$ und $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und sei (s_n) eine rationale Folge mit $(s_n) \searrow s$, so gilt $r^{s_n} \searrow r^s$.*

Bew: *(r^{s_n}) ist monoton fallend und n.u. beschränkt durch r^s, also konvergent. Sei $c := \lim r^{s_n}$. Sei $\mathbb{Q} \ni q = \frac{k}{m} > s$, dann gilt schließlich $s_n < \frac{k}{m}$, s.d. $c = \lim r^{s_n} \leq r^q$, d.h. $c \leq r^s$.*
Wegen $s_n \geq s$ gilt $r^s \leq r^{s_n}$, also auch $c = \lim_n r^{s_n} \geq r^s$. $\square$

Satz 2.28 *Eigenschaften:*

1. $r^{s_1} \cdot r^{s_2} = r^{s_1+s_2}$
2. $(r^{s_1})^{s_2} = r^{s_1 \cdot s_2}$
3. $r_1^s \cdot r_2^s = (r_1 \cdot r_2)^s$
4. $s_1 > s_2, r > 1 \Rightarrow r^{s_1} > r^{s_2}$
5. $r_1 > r_2, s > 0 \Rightarrow r_1^s > r_2^s$

Bew: *Folgt durch Approximation aus vorigem Lemma und den entsprechenden Eigenschaften für rationale Exponenten, d.h. z.B. Zu* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *seien zwei rationale Folgen* (x_n) *und* (y_n) *mit* $x_n \searrow s_1$ *und* $y_n \searrow s_2$*, dann gilt* $x_n + y_n \searrow s_1 + s_2$ *und*

$$r^{s_1} \cdot r^{s_2} = \lim_n r^{x_n} \cdot \lim_n r^{y_n}$$
$$= \lim_n r^{x_n} \cdot r^{y_n} = \lim_n r^{x_n+y_n} = r^{s_1+s_2}.$$

$\square$

Logarithmus

Definition 2.17

Zu $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt

$$r \in \mathbb{R} \ \textbf{Logarithmus} \ \textit{von } a \textit{ zur Basis } b$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a = b^r$$

Schreibweise $r = \log_b a$

Bsp. 2.18 *In wievielen Jahren verdoppelt sich eine Sparanlage bei einem Zinssatz von 5%?* $(1 + 0.05)^n \overset{!}{=} 2 \Rightarrow n = \log_{1,05} 2$.

Satz 2.29 *Für alle* $a, b > 0$ *existiert genau Logarithmus* r *von* a *zur Basis* b.

Bew: *(für* $b \geq 1$*):* $r = \inf\{q \geq 0 \mid b^q \geq a\}$

Satz 2.30 *Für* $a, b, c > 0$ *gilt:*
1) $\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c)$
2) $\log_b(a) = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Bew: *1)* $b^{\log_b(a \cdot c)} = a \cdot c = b^{\log_b a} \cdot b^{\log_b c} = b^{\log_b a + \log_b c}$. *2) (Übung)* $\square$

Exponential

Satz 2.31 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist die* **Exponentialreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: \exp(x)$$

absolut konvergent und es gilt die **'Funktionalgleichung'**

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Bew: *Konvergenz der Reihe: Quotientenkriterium*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{x^n}{n!} \Big/ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0.$$

Funktionalgleichung: Sei $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, dann

$$S_N(x) \cdot S_N(y) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \frac{x^N}{N!}) \cdot (1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots \frac{y^N}{N!})$$

$$= 1 + (1 \cdot y + 1 \cdot x) + (\frac{x^2}{2} + x \cdot y + \frac{y^2}{2}) + (\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} \cdot y + \cdots)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} x^m \cdot y^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \cdot y^{n-m} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (x+y)^n = S_N(x+y)$$

Mit $N \to \infty$ und Folgen-Grenzwertsatz für '$\cdot$' folgt die Beh. $\square$

Bemerkung $(*) \Leftrightarrow$ **Binomischer Lehrsatz**: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$.

Satz 2.32 *1)* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
2) $\exp(-x) = 1/exp(x)\,\forall x \in \mathbb{R}$

Bew: $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$. $\Rightarrow \exp(x) \neq 0$, *denn sonst wäre* $\exp(x)\exp(-x) = 0$. *Damit folgt auch* 2). *Wegen* $\exp(x) = \exp(x/2)\exp(x/2) = (\exp(x/2))^2 \geq 0$ *ist* $\exp(x) > 0$.

Lemma 2.6 $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$ *und* $\exp(x) > \exp(y)$ *falls* $x > y$.

Bew: $\exp(x) > S_1(x) = 1 + x > 1$ *für* $x > 0$ *und*
$\exp(x) = \exp(y)\exp(x-y) > \exp(y)$, *falls* $x > y$.

Definition 2.18 *Die* **Euler'sche Zahl** *wird definiert durch*
$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung $e > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$. *(*$e \simeq 2.71$*)*

Satz 2.33 *Für* $r \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(r) = e^r$.

Lemma 2.7 *Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt* $\exp(q) = e^q$.

Bew: $r \in \mathbb{N}$: $e^n = \exp(1)^n = \exp(1) \cdot \exp(1) \cdots \exp(1) = \exp(n)$
$r \in \mathbb{Q}$: $(e^{\frac{p}{q}})^q = e^p = \exp(p) = (\exp(\frac{p}{q}))^p \Rightarrow e^{\frac{p}{q}} = \exp(\frac{p}{q})$.

Lemma 2.8 *Es gilt* $\exp(0) = 1$ *und für* $x \in [0,1]$ *ist* $|1 - \exp(x)| \leq x(e-1)$.

Bew: $\exp(0) = \sum_{k \geq 0} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} + 0 = 1$ *und für* $x \in [0,1]$

$$|1 - \exp(x)| = \exp(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$
$$\leq x \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} = x \cdot (e-1).$$ □

Korollar 2.2 *Sei* $x_n \searrow x$, *dann gilt* $\exp(x_n) \searrow \exp(x)$.

Bew: *Es gilt* $x - x_n \searrow 0$ *und OBdA gelte* $x - x_n \in [0,1]$, *dann*

$$|\exp(x) - \exp(x_n)| = \exp(x) |\exp(0) - \exp(x - x_n)| \leq \exp(x)(x - x_n)(e-1) \to 0.$$ □

Bew: (Satz 2.33) *Zu $x \in \mathbb{R}$ wähle (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \searrow x$, dann*

$$e^x \overset{Lem.\ 2.5}{=} lim_n e^{x_n} \overset{Lem.\ 2.7}{=} \lim_n \exp(x_n) \overset{Kor.\ 2.2}{=} \exp(x) \qquad \square$$

Definition 2.19 *Der Logarithmus $\log_e(x)$ von $x \in \mathbb{R} > 0$ zur Basis e heißt* **natürlicher Logarithmus**, *Schreibweise* $\ln(x)$.

Korollar 2.3 *Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt $a^b = \exp(b \cdot \ln a) = \sum_{k \geq 0} \frac{(b \cdot \ln a)^k}{k!}$.*

Bew: $\exp(b \cdot \ln a) = e^{b \cdot \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b$. $\square$

Bemerkung (Merkregeln)

1) a^b mit $b \in \mathbb{R}$ ist i.A. nur für $a \geq 0$ definiert.
2) $\log_a c$ ist nur für $a > 0$ und $c > 0$ definiert.
3) $a^b = \exp(b \cdot \ln a)$ mit $a > 0$ ist für alle $b \in \mathbb{R}$ definiert.
4) Es gilt $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.
5) Es gilt $\log_a c = \frac{\ln c}{\ln a}$ und $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2.5 Komplexe Zahlen

Erinnerung p-q-Formel für die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung:
$x^2 + px + q \overset{!}{=} 0$

$$x_{1/2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

Bew: $x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - (\tfrac{p}{2})^2 + q \overset{!}{=} 0$
$\Leftrightarrow (x + \tfrac{p}{2})^2 \overset{!}{=} (\tfrac{p}{2})^2 - q$
$\Rightarrow$ *falls* $h \in \mathbb{R}$, *s.d.* $h^2 = (\tfrac{p}{2})^2 - q$, *so ist*
$(x - \tfrac{p}{2})^2 = h^2 \Rightarrow x + \tfrac{p}{2} = \pm h \Rightarrow x = -\tfrac{p}{2} \pm h$ $\square$

Frage Was ist $h := \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$, falls $(\tfrac{p}{2})^2 - q < 0$?

Bsp. $p = 0,\ q = 1 \Rightarrow h :=' \sqrt{-1} ' =:' i '$
Allgemein: Für $r \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sei $\operatorname{sign}(r) := x/|x|$

$$\sqrt{r} := \sqrt{|r|} \cdot \sqrt{\operatorname{sign}(r)} = \sqrt{|r|} \cdot \begin{cases} 1 & \text{falls } r \geq 0 \\ i & \text{falls } r < 0 \end{cases}$$

Konsequenz Zum Lösen einer bel. quadratischen Gleichung benötigt man Zahlen z, deren Quadrate z^2 negative reelle Zahlen sind:

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{|(\frac{p}{2})^2 - q|} \cdot \begin{cases} i & \text{falls } (\frac{p}{2})^2 - q < 0 \\ 1 & \text{falls } (\frac{p}{2})^2 - q \geq 0 \end{cases}$$

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Definition 2.20 *Das Symbol i heißt* **komplexe bzw. imaginäre Einheit**. *(Andere Schreibweisen $\sqrt{-1}$, ι, ...)*

Definition 2.21 *Ein Symbol der Form $a + b\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt* **komplexe Zahl**, *Schreibweisen $z = a + b\,i$ bzw. $z = (a, b)$.*

$$\mathbb{C} := \{z = a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

heißt **Menge der komplexen Zahlen**. *$a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$ heißen* **Real- und Imaginäranteil von** z.

Bemerkung *Mit $z = a + b\,i \hat{=} (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entspricht jede komplexe Zahl einem Punkt in der (a,b)-Ebene (***'Gauß'sche Zahlenebene'***).*

Definition 2.22 *Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen:*

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\,i$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) := a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\,i$$

Bemerkung *Äquivalente Beschreibung von $\cdot$ und $+$:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Bemerkung *1) Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit $r = (r, 0)$ und $(r_1, 0) \cdot (r_2, 0) = (r_1 \cdot r_2, 0)$.*
2) Es gilt $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$.

$\mathbb{C}$ als Körper

Definition 2.23 *Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$* **Länge von** *z.*

Bemerkung *$|z|$ ist der Abstand von $z \hat{=} (a, b)$ zu $(0, 0)$ in der Gauß-Ebene (Satz v. Pythagoras).*

Definition 2.24 *Zu $z \in \mathbb{C}$ heißt $\bar{z} := a - bi \in \mathbb{C}$ das* **konjugierte** *Element.*

Bemerkung *Horizontale Spiegelung in der Gauß-Ebene.*

Lemma 2.9 *1) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ bzw. $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.*
2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Bew: *1) $\surd$. 2): $z \cdot \bar{z} \hat{=} (a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 + b^2, ab - ba) \hat{=} a^2 + b^2$*

Satz 2.34 *Mit den Operationen $+$ und $\cdot$ ist $\mathbb{C}$ ein Körper, wobei $1 = (1, 0)$ und $(0, 0)$ die neutralen Elementen für $+$ bzw. $\cdot$ sind.*

Bew: *Inverses Element für $z \neq 0$ ist $\tilde{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, denn $z\tilde{z} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$.*
Also $\tilde{z} = z^{-1}$. Andere Eigenschaften: Nachrechnen $\surd$ $\square$

Bemerkung *Für $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ und $\mu = \mu + 0\,i \in \mathbb{R}$ ist $\mu z = \mu a + \mu b\,i \in \mathbb{C}$.*

Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Satz 2.35 *Zu $z = (a, b) \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ ex. genau zwei Lösungen $w_1 = (u, v)$ und $w_2 = (-u, -v)$ von $w^2 = z$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ eind. bestimmt durch*
$$u^2 = \tfrac{1}{2}(|z| + a), \quad v^2 = \tfrac{1}{2}(|z| - a), \quad u \cdot v \cdot b \geq 0.$$

Bemerkung *$w^2 = z :\Leftrightarrow a$ ist eine* **'komplexe Wurzel von z'**.

Bew: $w^2 = z \Leftrightarrow (u^2 - v^2, 2uv) = (a, b)$. $\rightsquigarrow$ *Zwei Gleichungen für zwei Unbekannte u und v. Dafür gibt es genau die beiden Lösungen (u, v) und $(-u, -v)$ wie in Beh. (Übung).* $\square$

Satz 2.36 *Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ hat die beiden Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} + w_{1/2} \in \mathbb{C}$, wobei $w_{1/2}$ die komplexen Wurzeln von $(\frac{p}{2})^2 - q$ sind.*

Bew: $0 = x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - (\frac{p}{2})^2 = w^2 - ((\frac{p}{2})^2 - q)$. $\square$

Die Dreiecksungleichung für $|\cdot|$ in $\mathbb{C}$

Lemma 2.10 *1)* $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ *und* $|\overline{z}| = |z|$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$
4) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$.

Bew: *1) – 3) (Übung) 4)* $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$

$$= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \qquad \square$$

Satz 2.37 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

Bew: *Wegen 1) und 3) oben gilt insbesondere*

$$\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq |z_1||z_2| \text{ ('Cauchy-Schwarz Ungl.')}$$

Einsetzen in 4)

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \qquad \square$$

Folgen in $\mathbb{C}$

Definition 2.25 *Ein unendliches Tupel* $(z_1, z_2, \cdots) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cdots$ *heißt* **Folge in** $\mathbb{C}$ *oder* **komplexe Zahlenfolge**.

Definition 2.26 *Eine Folge* (z_n) *in* $\mathbb{C}$ *konvergiert gegen* $z \in \mathbb{C}$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ *und* $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$.

Bemerkung $(z_n) = ((a_n, b_n)) \to (a, b) :\Leftrightarrow (a_n \to a) \wedge (b_n \to b)$.

Satz 2.38 *1) Es gilt* $z_n \to z$ *in* $\mathbb{C} \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0 \in \mathbb{R}$.
2) (Cauchy-Krit.) Die Folge (z_n) *konvergiert in* $\mathbb{C} \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \ |z_n - z_m| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Definition 2.27 *1) Eine Reihe* $\sum z_n$ *heißt konvergent in* $\mathbb{C}$*, falls die Folge der Partialsummen* $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ *für* $n \to \infty$ *konvergent in* $\mathbb{C}$ *ist.*
2) Die Reihe $\sum z_n$ *heißt absolut konverent, falls* $\sum |z_n|$ *konvergent ist.*

Satz 2.39 *Eine absolut konvergente Reihe* $\sum z_n$ *mit* $z_n \in \mathbb{C}$ *ist auch konvergent in* $\mathbb{C}$*. Insbesondere gelten Quotienten- und Wurzelkriterium für absolute Konvergenz.* $\square$

Teilfolgen und Mengen in $\mathbb{C}$

Definition 2.28 *1) Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und (n_k) eine Auswahlfolge in $\mathbb{N}$, dann heißt $(z_{n_k})_k$ eine Teilfolge von (z_n).*
2) $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von (z_n), falls eine Teilfolge z_{n_k} von (z_n) ex. s.d. $z_{n_k} \to z$.

Definition 2.29 *1) Eine Menge $Z \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls ein $K \geq 0$ ex. s.d. $|z| \leq K \,\forall\, z \in Z$.*
2) Eine Folge (z_n) heißt beschränkt, falls die Menge $Z = \{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist.
3) $z \in \mathbb{C}$ heisst Häufungspunkt von $Z \subset \mathbb{C}$, falls $\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, z' \in Z : |z - z'| \leq \epsilon$. $Z \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, falls Z alle seine Häufungspunkte enthält.
4) $Z \subset \mathbb{C}$ heisst kompakt, falls Z abgeschlossen und beschränkt.

Satz 2.40 *1) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge.*
2) Eine Menge $Z \subset \mathbb{C}$ ist kompakt genau dann, wenn jede Folge (z_n) mit $z_n \in Z \,\forall n$ eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}) hat mit $\lim z_{n_k} \in Z$.

Bemerkung *$\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet. Insbesondere kein Analog von $\limsup$ etc.*

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

2.6 Die Winkelfunktionen

Das komplexe Exponential

Satz 2.41 *Zu $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe* $\exp(z) := \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$ *absolut konvergent.*

Bew: *Quotientenkriterium* $\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} / \frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0 < 1$ $\square$

Bemerkung *Schreibweise* $\exp(z) = e^z$, **komplexes Exponential.**

Satz 2.42 *1)* $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$
2) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.

Bew: *1) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (Übung). Also auch $\overline{z^k} = (\bar{z})^k$. Mit $S_N(z) := \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!}$ ist somit*

$$\overline{S_N(z)} := \sum_{k=0}^N \frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{(\bar{z})^k}{k!} = S_N(\bar{z})$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung 1). Bew. von 2) wie in $\mathbb{R}$. $\square$

Definition 2.30 *Die Menge $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ heißt* **Einheitskreis**.

Korollar 2.4 *Für $t \in \mathbb{R}$ ist* $\exp(it) \in S^1$.

Bew: $|\exp(it)|^2 = \exp(it) \cdot \overline{\exp(it)} = \exp(it) \cdot \exp(-it) = \exp(0) = 1.$ $\square$

Sinus und Cosinus

Definition 2.31 *Für $t \in \mathbb{R}$ sei* $\sin(t) := \mathrm{Im}(e^{it})$ *und* $\cos(t) := \mathrm{Re}(e^{it})$.

Bemerkung *Sinus* $\sin(t)$ *und Cosinus* $\cos(t)$ *sind die Projektionen auf die y-bzw. x-Achse vom Punkt $z = \exp(it)$, der auf dem Rand des Einheitskreises in der in der Gauß-Ebene liegt.*

Lemma 2.11 $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$ *und* $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$.

Bew: $\exp(ti) = \sum \frac{(it)^k}{k!} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} \cdots$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(e^{it}) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$ *und* $\mathrm{Re}(e^{it}) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$. $\square$

Lemma 2.12 $\sin(0) = 0$ *und für* $s, t \in]-1, 1[$ *gilt:* $s < t \Rightarrow \sin(s) < \sin(t)$.

Bew: $\sin(s) - \sin(t) = s - t - \frac{s^3 - t^3}{3!} + \frac{s^5 - t^5}{5!} - \cdots$

$= (s-t)[1 - \frac{s^2+st+t^2}{3!} + \frac{s^4+s^3t+s^2t^2+st^3+t^4}{5!} \cdots] = (s-t)[1 - R(s,t)]$
und für $s, t \in]-1, +1[$
$|R[s,t]| \leq \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} + \cdots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \cdots \leq \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (\frac{1}{9})^k = \frac{9}{16} < 1$.

Bemerkung *Für $t \in [0,1]$ wandern mit wachsendem t die Punkte e^{it} somit gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis S^1 entlang.*

Kreisfläche und -umfang

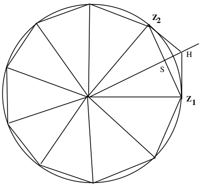
Definition 2.32 *Der* **Flächenhinhalt des Einheitskreises** *heißt π. ($\pi \in \mathbb{R}$)*

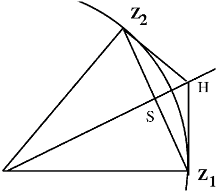
Definition 2.33 *Der* **Umfang** *des Einheitskreises ist die Strecke, die ein rollendes Rad mit Radius 1 mit genau einer Umdrehung zurücklegt.*

Bemerkung *Alternativ: Kleinste Länge einer umlaufenden Kordel.*

Satz 2.43 *Der Kreisumfang des Einheitskreises beträgt 2π.*

Bew: (Satz 2.43)





Approximation mit n Dreicken:
Flächeninhalt eines Dreiecks Δ_k:
$A_k = \frac{1}{2} h_k g_k$
mit $g_k = |z_{k+1} - z_k|$ Länge der Basis, und $h_k = |S_k - 0| \approx 1$ Höhe.

Folglich
$\pi \approx \sum_{k=i}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} h_k g_k$
$\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} g_k \approx \frac{1}{2}$ *Umfang*
Grenzübergang für $n \to \infty$:
$\Rightarrow \pi = \frac{1}{2}$ *Umfang* $\square$

Abstand im Bogenmaß und e-Funktion

Definition 2.34 *Für zwei Punkte $z_1, z_2 \in S^1$ ist ihr (gerichteter)* **Abstand im Bogenmaß** $d_{\text{arg}}(z_1, z_2)$ *der Abstand der beiden Punkte $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, die durch 'Abrollen nach Rechts' der Kreisscheibe auf der rellen Achse von z_1 und z_2 abgetragen werden.*

Korollar 2.5 *Jeder Punkt $z \in S^1$ ist eindeutig durch eine Zahl $\phi = d_{\text{arg}}(1, z) \in [0, 2\pi[$ festgelegt. Schreibweise $\phi = \arg(z)$.*

Satz 2.44 *Für $t \in [0, 1[$ ist $d_{\text{arg}}(1, e^{it}) = t$.*

Bemerkung *Die Komplexe Zahl e^{it} ist also der Punkt auf dem Einheitskreis mit Bogen-Abstand t entgegen dem Uhrzeigersinn vom Punkt 1.*

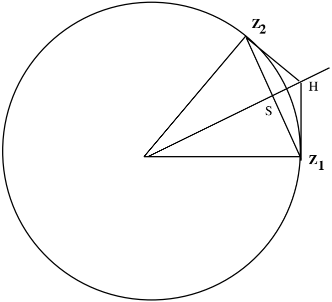
Erste Schlussfolgerungen aus Satz 2.44

Korollar 2.6 *1)* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ *und* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4})$.
2) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ *und* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *bzw.* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
3) $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$
4) $e^{i\pi} = -1$
5) $e^{i2\pi} = 1$.

Bew: *1)* $\frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow$ *Satz 2.44 anwendbar, d.h.* $e^{i\frac{\pi}{4}}$ *ist der Punkt mit Bogenabstand* $\frac{\pi}{4}$ *von* $1 \in \mathbb{C}$ *auf dem Einheitskreis.* $\frac{\pi}{4}$ *enstpricht einem Achtel des ganzen Kreisumfangs, somit liegt* $e^{i\frac{\pi}{4}}$ *auf der Winkelhalbierenden im 1. Quandranten der Gauß-Ebene, d.h.* $e^{i\frac{\pi}{4}} = r + ri$ *mit einem* $r \in \mathbb{R}$. *Wegen* $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ *gilt* $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *2)* $e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = i$.
Aussagen 3–5) folgen aus 1) analog durch Multiplikation. □

Vorbereitungen zum Beweis von Satz 2.44

Lemma 2.13



Für $z_1, z_2 \in S^1$ gilt:
1) $|z_1 - z_2| \leq d_{\arg}(z_1, z_2)$
2) $d_{\arg}(z_1, z_2) \leq 2|z_1 - H|$
3) $|z_1 - H| = \frac{|z_1 - S|}{\sqrt{1 - |z_1 - S|^2}}$
Bew.: (Übung) $\square$

Korollar 2.7 *Für* $|z_1 - z_2| \leq \epsilon \leq 1$ *ist* $0 \leq d_{\arg}(z_1, z_2) - |z_1 - z_2| \leq \epsilon^2$

Bew: *Sei* $\delta := |z_1 - z_2|$, *dann*

$$d_{\arg}(z_1, z_2) - |z_1 - z_2| \leq 2|z_1 - H| - |z_1 - z_2|$$
$$= \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2/4}} - \delta = \delta\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2/4}} - 1\right)$$

und $\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2/4}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\delta/2)(1+\delta/2)}} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{(1-\delta/2)^2}} - 1$

$$= \frac{1}{1-\delta/2} - 1 = \frac{\delta}{2}\frac{1}{1-\delta/2} \leq \delta.$$

$\square$

Vorbereitungen zum Beweis von Satz 2.44

Lemma 2.14 *Für* $h \in [0,1]$ *ist* $e^{ih} - 1 = ih[1 + R(h)]$ *mit* $|R(h)| \leq \frac{3}{4}h$

Bew: $e^{ih} - 1 = hi + \frac{(hi)^2}{2} + \frac{(hi)^3}{3!} \cdots$, *also* $e^{ih} - 1 = \frac{h}{i}[1 + R(h)]$
mit $R(h) = \frac{hi}{2} + \frac{(hi)^2}{3!} + \cdots$,
also $|R(h)| \leq \frac{h}{2}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots) \leq \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^k = \frac{3h}{4}$. $\square$

Lemma 2.15 *Für* $\epsilon \in [0,1]$ *ist* $|\exp(i(t+\epsilon)) - \exp(it)| \leq 2\epsilon$.

Bew: $|e^{i(t+\epsilon)} - e^{it}| = |e^{it}| \cdot |e^{i\epsilon} - 1| \leq \epsilon(1 + \frac{3}{4}\epsilon) \leq 2\epsilon$. $\square$

Beweis von Satz 2.44

Bew: (Satz 2.44) *Für $n \in \mathbb{N}$ wähle Punkte $\{\exp(ik\frac{t}{n}), k = 0, \cdots n\}$. Wegen des math. pos. Umlaufssinns der Punkte $e^{it} \in S^1$ für wachsendes $t \in [0,1[$ (Lemma 2.12) gilt*

$$d_{\arg}(e^{it},1) = \sum_{k=1}^{n} d_{\arg}(e^{ik\frac{t}{n}}, e^{i(k-1)\frac{t}{n}})$$

Und wegen Korollar 2.7 mit $\epsilon = \frac{2}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} d_{\arg}(e^{ik\frac{t}{n}}, e^{i(k-1)\frac{t}{n}}) - \sum_{k=1}^{n} |e^{ik\frac{t}{n}} - e^{i(k-1)\frac{t}{n}}| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{n^2} = \frac{4}{n}$$

Also $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |e^{ik\frac{t}{n}} - e^{i(k-1)\frac{t}{n}}| = d_{\arg}(e^{it},1)$.

Hieraus folgt die Behauptung, denn

$$\sum_{k=1}^{n} |e^{ik\frac{t}{n}} - e^{i(k-1)\frac{t}{n}}| = \sum_{k=1}^{n} |e^{i(k-1)\frac{t}{n}}| \cdot |e^{i\frac{t}{n}} - 1|$$

$$= n|e^{i\frac{t}{n}} - 1| = t|1 + R(\tfrac{t}{n})| \to t$$

da nach Lemma 2.14 $|R(\frac{t}{n})| \leq \frac{3}{4}\frac{t}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass

$$d_{\arg}(e^{it},1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |e^{ik\frac{t}{n}} - e^{i(k-1)\frac{t}{n}}| = t. \qquad \square$$

Identifikation von e^{it} für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Lemma 2.16 (Additionstheoreme) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*
1) $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
2) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
3) $\sin^2(a) + \cos^2(b) = 1$ *(Pythagoras)*

Bew: *2)* $\cos(a + b) = \mathrm{Re}(e^{ai} \cdot e^{bi})$
$= \mathrm{Re}(e^{ai})\,\mathrm{Re}(e^{bi}) - \mathrm{Im}(e^{ai})\,\mathrm{Im}(e^{bi})$. □

Lemma 2.17 *Für $t_1, t_2 \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ mit $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \cos(t_1) \geq \cos(t_2)$*

Bew: *Setze $t_1 =: s_1 + \frac{\pi}{4}$ und $t_2 = \frac{\pi}{4} + s_2$, dann $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \frac{\pi}{4}$.*
Nach Lemma 2.12 $\Rightarrow 0 \leq \sin(s_1) \leq \sin(s_2)$ und $\cos(s_i) \geq 0$.
Ferner $\cos(s_1) = (1 - \sin^2(s_1))^{1/2} \geq (1 - \sin^2(s_2))^{1/2} = \cos(s_2)$
Hieraus folgt die Beh. mit $\cos(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s_i) - \sin(s_i))$ □

Bemerkung *Die Punkte e^{it} wandern für wachsendes $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ also gegen den Uhrzeigersinn auf S^1.*

Korollar 2.8 *Für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $d_{\mathrm{arg}}(1, e^{it}) = t$.*

Bew: *Analog wie Bew. von Satz 2.44.* □

Identifikation von e^{it} für $t \in [0, \pi]$

Lemma 2.18 *Für $t = s + \frac{\pi}{2}$ mit $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $e^{it} \in \mathbb{C}$ der in der Gauß-Ebene gegen den Uhrzeigersinn um 90° gedrehte Vektor $e^{is} \in \mathbb{C}$.*

Bemerkung *Die Drehung eines Vektors $\binom{a}{b}$ um 90° in mathem. pos. Drehrichung ergibt den Vektor $\binom{-b}{a}$.*

Bew: *Additionstheoreme:*
$\cos(t) = \cos(s + \frac{\pi}{2}) = \cos(s)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(s)\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 - \sin(s)$
und
$\sin(t) = \sin(s + \frac{\pi}{2}) = \sin(s)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})\cos(s) = \cos(s)$.
Also
$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \widehat{=} \binom{\cos t}{\sin t} = \binom{-\sin s}{\cos s}$
$=$ *Drehung um $+90^\circ$ von* $e^{is} = \cos(s) + i\sin(s) \widehat{=} \binom{\cos s}{\sin s}$. $\square$

Korollar 2.9 *Für $t \in [0, \pi]$ ist $d_{\arg}(1, e^{i\pi}) = t$.*

Identifikation von e^{it} für $t \in [0, 2\pi]$

Satz 2.45 *Für $t \in [0, 2\pi[$ ist $d_{\arg}(1, e^{it}) = t$.*

Bew: *1. Aussage: Wie oben durch Verwendung der Additionstheoreme und Rückführung auf e^{it} im Bereich $[0, \pi[$.*
2. Aussage: $e^{i2\pi} = e^{i\pi} \cdot e^{i\pi} = (-1) \cdot (-1) = 1$. $\square$

Satz 2.46 *1) Für $s \in [0, 1]$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ist*

$$d_{\arg}(e^{i(t_1+s)}, e^{i(t_2+s)}) = d_{\arg}(e^{it_1}, e^{it_2})$$

2) $e^{i2\pi} = 1$
3) $e^{i(t+2\pi)} = e^{it} \, \forall \, t \in \mathbb{R}$.

Bew: *(Übung)*

Definition 2.35 (Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$) *Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in* **Polarkoordinaten** (r, ϕ) *schreiben als $z = r \cdot e^{i\phi}$ mit $\phi = \arg(\frac{z}{|z|})$ und $r = |z|$, falls $|z| > 0$ bzw. $r = 0$ sonst. $\phi \in [0, 2\pi[$ heißt* **Argument von** *z*

Korollar 2.10 *Für $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ ist $z_1 \cdot z_2 = r_1 \, r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$.*

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

Kapitel 3:

Funktionen und Stetigkeit

3.1 Der Funktionsbegriff

Der Funktionsbegriff

Definition 3.1

> *Eine Funktion besteht aus einem*
>
> *Definitionsbereich $D \subset R$*
>
> *und einer*
>
> *Funktionsvorschrift,*
>
> *die jedem $x \in D$* **genau ein** *$y \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

Schreibweisen: $f : D \to \mathbb{R}$, bzw. $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, bzw.
$D \ni x \to y = f(x) \in \mathbb{R}$

Definition 3.2 *Eine* **Abbildung** *$A : M \to N$ von einer Menge N in eine andere Menge M ist eine Relation $R \subset M \times N$, mit*
1) $\forall m \in M \, \exists \, n \in N : (m, n) \in R$
2) $((m, n_1) \in R \wedge (m, n_2) \in R) \Rightarrow n_1 = n_2$

Bemerkung *Eine Funktion ist eine Abbildung von $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.*

Definition 3.3 *Die Menge $W(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ heißt* **Wertebereich von** *f.*

Beispiele

1. $D = \mathbb{R},\ f(x) = mx + b$
2. $D = \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
3. $D = [0, \infty[,\ f(x) = \sqrt{x}$
4. $D = \{1, 2, \pi, 4\}$,

x	1	2	π	4
y=f(x)	2	1	15	$\sqrt{2}$

5. $D = [0, 1] \cup \{2\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{falls } x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 1 & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

6. Pegelmessung an der Elbe:

t (in Stunden)	0	2	4	6	8
h (in cm)	319	330	360	372	365

Darstellung durch Funktionsgraphen

Definition 3.4

> *Die Menge aller Punktepaare*
> $$\mathit{graph}(f) = \{(x, y) \,|\, x \in D, y = f(x)\}$$
> *heißt Funktionsgraph von* $f : D \to \mathbb{R}$.

Der Graph kann als Punktmenge im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Beispiele - Skizzen -

Beispiele elmentarer Funktionseigenschaften

Definition 3.5

- f **gerade** $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
  Beispiel $y = x^2$
- f **ungerade** $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$
  Beispiel $y = x^3$
- f **monotonon wachsend**
  $\Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
  Beispiel $y = mx + b$ *mit* $m \geq 0.$
- f **monoton fallend**
  $\Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
  Beispiel $y = mx + b$ *mit* $\leq 0.$
- f **periodisch mit Periode T**
  $\Leftrightarrow f(x + T) = f(x)$
  Beispiele: 1) $f(x) = \sin(x),\ T = 2\pi$
  2) $f(x)$*=Iodidkonzentration zum Zeitpunkt* x
  bei der Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr) ...

Die Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr)

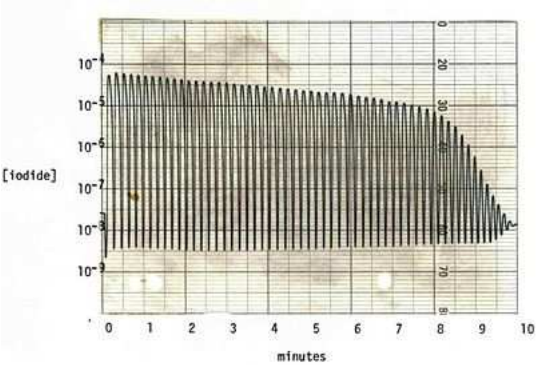


Figure . Oscillations produced by a solution of 0.050M potassium iodate, 0.038M malonic acid, 0.0050M manganese II sulfate, 0.88M hydrogen peroxide, 0.035M perchloric acid and 0.01% starch.

: (Quelle: Wikipedia)

Standard-Funktionen

Lineare Fkt.	$f(x) = mx + b$, $D(f) = \mathbb{R}$
Polynom	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N$, $D(f) = \mathbb{R}$ (Bezeichung $a_0, a_1, \dots, a_N$ **Koeffizienten**, N **Grad**.)
Rationale Fkt.	$f = \frac{g}{h}$ mit g, h Polynom. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\}$.
Betrag	$f(x) = \lvert x \rvert$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Potenzfkt.	$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $D(f) =]0, \infty[$ bzw. $[0, \infty[$.
Exponentialfkt.	$f(x) = a^x$, $(a \geq 0)$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Logarithmusfkt.	$f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$, $D(f) =]0, \infty[$

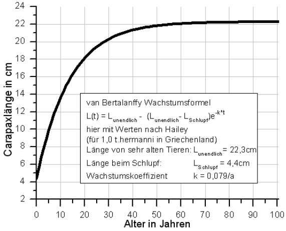
Operationen mit Funktionen

Summe f+g	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$.
Differenz $f-g$	
Produkt $f \cdot g$	- analog -
Quotient	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$ und $g(x) \neq 0$.
Beispiel	$f(x) = x^2, g(x) = x \Rightarrow \frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \frac{f}{g}(x) = x$.
Verkettung $f \circ g$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$, falls $g(x) \in D(f)$.
Beispiel 1:	$D(g) = [1, \infty[, g(x) = x - 1$, $D(f) = [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow f \circ g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-1}$.
Beispiel 2:	Gewichtszunahme bei Schildkröten ...

Beispiel: Schildkrötenwachstum

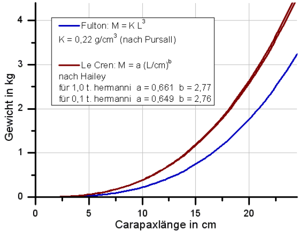
Bertalannfy Wachstumsgesetz:

Alter → Länge

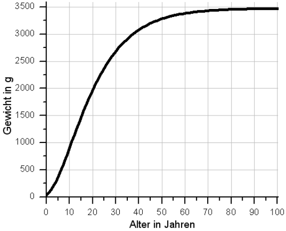


Fulton'sches Gewichtsgesetz

Länge → Gewicht



Alter → Gewicht



Umkehrfunktion

Definition 3.6 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **umkehrbar**, *wenn der Graph mit jeder Parallele zur x-Achse höchstens einen gemeinsamen (Schnitt-)Punkt hat, d.h. $(f(x) = y \wedge f(x') = y) \Rightarrow x = x'$.*

Bsp. 3.1

- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ *umkehrbar*
- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *nicht umkehrbar*
- $D = [0, \infty[$, $f(x) = x^2$ *umkehrbar*

Definition 3.7 *Falls $f : D \to \mathbb{R}$ umkehrbar und $y \in W(f)$, dann ex. genau ein $x = x(y)$, so dass $(x, y) \in graph(f)$.*
Die Zuordnung $W(f) \ni y \to x(y) \in \mathbb{R}$ defniert die **Umkehrfunktion von f**. *Schreibweise $f^{-1} : W(f) \to \mathbb{R}$*

Grafisch $\text{graph}(f^{-1}) = \{(y, x) \,|\, y \in W(f), f(x) = y\}$
(Spiegelung von graph(f) an der Diagonalen)

Berechnung der Umkehrfunktion - Beispiel

Zerfallgesetz $f(x) = M_0\gamma^{-x}$, $D(f) = [0, \infty[$.
mit $M_0 > 0, \gamma > 1$

Monotonie Wegen $\gamma > 1$ ist $x \to \gamma^{-x} = (\frac{1}{\gamma})^x$ strikt monoton fallend $\Rightarrow f$ umkehrbar.

Wertebereich $W(f) =]0, M_0]$

Umkehrfunktion Sei $y \in]0, M_0]$, gesucht: $x \in D(f)$ so dass $f(x) = y$.

$$\begin{gathered} y = f(x) = M_0\gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{M_0} = \gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow -x = \log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \\ \Leftrightarrow x = -\log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \end{gathered}$$

Also $f^{-1}(y) = -\log_\gamma(\frac{y}{M_0})$, $D(f^{-1}) =]0, M_0]$.

Bedeutung $f^{-1}(y) =$ Zeitpunkt x, wenn $f(x) = y$.

Satz 3.1 *Für $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $D(f) = \mathbb{R}$ dann ist $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_{>0}$.* □

Quadratische Funktionen

Definition 3.8 $f(x) = ax^2 + bx + c$ **Quadratische Funktion**

Scheitelform
$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2)) \\ &= a\big((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\big) =: A\big((x-B)^2 + C\big) \end{aligned}$$

Scheitelpunkt $S = \big(-\frac{b}{2a}, \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\big) = (B, C)$

Öffnung nach oben: $A > 0$, nach unten: $A < 0$.

Nullstellen $x_{1/2} = B \pm \sqrt{-C} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$ (**p-q-Formel**), falls $C \leq 0$, ansonsten keine.

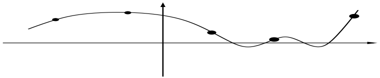
Linear-Faktor-Zerlegung
$$\begin{aligned} &A(x - x_1)\cdot(x - x_2) \\ &= A\big((x-B) - \sqrt{-C}\big)\cdot\big((x-B) + \sqrt{-C}\big) \\ &= A((x-B)^2 + C) = f(x) \end{aligned}$$

Polynome

Definition 3.9 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_N x^N$ **Polynom**

Bsp. 3.2
$$\begin{aligned} p(x) &= 3(x-1)(x-5)(x+2) \\ &= 3(x-1)(x^2-3x-10) \\ &= 3x^2 - 12x^2 - 21x + 30 \end{aligned}$$

Satz 3.2 *Für* $N+1$ *Punktepaare* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{N+1}, y_{N+1})$ *(mit* $x_i \neq x_j$ *f.* $i \neq j$*) ex. Polynom* $x \to p(x)$ *mit Grad* N*, so dass* $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots N+1$



Bew: *(Induktiv)* $p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$

Polynomdivision

Satz 3.3 *Zu zwei Polyomen p, q ex. Polynome s, r so dass*

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x) \,\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ und } grad(r) < grad(q)$$

Bemerkung $\Leftrightarrow p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ *und grad(r) < grad(q).*

Bsp. 3.3

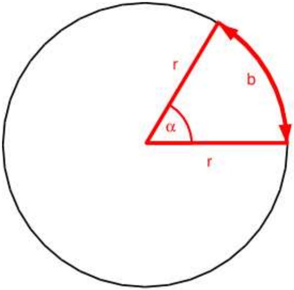
$$(x^4 \; +3x^3 \; -5x^2 \; +3x \; -5) : (2x+1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{8}x + \frac{49}{16} - \frac{129}{16}\frac{1}{2x+1}$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{(x^4 + \frac{1}{2}x^3)} \\
\qquad \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 \\
\qquad -\underline{(\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2)} \\
\qquad\qquad -\frac{25}{4}x^2 + 3x \\
\qquad\qquad -\underline{(-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{8}x)} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{49}{8}x - 5 \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{(\frac{49}{8}x + \frac{49}{16})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{129}{16} = Rest
\end{array}$$

Bsp. 3.4 $(3x^5 + 6x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 + 2x - 1) = 3x^2 + 3x - 3 + \frac{9x-1}{x^2+2x-1}$

Die Winkelfunktionen (II)

Winkel- u. Bogenmaß

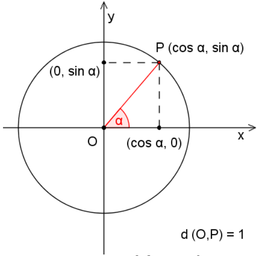


Fall r=1 b ist proportional zu α.Falls $\alpha = 360^\circ \Rightarrow b = 2\pi$ (Kreisumfang), d.h.

$$\boxed{b(\alpha) = 2\pi \frac{\alpha}{360}}$$

r beliebig $b = \frac{2\pi}{360}\alpha \cdot r$

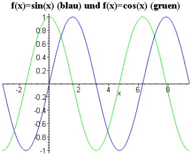
Sinus und Cosinus



Definition

$$\left.\begin{array}{l}\text{sinus} = \text{y-Koordinate}\\ \text{cosinus} = \text{x-Koordinate}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{vom Schnittpunkt}\\ \text{zum Winkel } \alpha\end{array}$$

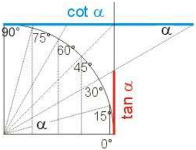
Graphen



2π periodisch,
sin ungerade, cos gerade
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Pythagoras $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Tangens und Cotangens

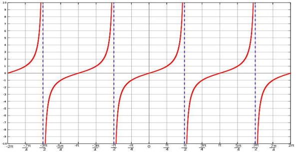


Definition

tangens $=$ Steigung $= m = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ zum Winkel α

cotangens $= m' = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ Steigung zum Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$

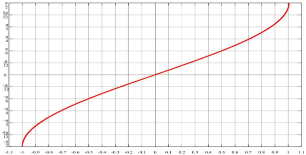
Graph



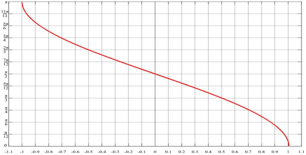
π periodisch,
ungerade

Arkusfunktionen

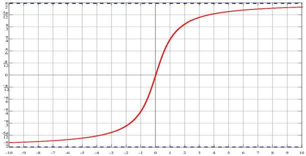
$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$



$\arctan = \tan^{-1} :]-\infty, \infty[\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

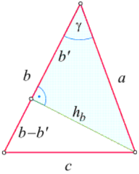


Trigonometrische Identitäten

Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{gathered}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos x + \sin y \cos x\end{gathered}}$$

Cosinussatz



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Beweis: (Übung)

3.2 Stetigkeit

Definition 3.10 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heßt* **stetig***, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ $x_n \to x \in D$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x)$.*

Bsp. 3.5 $f(x) = sign(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ *ist nicht stetig, denn mit $x_n := -\frac{1}{n} \to 0$ gilt $f(x_n) = -1$, d.h. $f(x_n) \to -1 \neq 0 = f(0)$.*

Bsp. 3.6 *$f(x) = x^2$ ist stetig. Sei $x_n \to x$ und, dann $f(x_n) - f(x) = x_n^2 - x^2 = (x - x_n)(x + x_n) \to 2x \cdot 0 = 0$.*

Bsp. 3.7 *$f(x) = \sin(x)$ ist stetig, denn $|\sin(x_n) - \sin(x)| = |\operatorname{Im}(e^{ix_n} - e^{ix})| = |\operatorname{Im}(e^{ix_n} - e^{ix})| \leq |x_n - x| \to 0$, falls $x_n \to x$.*

Bemerkung *Falls $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt $|e^{ia} - e^{ib}| \leq d_{\text{arg}}(e^{ia}, e^{ia}) \leq |a - b|$*

Bsp. 3.8 *$f(x) = e^x$ ist stetig, denn $|e^x - e^{x_n}| = e^x |1 - e^{x - x_n}|$ und falls $|x - x_n| \leq 1$, so ist $|1 - e^{x - x_n}| \leq |x - x_n| \frac{7}{4}$ (vergl. Lemma 2.14) Also für hinreichend großes n:*

$$|e^x - e^{x_n}| \leq e^x \frac{7}{4} |x - x_n| \to 0$$

Definition 3.11 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst* **stetig im Punkt** $x \in D$, *falls für alle (x_n) mit $x_n \in D$ und $x_n \to x$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Bsp. 3.9 $f(x) = sign(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ *ist nicht stetig in $x = 0$ und stetig in allen $x \neq 0$.*

Bemerkung *f stetig in $D \Leftrightarrow f$ stetig in allen Punkten $x \in D$.*

Satz 3.4 *$f, g : D \to \mathbb{R}$ seien steig in $x \in D$, dann sind auch $f + g, f - g, f \cdot g$ steig in $x \in D$. Falls $g(x) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in x.*

Bew: *Z.B. für '+': $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und falls $x_n \to x$, so ist $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$, wg. Stetigkeit von f und g.* □

Satz 3.5 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : W(f) \to \mathbb{R}$ mit f steitig im Punkt $x \in D$ und g stetig im Punkt $f(x)$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x.*

Bew: *Sei $y = f(x)$ und $z = g(y)$, dann ist $g \circ f(x) = g(y) = z$ und falls $x_n \to x$ so ist $y_n = f(x_n) \to y$, wg. Stetigkeit von f. Wg. der Stetigkeit von g gilt dann auch $g(y_n) \to g(y) = z$, also $g \circ f(x_n) \to z = g \circ f(x_n)$.* $\square$

Bsp. 3.10 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \textit{falls } x \neq 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.

Bew: *Falls $x \neq 0$, so ist f stetig in x wg. der vorigen beiden Sätze. Falls $x = 0$, so ist $f(x) = 0$, und falls $x_n \to 0$, so ist $|f(x_n) - f(x)| = |0 - x_n \sin(1/x_n)| = |x_n \sin(1/x_n)| \leq |x_n| \to 0$.* $\square$

Zwischenwertsatz

Satz 3.6 (zws) *Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $u, v \in W(f)$, so ist jedes $t \in [u, v]$ ebenfalls in $W(f)$.*

Bemerkung *Bedeutung: Intervall $\xrightarrow{f}$ Intervall, falls f stetig.*

Bew: *Beweis durch Intervallschachtelung: Sei $a_1, b_1 \in [a, b]$, so dass $f(a_1) = u$ und $f(b_1) = v$. Sei oBdA $a_1 \leq b_1$, dann sei $I_1 = [a_1, b_1]$. Falls $f(m_1) \leq t$ mit $m_1 = (a_1 + b_1)/2$, dann setze $I_2 = [m_1, b_1]$, andernfalls $I_1 = [a_1, m_1]$. Iteration liefert Intervallschachtelung $(I_n)_n = ([a_n, b_n])_n$, so dass $f(a_n) \leq t$ sowie $f(b_n) \geq t$.*
Sei x der innere Punkt der Intervallschachtelung, dann ist und $a_n \to x$, sowie $b_n \to x$, und

$$f(x) = \lim f(a_n) \leq t, \text{ bzw. } f(x) = \lim f(b_n) \geq t,$$

also $f(x_0) = t$. □

Satz vom Maximum und Minimum

Satz 3.7 (Minimax) *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an, d.h. ex. x_{min} und x_{max}, s.d. $f(x_{min}) = \min\{f(x) \,|\, x \in D\}$ bzw. $f(x_{max}) = \max\{f(x) \,|\, x \in D\}$.*

Bew: *1) $W(f)$ ist beschränkt, denn andernfalls sei $x_n \in D$ mit $|f(x_n)| > n$, dann ist (x_n) beschränkt und also ex. konvergente Teilfolge mit $x_{n_k} \to x$ (Bolzano-Weierstrass). Wg. Stetigkeit von f gilt aber $f(x) = \lim_k f(x_{n_k})$, d.h. $|f(x)| \geq n_k$ für alle k, Widerspruch.*
2) Sei $m = \inf W(f)$, dann ex. zu $n \in \mathbb{N}$ ein x_n, s.d. $f(x_n) - m = |m - f(x_n)| \leq \frac{1}{n}$ (Infimumseigenschaft). (Bolzano-Weierstrass) Es ex. Teilfole $x_{n_k} \to x \in D$ und somit wg. Stetigkeit von f auch $f(x) = \lim f(x_{n_k}) = m$.
Analog für Maximum. $\square$

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz 3.8 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und umkehrbar, dann ist auch $f^{-1} : W(f) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Lemma 3.1 *Sei (a_n) eine reelle Folge, so dass jede Teilfolge hiervon eine gegen $a \in R$ konvergente Teilfolge enthält, dann konvergiert die gesamte Folge (a_n) gegen a.*

Bew: (Satz 3.8) *Sei $y \in W(f)$ und $y_n \in W(f)$ mit $y_n \to y$. Dann ist*
$x_n := f^{-1}(y_n)$ beschränkt, also ex. konv. Teilfolge
$x_{n_k} \to x_* \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f gilt
$f(x_*) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = y$.
Also $x_* = f^{-1}(y) = \lim f^{-1}(y_{n_k})$.
Jede Folge $y_n \to y$ enthält somit eine Teilfolge y_{n_k}, s.d.
$f^{-1}(y_{n_k}) \to f^{-1}(y)$.
Wg. Lemma oben gilt somit, dass $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. $\square$

Die ϵ-δ-Charakterisierung der Stetigkeit

Satz 3.9 *Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn*
$$\forall\, \epsilon > 0 \exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| \le \epsilon \forall x : |x - x_0| \le \delta.$$

Bew: *'$\Leftarrow$': Sei $x_n \to x_0$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Dann ex. $\delta > 0$ wie oben und für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_0 - x_n| \le \delta$.*
Also auch $|f(x_0) - f(x_n)| \le \epsilon$ für schließlich alle n.
'$\Rightarrow$' (Widerspruchsbweis):
Falls $\exists\, \epsilon > 0$, s.d. $\forall \delta > 0 \,\exists\, x$: $|x - x_0| \le \delta$ aber
$|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$,
Wähle Folge von $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, so ex. Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ und
$|f(x_0) - f(x_n)| \ge \epsilon > 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Stetigkeit von f im Punkt x_0. $\square$

Definition 3.12 *Seien $f: D \to \mathbb{R}$ dann heißt $a \in \mathbb{R}$* **Grenzwert von** f **in** $x_0 \in \overline{D}$
$$:\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : |f(x) - a| \le \epsilon \,\forall\, x \in D : |x - x_0| \le \epsilon.$$
Schreibweise $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

Kapitel 4:

Differentialrechnung

4.1 Der Ableitungsbegriff

Differenzierbarkeit

Definition 4.1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **differenzierbar im Punkt** $a \in D$, *falls eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{für jede Folge } (a_n) \textit{ mit} \\ D \ni a_n \neq a \textit{ und } a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \textit{ gilt:} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a_0)}{a_n-a} = m.\end{array}}$$

Schreibweisen $m = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$

Sprechweise m = **Ableitung von f im Punkte a**

Bemerkung *Sekantensteigung* $\hat{=}$ **'Differenzenquotient'**
Ableitung $\hat{=}$ **'Grenzwert der Differenzenquotienten'**

Beispiele (– Skizzen –)

- $f(x) = \lambda x + \mu$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = |x|$

Bestimmung der Ableitung – Beispiele

$f(x) = x^2$ $\quad \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^2-a^2}{a_n-a} = \frac{(a_n-a)(a_n+a)}{a_n-a} = a_n + a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \lim_n (a_n + a) = 2a = f'(a).$

$f(x) = x^k$ $\quad \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^k-a^k}{a_n-a} = a_n^{k-1} + a \cdot a_n^{k-2} + \cdots + a^{k-2}a_n + a^{k-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = ka^{k-1} = f'(a).$

$f(x) = 1/x$ $\quad$ Sei $a \neq 0$: $\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{1/a_n-1/a}{a_n-a} = \frac{\frac{a-a_n}{a\cdot a_n}}{a_n-a} = -\frac{1}{a\cdot a_n} \to \frac{-1}{a^2} = f'(a).$

Bestimmung der Ableitung – Winkelfunktionen

$\sin(x), \cos(x)$ $\quad \sin'(a) = \cos(a)$ und $\cos'(a) = -\sin(a)$.

Bew: *Da für* $0 < x < 1$

$$x - \frac{x^3}{3!} \overset{Leibniz-Reihe}{\leq} \sin x \overset{Lemma\ 2.13}{\leq} x$$

folgt für $a_n \to 0$

$$\sin'(0) = \lim_n \frac{\sin a_n}{a_n} = \lim_n \frac{\sin |a_n|}{|a_n|} = 1 = \cos(0)$$

Analog $\cos'(0) = 0 = -\sin(0)$*. Für* $a \in \mathbb{R}$ *beliebig:*

$\sin(a_n) = \sin(a+(a_n-a)) = \sin(a)\cos(a-a_n)+\sin(a-a_n)\cos(a)$

Somit

$$\frac{\sin a_n - \sin a}{a_n - a} = \sin(a)\frac{1-\cos(a-a_n)}{a_n-a} + \cos(a)\frac{\sin(a-a_n)}{a_n-a} \overset{n\to\infty}{\to} \cos a.$$

Analog für $\cos'(a)$. $\square$

Differenzierbarkeit: Alternative Definitionen

Satz 4.1 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$ genau dann wenn der Limes $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \neq x \in D}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.*

Bew: *Für $f : D \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $h : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,*
$h(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sinnvoll definiert.
Dann gilt gem. Definition 3.12 und Satz 3.10:
f ist differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} h(x)$ existiert. $\square$

Korollar 4.1 *$f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ diff'bar genau dann, wenn ex. $m \in \mathbb{R}$, s.d.*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D, |x - x_0| < \delta$$
$$|f(x) - f(x_0) + m(x - x_0)| \leq \epsilon |x - x_0|.$$

Diff'barkeit: Alternative Definitionen (II)

Satz 4.2 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = m$ genau dann wenn ein $m \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ existieren mit*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \phi(x),$$

wobei $\frac{\phi(x)}{x-x_0} \to 0$ *falls* $x \to x_0$.

Bew: *'$\Rightarrow$': Falls $f'(x_0) = m$ setze $\phi(x) := f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$.*
Dann gilt $\phi(x)/(x - x_0) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) - m \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.
'$\Leftarrow$' Falls solche m und ϕ existieren, so gilt $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) - m = \phi(x)/(x - x_0) \to 0$, also ex. $f'(x_0)$ und $f'(x_0) = m$. $\square$

Erste Konsequenzen der Differenzierbarkeit

Satz 4.3 *Falls $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ diff'bar, so ist f auch stetig in x_0.*

Bew: *Sei ϕ wie gegeben wie im vorigen Satz und $x_n \to x_0$, dann gilt $f(x_n) - f(x_0) = m(x_n - x_0) + \phi(x_n)$ mit $\phi(x_n)/(x - x_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere $\phi(x_n) \to 0$, also auch $f(x_n) \to f(x_0)$.* $\square$

Definition 4.2 *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$. Dann heißt eine lineare Funktion $t(x) = mx + b$ eine* **Tangente an den Graphen von f im Punkt** *$x_0 \in D$, falls*

$$1)\ t(x_0) = f(x_0) \text{ und } 2)\ m = f'(x_0).$$

Satz 4.4 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = m$ so ist*

$$t(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$$

die Tangente an den Graphen von f im Punke $x_0 \in D$.

Bew: $t'(x) = m = f'(x_0)$ *und* $t(x_0) = f(x_0)$ $\square$

Bemerkung *(Satz 4.2 $\Rightarrow$) $t(x) - f(x) = \phi(x)$ mit $|\phi(x)/(x - x_0)| \xrightarrow{x \to 0} 0$.*

4.2 Ableitungsregeln

Ableitungsregeln

Satz 4.5 (Summen- u. Produktregel) *Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$, dann ist $f+g$, $f \cdot g$ diff'bar in $x_0 \in D$ und es gilt*
$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g`(x_0)$,
$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Bew: $\frac{(f+g)(x_n)-(f+g)(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} + \frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0)$ $\surd$
$\frac{(f \cdot g)(x_n)-(f \cdot g)(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{(f \cdot g)(x_n)-f(x_0)g(x_n)+f(x_0)g(x_n)-(f \cdot g)(x_0)}{x_n-x_0}$
$= g(x_n)\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} + f(x_0)\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} \to g(x)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
$\square$.

Bsp. 4.1 $f(x) = x^2 \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$.

Satz 4.6 (Kettenregel) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$ und $g : W(f) \to \mathbb{R}$ diff'bar in $y_0 = f(x_0)$, so ist $g \circ f$ diff'bar in x_0 mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Bsp. 4.2 $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$.

Ableitungsregeln (Forts.)

Bew: (Kettenregel) *Zu $x \in D$ sei $y = f(x)$, dann gilt wg. der Diff'barkeit von g*

$$g \circ f(x) - g \circ f(x_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \phi(y)$$

und wg. der Diffbarkeit von f

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \psi(x)$$

Also eingesetzt

$$g \circ f(x) - g \circ f(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)(x - x_0) + g'(y_0)\psi(x) + \phi(f(x))$$

Sei $\rho(x) := g'(y_0)\psi(x) + \phi(f(x))$. Wg. der Stetigkeit von f gilt $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$, und folglich

$$\frac{|\rho(x)|}{|x-x_0|} \leq |g'(y_0)| \frac{|\psi(x)|}{|x-x_0|} + \frac{|\phi(f(x))|}{|f(x)-f(x_0)|} \cdot \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}$$

$$= |g'(y_0)| \frac{|\psi(x)|}{|x-x_0|} + \frac{|\phi(y)|}{|y-y_0|} \cdot \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \to 0, \text{ falls } x \to x_0,$$

aufgrund der Eigenschaften von ϕ bzw. ψ.

Ableitungsregeln (Forts.)

Korollar 4.2 (Quotientienregel) *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x_0 \in D$ und $g'(x_0) \neq 0$*
$\Rightarrow (f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0))/(g'(x_0))^2$.

Bew: $(f/g) = f \cdot \frac{1}{g} = f \cdot h(g)$ *mit* $h(x) = \frac{1}{x}$.
$\rightsquigarrow$ *Anwenden von Produkt- und Kettenregel liefert*
$(f/g)' = f' \cdot h(g) + f \cdot h'(g) \cdot g' = f'/g - f/g^2 \cdot g' = (fg' - g'f)/g^2$
$\square$

Ableitungsregeln (Forts.)

Satz 4.7 (Abl. der Umkehrfkt.) *Falls $f : D \to \mathbb{R}$ invertierbar und es ex. $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in D$, dann ex. $(f^{-1})'(y_0)$ für $y_0 = f(x_0)$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$*

Bew: *$g := f^{-1}$ ist stetig in y_0 (Satz 3.8) und $(g \circ f)(x) = x \; \forall \, x \in D$. Sei $W(f) \ni y_n = f(x_n) \to y_0$. Dann $x_n \to x_0$, und $(g(y_n) - g(y_0))/(y_n - y_0) = (x_n - x_0)/(f(x_n) - f(x_0)) \to 1/f'(x_0)$.*

Bemerkung *Merkregel $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.*

Bsp. 4.3 *$f(x) = \sqrt{x} = g^{-1}(x)$ mit $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = x^2$.*
$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$.

Ableitungsregeln (Forts.)

Satz 4.8 *Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x = f(x)$.*

Bew: *1) Falls $x_0 = 0$: Sei $x_n \to 0$, dann (Lemma 2.14):*
$e^0 - e^{x_n} = 1 - e^{x_n} = x_n(1 + R(x_n))$ *mit* $|R(x_n)| \leq \frac{3}{4}|x_n|$ *Folglich*
$\frac{e^0 - e^{x_n}}{x_n} = 1 + R(x_n) \to 1$, *also* $\exp'(0) = 1 = \exp(0)$
2) Falls $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x_n \to x_0$, dann
$\frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{x_n - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} = f(x_0)$ $\square$

Korollar 4.3 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$.

Bew: $f = g^{-1}$ *mit* $g(x) = \exp(x)$, *also* $f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

Korollar 4.4 *1) $f(x) = x^\alpha$ für $x \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$*
2) $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^{xh}$.

Bew: *1)* $f(x) = \exp(\alpha \ln x) \Rightarrow f'(x) = \exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.
2) $f(x) = \exp(x \ln a) \Rightarrow f'(x) = \ln a \exp(x \ln a) = \ln a \cdot a^x$. $\square$

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

4.3 Differenzierbare Funktionen

Lokale Extrema

Definition 4.3 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, dann hat f in x_0 ein* **lokales Minimum**, *falls $\exists \delta > 0$, s.d.*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Bemerkung x_0 **lokale Minimalstelle**, $f(x_0)$ **lokales Minimum**

Definition 4.4 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, dann heißt $x \in M$ ein* **innerer Punkt von** M, *falls*

$$\exists \rho > 0 \text{ s.d } \quad]x - \rho, x + \rho[\subset M.$$

Satz 4.9 (Notw. Kriterium) *Falls $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D und lokale Minimalstelle von $f : D \to \mathbb{R}$ und f diff'bar in x_0, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Bew: *Sei $x_k \searrow x_0$, dann gilt*
$(f(x_k) - f(x_0))/(x_k - x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0.$
Sei $\tilde{x}_k \nearrow x_0$, dann gilt
$(f(\tilde{x}_k) - f(x_0))/(\tilde{x}_k - x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0.$
Also $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung *Analog für* **lokale Maxima**.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 4.10 (Satz v. Rolle) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$ sowie $f(a) = f(b)$, dann ex. $\xi \in]a, b[$, s.d. $f'(\xi) = 0$.*

Bew: *(Minimax) f nimmt auf $[a, b]$ Min und Max an. Falls $\min_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} = f(a) = f(b)$, so ist $f'(\xi) = 0 \, \forall \xi \in]a, b[$.*
Falls $f(\alpha) = \min_{[a,b]} f < \max_{[a,b]} f = f(\beta)$, so muss mindestens einer der beiden Punkte α oder β ein innerer Punkt von $[a, b]$ sein, d.h. $\{\alpha, \beta\} \cap]a, b[\neq 0$. Folglich gibt es mind. eine innere lokale Extremalstelle von f auf $[a, b]$, d.h. $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = 0$. $\square$

Satz 4.11 (MWS der Diff.-Rech.) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a, b[$, dann ex. $\xi \in]a, b[$, s.d. $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Bew: *Wende Satz v. Rolle an auf $h(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.* $\square$

Ableitung und Monotonie

Satz 4.12 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a,b[$, dann gilt*
1) $f'(x) = 0 \, \forall x \in]a,b[\Leftrightarrow f$ konstant
2) f monoton wachsend auf $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \, \forall x \in]a,b[$.
3) $f'(x) > 0 \, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ streng monoton wachsend

Bew: *1) '$\Leftarrow$' $\surd$. $\Rightarrow$ Falls f nicht konstant, so ex. $\alpha < \beta \in [a,b]$, s.d. $f(\alpha) \neq f(\beta) \Rightarrow \exists \xi \in]\alpha, \beta[: f'(\xi) = (f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha) \neq 0$.*
2) (Übung)
3) Wegen 2) ist f monoton wachsend auf $[a,b]$. Falls f nicht streng monoton wachsend auf $[a,b]$, so ex. $\alpha < \beta$, s.d. $f(\alpha) = f(\beta)$, also auch ein $\xi \in]\alpha, \beta[$ mit $f'(\xi) = 0$. □

Bemerkung *Analog $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \, \forall x \in]a,b[$ und $f'(x) < 0 \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ streng monton fallend auf $[a,b]$.*

Bemerkung *$f(x) = x^3$ ist streng monton wachsend aber $f'(0) \not> 0$!*

Satz 4.13 (Hinr. Kriterium(I)) *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar und $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x) \geq 0$ für $x \geq x_0$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \leq x_0$, dann hat f in x_0 ein (lok.) Minimum.*

Bew: *f wachsend auf $[x_0, b[$, fallend auf $]b, x_0]$ $\Rightarrow f$ hat Min. in x_0.* □

Fehler-Schrankensatz und L'Hospital'sche Regel

Satz 4.14 (Fehler-Schrankens.) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a,b[$, sowie $|f'(x)| \leq C \forall x \in]a,b[$, dann gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b]$$

Bew: $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq C|x-y|$. $\square$

Satz 4.15 (Allg. MWS) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf $]a,b[$ mit $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in]a,b[$, dann ex. $\xi \in]a,b[$, s.d. $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Bew: *Satz v. Rolle für $h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.* $\square$

Satz 4.16 (L'Hospital) *Falls $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a,b[$ mit $f(a) = 0 = g(a)$ und $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. Dann $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bew: *Sei (x_k) mit $a_k \in [a,b]$ und $a_k \to a$, (Allg. MWS) $\Rightarrow \exists \xi_k \in]a, x_k[$, s.d. $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(x_k)-f(a)}{g(x_k)-g(a)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \to \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$, da $\xi_k \to a$.* $\square$

Höhere Ableitungen

Definition 4.5 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei diff'bar auf $]a, b[$ Dann heißt f*
1) **stetig differenzierbar** *in $]a, b[$, falls*

$$g :]a, b[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) \text{ stetig auf }]a, b[$$

2) **zweimal differenzierbar in** *$x_0 \in]a, b[$, falls*

$$f' :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ diff'bar in } x_0.$$

Bsp. 4.4 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ ist diff'bar in $\mathbb{R}$ mit*

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

f' diff'bar in $x \neq 0$ und f' unstetig in 0. Somit ist f
– differenzierbar aber (in $x = 0$) nicht stetig differenzierbar
– zweimal differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

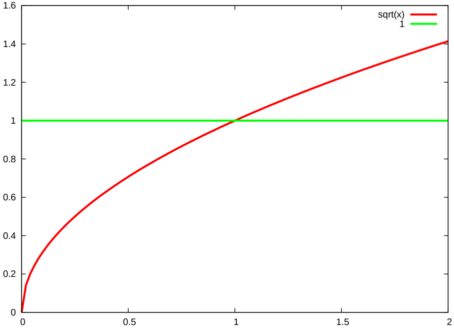
Definition 4.6 *$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ heißt* **k-mal differenzierbar** *in $]a, b[$, falls für alle $x \in]a, b[$ und $i = 1, \cdots k$ die Ableitungen $g_i'(x)$ existieren mit mit $g_i :]a, b[\to \mathbb{R}, g_i(x) := g_{i-1}'(x), g_1 := f$. Falls $g_k :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f* **k-mal stetig differenzierbar.**

Bemerkung *Schreibweise $g_k = f^{(k)}$ (k-***te Ableitung von** *f).*

Der Satz von Taylor – Motivation

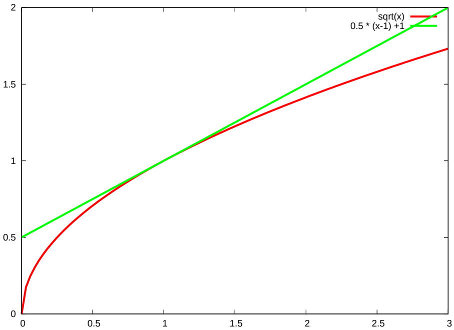
Beispiel Berechne $\sqrt{1.3}$ möglichst genau
ohne Taschenrechner! (TR: 1.1401754)

0. Idee: Konstante $f(x) = \sqrt{x}$, gesucht $f(1.3)$.



$f(1.3) \simeq C$ mit $C = f(1) = 1$.
Approximationsfehler: $\Delta_0 = 0.1401$

1. Idee: Tangente

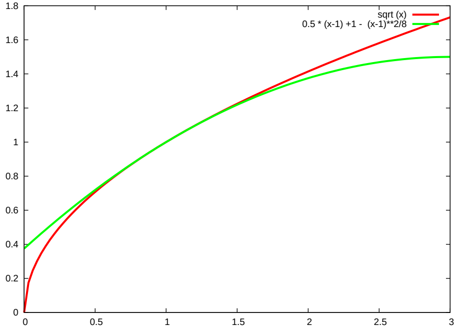


$t_a(x) = m \cdot (x - a) + C$
mit $m = f'(a)$ und $C = f(a)$ und $a = 1$.
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow t_1(x) = \frac{1}{2}(x-1) + 1}$$

$\Rightarrow t_1(1.3) = 0.15 + 1 = 1.15$
Approximationsfehler: $\Delta_1 = -0.0099$

2. Idee: Parabel



$p = p_a(x) = t_a(x) + \alpha(x-a)^2$,wobei α so gewählt, dass

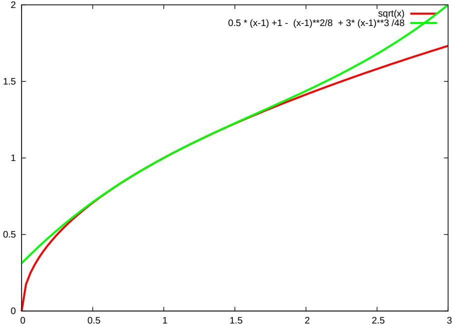
$$\boxed{p''(a) = f''(a) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} f''(a)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(x^{-1/2})' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\Rightarrow p_a(x) = t_a(x) - \frac{1}{8}(x-a)^2}$$

i.e $p_a(1.3) = 1.15 - 0.09/8 = 1.13875$ Approximationsfehler: $\Delta_2 = +0.002$

3. Idee: Polynom 3. Ordnung



$q_a(x) = p_a(x) + \beta(x-a)^3$,wobei β so gewählt, dass

$$\boxed{q'''(a) = f'''(a) \Rightarrow \beta = \frac{1}{6} f'''(a)}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}(x^{-3/2})' = \frac{3}{8}(x^{-5/2}), \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\Rightarrow q_a(x) = p_a(x) + \frac{3}{48}(x-a)^3}$$

i.e $q_a(1.3) = 1.13875 + \frac{3}{48} \cdot 0.3^3 = 1.1404375$
Approximationsfehler: $\Delta_3 = +0.00028$

Satz von Taylor – Aussage

Definition 4.7 *Für $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ n-mal diff'bar und $x_0\in]a,b[$, heißt die Funktion*

$$x\to f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

n-tes Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt x_0.

Bemerkung *Kurzschreibweise $T_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.*

Satz 4.17 (Satz v. Taylor) *Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $x_0\in]a,b[$. Dann gibt es zu $x\in]a,b[$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass*

$$f(x)-T_{n,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Korollar 4.5 *Falls $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal diff'bar mit $\sup\limits_{x\in]a,b[}|f^{(n+1)}|(x)\le C$*

$$\Rightarrow |f(x)-T_{n,x_0}(x)|\le\frac{C}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\quad\forall x\in]a,b[.$$

Satz von Taylor – Beweis

Bew: (Taylor) *Zu* $x \in]a,b[$ *sei*

$$p(t) := f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$\Rightarrow p'(t) = f'(t) - f'(t) + (x-t)f''(t) - (x-t)f''(t) \cdots$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Ferner: $p(x) = f(x)$ *und* $p(x_0) = T_{n,x_0}(x)$.

Sei $g(t) = (x-t)^{n+1}$.

Falls $x > x_0$ *dann wg. Allg. MWS für* $t \in [x_0, x]$

$$\exists \xi \in]x_0, x[: \quad \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{p(x)-p(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{-(x-x_0)^{n+1}}$$

Analog im Fall $x < x_0$. $\square$

Lokale Extrema – Hinreichendes Kriterium(II)

Satz 4.18 *Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in]a,b[$, s.d. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ferner sei und $f^{(n)}$ stetig in x_0.*
Dann hat f in x_0
1) ein lokales Minimum, falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$,
2) ein lokales Maximum, falls n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$,
3) einen Sattelpunkt, falls n ungerade.

Bew: $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ mit einem ξ zwischen x und x_0.
Fall 1): Stetigkeit von $f^{(n)}$ in x_0
$\Rightarrow f^{(n)}(\xi) > 0 \forall \xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ für ein $\delta > 0$.
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \forall x \in]x - \delta, x + \delta[$ $\qquad \surd$
Fall 2) Analog: Ex. $\delta > 0$, s.d. $f^{(n)}(\xi) < 0 \forall \xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. $\qquad \surd$
Fall 3) Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann $f^{(n)}(\xi) > 0 \forall \xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n > f(x_0)$, falls $x \in]x_0, x_0 + \delta[$,
bzw. $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n < f(x_0)$, falls
$x \in]x_0 - \delta, x_0[$, d.h. x_0 Sattelstelle von f. $\qquad \square$

Taylor-Reihe

Definition 4.8 *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ unendlich oft diff'bar in $x_0 \in]a, b[$ und $x \in]a, b[$, dann heißt die Reihe*

$$T^f_{x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe in x zu f und Entwicklungspunkt x_0**.

Bemerkung $\lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x) = T^f_{x_0}(x) \stackrel{?}{=} f(x)$.

Bsp. 4.5 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$.*

Dann gilt: f ist unendlich oft diff'bar auf $\mathbb{R}$ und $f^{(n)}(0) = 0$.

$$\text{(Mit } x_0 = 0\text{)} \Rightarrow \quad T^f_0(x) = 0 \neq f(x) \quad \forall\, x \neq 0.$$

Definition 4.9 *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ unendlich oft diff'bar in $x_0 \in]a, b[$, dann heißt*

f **analytisch im Punkt x_0**

falls für ein $\delta > 0$

$$f(x) = T^f_{x_0}(x) \quad \forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Analytizität und Potenzreihen

Definition 4.10 *1) Sei (a_k) eine reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann heißt* $x \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ **die Potenzreihe zu (a_k) und Enwicklungspunkt x_0.**
2) Der **Konvergenzradius** *der Potenzreihe ist*

$$\rho := 1 / \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Satz 4.19 *1) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ absolut konvergent, für $|x - x_0| > \rho$ divergent.*
2) Falls $\rho > 0$, so ist die Funktion $h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ diff'bar auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ und $h'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^k$ Der Konvergenzradius von $h'(x)$ ist wieder ρ. □

Korollar 4.6 *Falls $\rho > 0$ so ist $h :]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\to \mathbb{R}$ analytisch im Punkt x_0 mit $h^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$.*

Korollar 4.7 *$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ist analytisch in $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f$ ist in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ als Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ darstellbar.*

Überprüfen der Analytizität

Bemerkung $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *ist analytisch in* $x_0 \in]a,b[$

$$\overset{\text{Def. 4.9}}{:\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \lim_{n\to\infty} T_{n,x_0}(x) = f(x)$$

Bsp. 4.6 *Für* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ *und* $x_0, z \in \mathbb{R}$ *gilt* $T_{n,x_0}(z) \to f(z)$ *für* $n \to \infty$.

Bew: *Sei z.B.* $z > x_0 \geq 0$, *dann*

$$f(z) - T_{n,x_0}(z) = \frac{\exp(\xi)}{n!}(z - x_0)^n$$

mit $\xi = \xi_n \in [x_0, z]$ *(hängt von* n *ab!)*

$$\Rightarrow |f(z) - T_{n,x_0}(z)| \leq \frac{\exp(z)}{n!}(|z|)^n = \exp(z)\frac{z^n}{n!} \to 0,$$

da für jedes $c > 0$ *gilt* $\lim_n c^n/n! \to 0$ *(Übung).* $\square$

Korollar 4.8 *Die Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist analytisch in jedem Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bsp. 4.7 $x_0 = 3 \Rightarrow exp(x) = T_3^f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^3}{3!}(x-3)^k$.

Bemerkung *Schöne Weihnachten!*

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

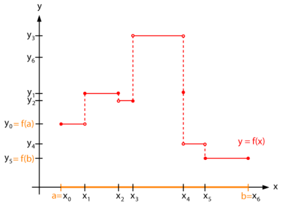
Kapitel 5:

Integralrechnung

5.1 Das Integral für Treppenfunktionen

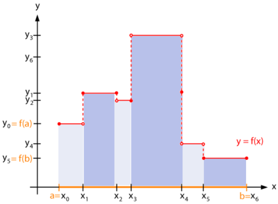
Treppenfunktionen

Definition 5.1 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* **Treppenfunktion**
$\Leftrightarrow$ *Es ex. Punkte $a = x_0 < x_1 < \cdots x_2 < \cdots < x_N = b$, so dass $\forall i = 0, \cdots, N-1$:*
$f :]x_i, x_{i+1}[\to \mathbb{R}$ konstant



Bemerkung *1) Die Punkte $x_i, i = 0, \cdots, N$ bilden eine* **'zulässige Trennung auf** $[a,b]$**'** *für die Treppenfunktion f.*
2) Durch Hinzunahme von weiteren Punkten $x' \in [a,b] \setminus \{x_0, \cdots, x_N\}$ zu $\{x_0, \cdots, x_N\}$ entsteht wieder eine zulässige Trennung auf [a,b] für f.
3) Die Werte von f auf den Punkten x_i, $i = 0, \cdots, N$, sind dabei irrelavant.

(Elementar-)Integral für Treppenfunktionen



Definition 5.2 *Es sei $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ eine zulässige Trennung für f, d.h. so dass $\forall i = 0, \cdots, N-1$:*

$f(t) = c_i$ falls $t \in]x_i, x_{i+1}[$, dann heißt die Zahl

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{N-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

das **Integral von** f **auf dem Intervall** $[a, b]$**.**

Wohldefiniertheit des Elementarintegrals

Lemma 5.1 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit zul. Trennung $a = x_0 < x_1 \cdots < \cdots < x_N = b$.*
Sei $a = y_0 < \cdots x_2 < \cdots < x_M = b$ eine Verfeinenerung von $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ d.h.

$$\{x_0, x_1 \cdots, x_n\} \subset \{y_0, \cdots, y_M\}$$

mit $f =: \tilde{c}_j$ auf $]y_j, y_{j+1}[$ dann ist

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{c}_j \left(y_{j+1} - y_j\right).$$

Korollar 5.1 *Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer Treppenfunktion ist wohldefeiniert, d.h. von der genauen Wahl der zulässigen Trennung unabhängig.*

Bew: *Seien $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ und $\{y_0, \cdots, y_M\}$ zwei zul. Trennungen auf $[a, b]$ für f. Dann ist die Menge*

$$\{x_0, x_1 \cdots, x_n\} \cup \{y_0, \cdots, y_M\} =: \{z_0, \cdots z_L\}$$

wieder eine zulässige Trennung auf $[a, b]$ für f, die sowohl $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ als auch $\{y_0, \cdots, y_M\}$ verfeinert. Zweifache Anwendung vom Lemma oben ergibt die Aussage. $\square$

Eigenschaften des Elementarintegrals (I)

Satz 5.1 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $c \in]a, b[$. Dann sind $f : [a, c] \to R$ bzw. $f : [c, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bew: *Sei $\{x_i\}$ eine zul. Trennung auf $[a, b]$ für f, dann sind $\{y_j\} := (\{x_i\} \cap [a, c]) \cup \{c\}$ bzw. $\{z_k\} := (\{x_i\} \cap [c, b]) \cup \{c\}$ zul. Trennungen auf $[a, c]$ bzw. auf $[b, c]$ für f. Zudem ist $\{y_j\} \cup \{z_k\}$ eine Verfeinerung von $\{x_i\}$. Somit*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \sum_j c_j(y_{j+1} - y_j) + \sum_k c_k(z_{k+1} - y_k)$$

$$= \sum_i c_i(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

Definition 5.3 *Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ <u>definiert</u> man $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.*

Eigenschaften des Elementarintegrals (II)

Satz 5.2 *Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
1) ('Linearität' des Integrals:)
$\alpha f + \beta g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist wieder eine Treppenfunktion und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2) ('Monotonie' des Integrals:)
Falls $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) ('Beschränktheit' des Integrals:)
$|f|$ ist wieder eine Treppenfunktion und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Bew: *1) Sei* $\{x_i\}$ *eine zul. Trennung für* f *und* $\{y_j\}$ *eine zul. Trennung für* g*, dann ist* $\{z_k\} := \{x_i\} \cup \{y_j\}$ *eine zul. Trennung für* $\alpha f + \beta g$*, die* $\{x_i\}$ *und* $\{y_j\}$ *verfeinert.*
Ferner sei $f(t) = c_k$ *bzw.* $g(t) = \tilde{c}_k$ *für* $t \in]z_k, z_{k+1}[$*, dann ist*

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx &= \sum_k (\alpha c_k + \beta \tilde{c}_k)(z_{k+1} - z_k) \\ &= \alpha \sum_k c_k(z_{k+1} - z_k) + \beta \sum_k \tilde{c}_k(z_{k+1} - z_k) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

2) (Übung)
3) Sei $\{x_i\}$ *eine zul. Trennung für* f*, dann*

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_i c_i(x_{i+1} - x_i)\right| &\leq \sum_i |c_i|(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b |f(x)|dx \\ &\leq \max_i |c_i| \cdot \sum_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= (b-a)\max_i |c_i| \leq (b-a) \max_{x\in[a.b]} |f(x)|.\end{aligned}$$

□

Konvergenz vom Integral bei *sup*-Approximation

Korollar 5.2 *Für zwei Treppenfunktion $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Bew:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \quad \square$$

Korollar 5.3 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit*

$$|f(x) - t_k(x)| \leq \tfrac{1}{k} \quad \forall x \in [a, b].$$

Dann ist die Folge der Integrale $I_k := \int_a^b t_k(x)dx$ konvergent.

Bew:

$$\Big| \int_a^b t_k(x)dx - \int_a^b t_l(x)dx \Big| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |t_k(x) - t_l(x)|$$

$$\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |t_k(x) - f(x)| + |f(x) - t_l(x)| \leq (b-a)(\frac{1}{k} + \frac{1}{l})$$

Die Folge der Integrale ist somit eine Cauchy-Folge. □

5.2 Regelfunktionen

Approximation des Integrals durch Treppenfunktionen

Definition 5.4 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei (t_k) eine Folge von Treppenfunktionen wie in Korollar 5.3. Dann definiert*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{k\to\infty} \int_a^b t_k(x)dx.$$

das **Integral von f über $[a, b]$.**

Bemerkung $\int_a^b f(x)dx$ *hängt nicht von der genauen Wahl von $(t_k)_k$ ab.*

Bew: *Sei $\tilde{t}_k$ eine andere Folge von approx. Treppenfunktion, dann gilt*

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b t_k(x)dx - \int_a^b \tilde{t}_k(x)dx\Big| &\le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |t_k(x) - \tilde{t}_k(x)| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |t_k(x) - f(x)| + |f(x) - \tilde{t}_k(x)| \le (b-a)\frac{2}{k}.\end{aligned}$$

Somit $\lim_k \int_a^b \tilde{t}_k(x)dx = \lim_k \int_a^b t_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$ □

Regelfunktionen – Definition

Definition 5.5 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* **Regelfunktion**, *wenn zu $\epsilon > 0$ bel. eine Treppenfunktionen $t_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit*

$$|f(x) - t_\epsilon(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Bemerkung *Anschaulich: In einen bel. engen ϵ-Schlauch um den Graphen von f auf $[a, b]$ passt der Graph einer Treppenfunktion.*

Bsp. 5.1 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$ mit $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leq L$, dann ist f eine Regelfunktion.*

Bew: *(Fehlerschrankensatz $\Rightarrow$) $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \, \forall x, y \in [a, b]$.*

Zu $\epsilon > 0$ wähle $x_0 = a$, $x_1 = \frac{\epsilon}{L}$, $x_2 := x_1 + \frac{\epsilon}{L}$ ... und $t_\epsilon(x) := f(x_i)$, falls $x \in [x_i, x_{i+1}[$.

Dann gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$|f(x) - t_\epsilon(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leq L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \text{ für } x \in [x_i, x_{i+1}[. \quad \square$$

Charakterisierung von Regelfunktionen

Definition 5.6 *Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x \in [a,b[$ heißt $c \in \mathbb{R}$ der* **rechtsseitige Grenzwert $f(x_+)$ von $f \in x$** *falls*

$$c = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$$

für jede Folge (x_k) mit $x_k > x \,\forall k$ und $x_k \searrow x$.
Analog **linksseitiger Grenzwert $f(x_-)$ von f in in $x \in]a,b]$.**.

Bemerkung *Andere Schreibweisen $f(x_+) = \lim_{x\to x_+} f(x) = r\text{-}\lim_{x\to x} f(x)$.*

Satz 5.3 *$c = f(x_+)$ existiert genau dann, wenn*
$\forall \epsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : |c - f(y)| \le \epsilon \,\forall\, y \in]x, x+\delta]$. □

Satz 5.4 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x \in]a,b[$ genau dann wenn $f(x_-) = f(x) = f(x_+)$.* □

Satz 5.5 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion auf $[a,b]$ genau dann wenn $f(x_+)$ in allen Punkten $x \in [a,b[$ und $f(x_-)$ in allen Punkten $x \in]a,b]$ existieren.*

Beispiele

Bsp. 5.2 *Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

Bew: *Die Monotonie von f impliziert, dass $f(x_n)$ monoton beschränkt und somit konvergent ist für jede monotone konvergente Folge $x_n \nearrow x \in [a,b]$ bzw. $x_n \searrow x \in [a,b]$. Diese beiden Grenzwerte sind zudem unabhängig von der konkreten Wahl einer fallenden bzw. wachsenden Folge $x_n \to x$. Somit hat f überall auf $[a,b]$ rechts- und linksseitige Limiten.* $\square$

Bsp. 5.3 *Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) := 0$ und $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ für $x \in]0,1]$ hat keinen rechtss. Limes $f(0_+)$ in $x = 0$ und ist somit keine Regelfunktion.*

Bsp. 5.4 *Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 1$ falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hat in keinem $x \in [0,1]$ einseitige Limiten und ist somit auch keine Regelfunktion.*

Bemerkung *Ausblick: Das Integral für Funktionen wie f aus Bsp. 5.4 kann mithilfe des* Lebesgue'schen Integralbegriffs behandelt werden.

Beweis von Satz 5.5:

Bew: ("$\Rightarrow$":) *Treppenfunktionen haben rechts. und linkss. Grenzwerte.* $\surd$

- *Sei* (t_k) *eine Folge von Treppenfunktionen, so dass*
$$|f(x) - t_k(x)| \leq \tfrac{1}{k}\, \forall x \in [a, b].$$
- *Sei* $x_n \searrow x$, *dann*
$$|t_k(x_n) - t_l(x_n)| \leq |t_k(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - t_l(x_n)| \leq \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{l}$$

Übergang zur Grenze $n \to \infty$
$$|t_k(x_+) - t_l(x_+)| \leq \tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{l}$$
D.h. $t_k(x_+)$ *ist eine Cauchy-Folge. Sei* $c := \lim_k t_k(x_+)$.

Behauptung: $c = f(x_+)$,
denn zu $\epsilon > 0$

- *wähle* $k > \frac{3}{\epsilon}$ *so, dass ferner*
- $|c - t_k(x_+)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ *und*
- *wähle* N *so groß, dass* $|t_k(x_+) - t_k(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}\, \forall\, n \geq N$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |c - f(x_n)| &\leq |c - t_k(x_+)| + |t_k(x_+) - f(x_n)| \\
&\leq |c - t_k(x_+)| + |t_k(x_+) - t_k(x_n)| + |t_k(x_n) - f(x_n)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \forall\, n \geq N.
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis von Satz 5.5 (Forts)

Bew: ("$\Leftarrow$":) *Widerspruchsbeweis: Sei $\epsilon > 0$, so dass keine Treppenfunktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ ex. mit $|t(x) - f(x)| \leq \epsilon \, \forall x \in [a, b]$.*
$\Rightarrow$ Auf mind. einem der beiden Teilinervalle $[a, m]$ bzw. $[m, b]$ mit $m = \frac{a+b}{2}$ ex. keine ϵ-Approximation durch Treppenfunktionen.

$\rightsquigarrow$ Iteration des Arguments liefert eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so dass auf keinem dern $[a_n, b_n]$ eine ϵ-Appoximation von f durch Treppenfunktionen möglich ist.

Sei ξ der innere Punkt der Intervallschachtelung.

- *Es ex. ein $\delta_1 > 0$, so dass $|f(y) - f(\xi_+)| \leq \epsilon \forall y \in]\xi, \xi + \delta]$.*
- *Es ex. ein $\delta_2 > 0$, so dass $|f(y) - f(\xi_-)| \leq \epsilon \forall y \in [\xi - \delta_2, \xi[$.*
- *Wähle N hinreichend groß so, dass $[a_N, b_N] \subset [\xi - \delta_2, \xi + \delta_2]$.*

Definiere Treppenfunktion $t : [a_N, b_N] \to \mathbb{R}$ durch:
$t(x) := f(\xi_-)$, falls $x \in [a_N, \xi[$, $t(\xi) = f(\xi)$ und $t(x) = f(\xi_+)$, falls $x \in]\xi, \xi + \delta_1]$.

$$\Rightarrow |t(x) - f(x)| \leq \epsilon \, \forall x \in [a_N, b_N]$$

Widerspruch zur Konstruktion der Intervalle $[a_n, b_n]$. $\square$

Der 'Zoo' der Regelfunktionen

Korollar 5.4 *1) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion.*
2) Falls f stückweise stetig, d.h. es ex. $x_0 = a < x_1 \cdots < x_N = b$ und $f :]x_i, x_{i+1}[\to \mathbb{R}$ stetig mit rechtss. Grenzwerten in x_i bzw. linkss. Grenzwerten in x_{i+1} für alle i, so ist f Regelfunktion auf $[a, b]$.
3) Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $g \circ f$ wieder eine Regelfunktion.
4) Summe, Produkt und Quotienten* von Regelfunktionen sind Regelfunktionen.
5) Das Punktweise gebildete Maximum $h(x) := \max(f(x), g(x))$ bzw. Minimum $h(x) = \min(f(x), g(x))$ zweier Regelfunktonen f, g ist wieder eine Regelfunktion.

Bew: *Folgt unmittelbar aus Anwendung von Satz 5.5.* $\square$

Satz 5.6 *Falls $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$ mit $|h(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \, \forall x \in [a, b]$, so ist h wieder eine Regelfunktion.*

Bew: *(Übung).*

Eigenschaften des ('Regel'-)Integrals (I)

Satz 5.7 *Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:*
1) ('Linearität' des Integrals:)

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2) ('Monotonie' des Integrals:)
Falls $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) ('Beschränktheit' des Integrals:)
$|f|$ ist wieder eine Regelfunktion und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Bew: *Durch Grenzübergang ('$k \to \infty$') aus den entspr. Eigenschaften für Treppenfunktionen.* $\square$

Eigenschaften des ('Regel'-)Integrals (II)

Satz 5.8 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $c \in]a,b[$. Dann sind $f : [a,c] \to R$ bzw. $f : [c,b] \to \mathbb{R}$ wieder Regelfunktionen und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bew: *Durch Grenzübergang ('$k \to \infty$') aus der entspr. Eigenschaft für Treppenfunktionen.* $\square$

Satz 5.9 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = g(x)$in $[a,b]$ bis auf endlich viele Ausnahmepunkte x. Dann ist g auch Regelfunktion auf $[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Bew: *Folgt durch Zerlegung von $[a,b]$ in Teilintervalle, in denen $f = g$ und durch Anwenung von obigem Satz.* $\square$

Vorlesung Analysis I für Informatiker & Statistiker

Universität München, WS 11/12

Prof. Dr. Max v. Renesse
renesse@math.lmu.de

5.3 Der Hauptsatz der Differentialrechnung

Beschränktheit des Integrals, Version 2

Lemma 5.2 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, dann gilt* $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$ *und*

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x\in]a,b[} |f(x)|$$

Bew: *Zu $k \in \mathbb{N}$ sei t_k Treppenf. mit* $|t_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \forall x \in [a, b]$

- *Beschränktheit von f: Sei* $T := \sup_{x\in[a,b]} |t_1(x)|$,

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - t_1(x)| + |t_1(x)| \leq 1 + T \quad \forall x \in [a, b] \surd$$

- *Beschränktheit des Integrals:*

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)| dx &\leq \int_a^b |t_k(x)| dx + (b-a)\frac{1}{k} \\ &\leq (b-a) \sup_{x\in]a,b[} |t_k(x)| + (b-a)\frac{1}{k} \\ &\leq (b-a) \sup_{x\in]a,b[} |f(x)| + 2(b-a)\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Das ist richtig für alle $k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow$ Behautpung. □

Rechtsableitung der Integralfunktion

Lemma 5.3 *Es sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Regelfunktion und sei*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)ds$$

('Funktion der oberen Grenze'). Dann gilt für alle $x \in [a, b[$*:*

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x_+). \qquad (*)$$

Bemerkung *1) Bedeutung von* $(*)$*: Für jede Folge* (h_k) *mit* $h_k > 0$ *und* $h_k \to 0$ *gilt*

$$(F(x + h_k) - F(x))/h_k \to f(x_+).$$

2) $\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =: F'_+(x)$ **'Rechtsableitung' von F in** x.

3) Rechtsableitung der Integrals = Rechtslimes des Integranden

Beweis von Lemma 5.3

Bew: *Sei* $h_k \to 0+$ *und* $x \in [a, b[$. *Dann*

$$F(x+h_k) - F(x) = \int_a^{x+h_k} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds$$
$$= \int_x^{x+h_k} f(s)ds$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(x+h_k) - F(x)}{h_k} - f(x_+)\right| = \left|\frac{1}{h_k}\int_x^{x+h_k} f(s)ds - f(x_+)\right|$$
$$= \frac{1}{h_k}\left|\int_x^{x+h_k} (f(s) - f(x_+))\, ds\right|$$
$$\leq \sup_{s \in]x, x+h_k[} |f(s) - f(x_+)|$$

- *Zu* $\epsilon > 0$ *sei* $\delta > 0$, *so dass* $|f(x_+) - f(s)| \leq \epsilon \forall s \in]x, x+\delta]$.
- *Zu* $\delta > 0$ *sei* $N \in \mathbb{N}$, *so dass* $h_k < \delta \, \forall k \geq N$.

$$\Rightarrow \left|\frac{F(x+h_k) - f(x)}{h_k} - f(x_+)\right| \leq \epsilon \quad \forall\, k \geq N.$$

$\square$

Die Linksableitung der Integralfunktion

Lemma 5.4 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und sei*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)ds.$$

Dann gilt für alle $x \in [a,b[$:

$$\lim_{h \to 0-} \frac{F(x) - F(x+h)}{(-h)} = f(x_-). \qquad (*)$$

Bemerkung *1) Bedeutung von $(*)$: Für jede Folge (h_k) mit $h_k < 0$ und $h_k \to 0$ gilt*

$$(F(x+h_k) - F(x))/h_k \to f(x_-).$$

2) $\lim_{h \to 0-} \frac{F(x)-F(x+h)}{(-h)}$ **'Linksableitung' von F in** x.

3) Linksableitung der Integrals = Linkslimes des Integranden

Bew: *Analog zu Lem. 5.3, denn*

$$\frac{F(x)-F(x+h)}{(-h)} - f(x_-) = \frac{1}{(-h)} \int_{x+h}^x (f(s) - f(x_-))ds. \qquad \square$$

Bemerkung zur (einseitigen) Differenzierbarkeit

Lemma 5.5 *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x \in]a, b[$. $F'(x) = c$ ex. genau dann, wenn $F'_+(x)$ und $F'_-(x)$ existieren und $F'_+(x) = F'_-(x) = c$*

Bew: *'$\Rightarrow$' klar $\surd$*
'$\Leftarrow$': Sei (x_k) eine Folge mit $x_k \neq x$ und $x_k \to x$.
- *Seien (x_{n_k}) und (x_{m_k}) die Teilfolgen der Glieder von (x_k), die rechts bzw. links von x liegen.*
- *Dann ist $h_k := x_{m_k} - x \leq 0$ und $h_k \to 0-$, also*

$$\frac{F(x_{m_k}) - F(x)}{x_{m_k} - x} = \frac{F(x) - F(x + h_k)}{-h_k} \to F'_-(x) = c$$

- *Analog $\tilde{h}_k := x_{n_k} - x \geq 0$ und $\tilde{h}_k \to 0+$, also*

$$\frac{F(x_{n_k}) - F(x)}{x_{n_k} - x} = \frac{F(x + \tilde{h}_k) - F(x)}{\tilde{h}_k} \to F'_+(x) = c$$

Somit konvergiert die ganze Folge $(F(x_k) - F(x))/(x_k - x)$ gegen c, d.h. $F'(x) = c$. $\square$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Korollar 5.5 (Hauptsatz) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion auf $[a,b]$ und stetig in $x \in]a,b[$. Für $c \in [a,b]$ sei*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_c^x f(s)ds,$$

dann ist F differenzierbar in x mit $F'(x) = f(x)$.

Bemerkung *Erinnerung: $\int_c^x f(x)dx := -\int_x^c f(x)dx$ falls $x < c$.*

Bew:

- *(Fall $c = a$:) Stetigkeit von f in x*

$$\Rightarrow F'_+(x) = f(x_+) = f(x) = f(x_-) = F'_-(x).$$

Also ist F diff'bar in x mit $F'(x) = f(x)$.

- *(Fall $c \in [a,b]$:)*

$F(x) = \int_c^x f(s)ds = \int_a^x f(s)ds - \int_a^c f(s)ds \Rightarrow F'(x) = f(x).$ □

Bemerkung *F ist diff'bar in x genau dann, wenn $f(x_+) = f(x_-)$.*

Stammfunktionen

Definition 5.7 *Eine diff'bare Funktion $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ heißt* **Stammfunktion** *von $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Satz 5.10 *Zwei Stammfunktionen F und G für f auf $]a, b[$ unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.*

Bew: *Für $H(x) := F(x) - G(x)$ gilt $H'(x) = 0 \forall \, x \in]a, b[$. MWS der Differentialrechnung $\Rightarrow$ H ist konstant auf $[\alpha, \beta]$ für alle $a < \alpha < \beta < b \Rightarrow H$ ist konstant auf $]a, b[$, d.h. es ex. $K \in \mathbb{R}$ so dass $F(x) = G(x) + K \, \forall x \in]a, b[$.* $\square$

Satz 5.11 *Für $f : [a, b] \to R$ stetig und $c \in [a, b]$ ist $F(x) := \int_c^x f(s) ds$ die eind. Stammfunktion von f mit $\lim_{x \to c} F(x) = 0$.*

Bew:

- *(Hauptsatz) $\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion von f auf $]a, b[$.*
- $|F(x)| \leq \max_{[a,b]} |f(x)| \cdot |x - c| \to 0$ *falls $x \to c$.*
- *Für zwei solcher Stammf. F und $\tilde{F}$ gilt $F(x) = \tilde{F}(x) + K$.*

Wegen $0 = \lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} \tilde{F}(x) + K = K$ ist $K = 0$. $\square$

Bemerkung *Wegen $|F(x) - F(y)| \leq \max\limits_{[a,b]} |f| \cdot |x - y|$ ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*

5.4 Integrationsmethoden

Bestimmtes Integral und Stammfunktion

Satz 5.12 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von F, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung *Bezeichnung $\int_a^b f(x)dx$* **'bestimmtes Integral'**

Bew:
- *Die Funktion $G(x) := \int_a^x f(s)ds$ ist eine Stammunktion für f $\Rightarrow G(x) = F(x) - K$ mit einem gewissen $K \in \mathbb{R}$.*
- *Berechnung von K: $0 = G(a) = F(a) - K \Rightarrow K = F(a)$.*
- $\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b) - K = F(b) - F(a)$. $\square$

Bsp. 5.5 $\int_1^2 x^2 dx$
- *Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.*
- $\Rightarrow \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}7 = \frac{7}{3}$.

Bemerkung *Notation: Falls $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann ist $F\Big|_a^b := F(b) - F(a)$.*

Partielle Integration

Satz 5.13 *Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f bzw. g, dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = F \cdot G\Big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

Bew: *(Produktregel $\Rightarrow$) Für $h(x) := f(x)G(x) + F(x)g(x)$, ist $H(x) := F(x) \cdot G(x)$ eine Stammfunktion*

$\Rightarrow \int_a^b h(x) = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx = H\Big|_a^b.$ $\square$

Bsp. 5.6

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \cdot x\,dx &= \int_0^1 f(x)G(x)dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)g(x)dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx \\
&= (e^x \cdot x)\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 \\
&= (e - 0) - (e - 1) = 1
\end{aligned}$$

Partielle Integration – Weitere Beispiele

Bsp. 5.7

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x)dx &= \int_0 \pi \sin(x)\sin(x)dx \\
&= (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\cos(x)dx \\
&= (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int (1-\sin^2(x))dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)dx = (-\cos(x))\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 1dx = 0 + \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Partielle Integration – Weitere Beispiele

Bsp. 5.8
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\epsilon}\sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{1-\epsilon}\sqrt{1-x^2}\cdot 1\,dx\\ &= \sqrt{1-x^2}x\Big|_0^{1-\epsilon} + \int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-x^2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= -\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\arcsin(x)\Big|_0^{1-\epsilon}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Substitionsregel

Satz 5.14 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differerenzierbar mit $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$, dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)dy.$$

Bew: *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann ist $y \to F(\phi(y))$ eine Stammfunktion von $y \to f(\phi(y)) \cdot \phi'(y)$ und*
$\int_\alpha^\beta f(\phi(y))\phi'(y)\,dy = F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) = F(b) - F(a).$ $\square$

Bemerkung *Schreibweise, falls $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ umkehrbar*
$x = \phi(y) = x(y)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{y^{-1}(a)}^{y^{-1}(b)} f(x(y))\frac{dx}{dy}dy$$

Bsp. 5.9

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(y)}\cos(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\,dy = \frac{\pi}{4}$$

Substitionsregel – Weitere Beispiele

Bsp. 5.10

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx \overset{x:=\phi(y)=1-y}{=} \int_1^0 (1-y)^2\sqrt{y}\cdot(-1)\,dy$$
$$= \int_0^1 (1-y)^2\sqrt{y}\,dy$$
$$= \int_0^1 (\sqrt{y}-2y^{3/2}+y^{5/2})dy$$
$$= \frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}$$

Bsp. 5.11

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x^2)dx \overset{x:=\phi(y)=\sqrt{y}}{=} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{y}\sin(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi^2}{4}))$$

Stammfunktion via Integration

Bsp. 5.12 *Gesucht: Stammfunktion von* $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}
F(x) := \int_1^x \ln(s) ds &= \int_1^x 1 \cdot \ln(s)\, ds \\
&= s \ln(s)\Big|_{s=1}^{s=x} - \int_1^x s \frac{1}{s}\, ds \\
&= x \ln(x) - (x - 1) \\
&= x \ln x - x + 1
\end{aligned}$$

Definition 5.8 *Zu* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt die Menge aller Stammfunktionen*

$$\left\{ F :]a, b[\to \mathbb{R} \;\middle|\; F' = f \text{ auf }]a,b[\right\} = \int f(x) dx$$

das unbestimmte Integral von f. *Andere Schreibweise*

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

mit $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ *ist eine Stammfunktion von* f.

5.5 'Uneigentliche' Integrale

Regelfunktionen auf offenenen Intervallen

Definition 5.9 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls $f(x_+)$ & $f(x_-)$ ex. in jedem Punkt $x \in I$.*

Definition 5.10 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Folge von kompakten Intervallen $I_n := [a_n, b_n] \subset I$ heißt* **(kompakte) Ausschöpfung von** *I, falls $I_n \subset I_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{N}$ und $I = \bigcup_n I_n$.*

Definition 5.11 *Sei I ein offenes Intervalll und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann heißt f* **auf I (uneigentlich) integrierbar**, *falls für jede kompakte Ausschöpfung $I_n = [a_n, b_n]$ von I der limes*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx =: \int_I f(x)dx \in \mathbb{R}$$

unabhängig von der konkreten Wahl der Ausschöpfung existiert.

Beispiele – I beschränkt

Bsp. 5.13 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *ist int'bar auf* $]0,1[$ *mit* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}|_{a_n}^{b_n} = 2\sqrt{b}_n - 2\sqrt{a}_n \to 2 - 0 = 2.$ □

Bsp. 5.14 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *ist nicht integrierbar auf* $]0,1[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} \rightsquigarrow \frac{1}{0} - 1$ *konvergiert nicht.* □

Bsp. 5.15 $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}$ *ist nicht integrierbar auf* $]0,1[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow 1$, *dann*
$\int_{a_n}^{b_n} \sin(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} dx = \cos(\frac{1}{x})|_{a_n}^{b_n} = \cos(\frac{1}{b_n}) - \cos(\frac{1}{a_n}) \rightsquigarrow \sin(1) - \sin(\frac{1}{0})$
konvergiert nicht. □

Beispiele – I unbeschränkt

Bsp. 5.16 $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ *ist integrierbar auf* $]1,\infty[$ *mit* $\int_1^\infty f(x)dx = 1$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 1$ *und* $b_n \nearrow \infty$, *d.h. für alle* $K > 0$ *ex.* $N \in \mathbb{N}$, *s.d.* $b_n \geq K \, \forall n \geq N$. *Dann* $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} \to 1$. □

Bsp. 5.17 $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *ist nicht integrierbar auf* $]1,\infty[$.

Bew: *Sei* $a_n \searrow 0$ *und* $b_n \nearrow \infty$, *d.h. für alle* $K > 0$ *ex.* $N \in N$, *s.d.* $b_n \geq K \, \forall n \geq N$. *Dann* $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_{a_n}^{b_n} = \sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \rightsquigarrow \infty$ *konvergiert nicht.* □

Bsp. 5.18 $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$ *ist integrierbar auf* $[0,\infty[$ *mit* $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

Bew: *Sei* $a_n = 0$ *und* $b_n \nearrow \infty$, *dann* $\int_{a_n}^{b_n} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{a_n}^{b_n} = e^0 - e^{-b_n} \to 1 - 0 = 1$. □

Satz 5.15 *Falls $I =]a.b[$ beschränkt und $\sup_{x\in]a,b[} |f(x)| < \infty$ endlich, so ist f integrierbar auf $]a,b[$.*

Bew: • *Sei $C := \sup_{x\in]a,b[} |f(x)|$ und $a_n \to a$, $b_n \to b$. Sei $A_n := \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$, dann ist*

$$
\begin{aligned}
|A_n - A_m| &\le \int_{a_n}^{a_m} |f(x)|dx + \int_{b_n}^{b_m} |f(x)|dx \\
&\le C(|a_n - a_m| + |b_n - b_m|) \to 0
\end{aligned}
$$

(A_n) ist also Cauchy-Folge und hat einen Grenzwert A.

• *A ist unabhängig von der konkreten Wahl der Folgen (a_n) bzw. (b_n), denn mit $A'_n := \int_{a'_n}^{b'_n} f(x)dx$ für $a'_n \to a$ bzw. $b'_n \to b$ gilt*

$$
\begin{aligned}
|A_n - A'_n| &\le \int_{a_n}^{a'_n} |f(x)|dx + \int_{b_n}^{b'_n} |f(x)|dx \\
&\le C(|a_n - a'_n| + |b_n - b'_n|) \to 0
\end{aligned}
$$

□

Korollar 5.6 *Jede Regelfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $]a,b[$ integrierbar.* □

Absolute Integrierbarkeit

Definition 5.12 *Eine Regelfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heißt* **absolut integrierbar** *genau dann, wenn $|f|$ auf I integierbar ist.*

Satz 5.16 *$f : I \to \mathbb{R}$ auf I absolut integrierbar $\Rightarrow$ f auf I integrierbar.*

Bew: *Sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Ausschöpfung von I, dann gilt für $n \geq m$*

$$
\begin{aligned}
|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_{a_m}^{b_m} f(x)dx| &= |\int_{a_n}^{a_m} f(x)dx - \int_{b_m}^{b_n} f(x)dx| \\
&\leq \int_{a_n}^{a_m} |f(x)|dx + \int_{b_m}^{b_n} |f(x)|dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx - \int_{a_m}^{b_m} |f(x)|dx \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

falls $n, m \geq N$, da $A_n := \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx$ Cauchy-Folge.

- $\Rightarrow \tilde{A}_n := \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ *ist Cauchy-Folge.* $\surd$
- *Analog $\tilde{A} := \lim_n \tilde{A}_n$ hängt nicht von der Folge $([a_n, b_n])$ ab.* $\square$

Bemerkung *Umkehrung i.A. falsch, Bsp. $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{(-1)^n}{n}$, falls $x \in [n-1, n[$ $\rightsquigarrow$ alternierende harm. Reihe.*

Integrierbarkeitskriterien

Satz 5.17 (Maj.-Krit.) *Sei $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq g(x)$ und g auf I integierbar, so ist f auf I absolut integrierbar.*

Bew: *Für $n \geq m$*

$$\left|\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx - \int_{a_m}^{b_m} |f(x)|\,dx\right| = \int_{a_n}^{a_m} |f(x)|dx + \int_{b_m}^{b_n} |f(x)|dx|$$
$$\leq \int_{a_n}^{a_m} g(x)dx + \int_{b_m}^{b_n} g(y)dx$$
$$= \int_{a_n}^{b_n} g(x)dx - \int_{a_m}^{b_m} g(x)dx \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Bsp. 5.19 $f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$ *(Gauß'sche Glockenkurve)*
Aus $\frac{x^2}{2} \geq x - \frac{1}{2}$ *folgt* $e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}-|x|}$ *und somit*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 2 \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}-x} dx = 2\sqrt{e} \approx 3.297 < \infty.$$

Bemerkung $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \approx 2.506$ *(Analysis II).*

Integrierbarkeitskriterien (Forts.)

Satz 5.18 (Reihenkrit.) *Zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definierte $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x) := a_n \text{ für } x \in [n-1, n[$$

so ist f auf $[0,\infty[$ (absolut) integrierbar genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergiert.

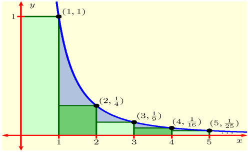
Bew: *$f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion und*

$$\int_0^N f(x)\,dx = \sum_{n=1}^N a_n \text{ bzw. } \int_0^N |f|(x)\,dx = \sum_{n=1}^N |a_n|. \qquad \square$$

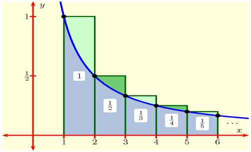
Lemma 5.6 *Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ monton fallend und $a_n := f(n)$, dann gilt*

$$\int_0^N f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^N a_n \geq \int_0^N f(x+1)\,dx.$$

Bew:



$\geq$



$\square$

Integralkriterium für Reihen – Beispiel

Satz 5.19 *Die Reihe* $\sum \frac{1}{n^s}$ *konvergiert genau dann, wenn* $s > 1$.

Bew: *Sei* $f(x) := \frac{1}{n^s}$ *für* $x \in [n-1, n[$

- *Fall* $s < 1$:
$\int_0^N f(x)dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^s} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} x^{1-s}\Big|_{x=0}^{x\to\infty} \rightsquigarrow \infty$.
- *Fall* $s = 1$:
$\int_0^N f(x)dx \geq \int_0^\infty \frac{1}{x+1} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_{x=1}^{x\to\infty} \rightsquigarrow \infty$.
- *Fall* $s > 1$:
$\int_0^N f(x)dx \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = 1 + \frac{1}{1-s} x^{1-s}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} = 1 + \frac{1}{s-1} < \infty$.

$\square$

1 Folgen von Funktionen

Wir betrachten Folgen von reell-wertigen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereicht $U \subset \mathbb{R}$ und interessieren uns für natürliche Konvergenzbegriffe. Genauer setzen wir uns mit folgenden Fragen auseinander:

1. (a) Wann wollen wir eine Folge (f_n) konvergent nennen?
   (b) Wann wollen wir zwei Funktionen f und g als "nahe" bezeichnen?
2. Wie sieht das Grenzobjekt einer konvergenten Folge (f_n) aus?

Bevor wir uns an einer Definition versuchen, überlegen wir uns welche Eigenschaften unser Konvergenzbegriff erfüllen soll. Da wir mit Folgen reeller Zahlen vertraut sind, und wir Zahlen als konstante Funktionen auffassen können, liegt es nahe eine Folge konstanter Funktionen konvergent zu nennen falls die Folge ihrer Funktionswerte konvergiert. Auf folgendes wollen wir bestehen:

(a) Eine Folge konstanter Funktionen (f_n) konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Funktionswerte konvergiert.

(b) Ist (f_n) eine konvergente Folge, so ist ihr Limes $\lim_{n\to\infty} f_n$ wieder eine Funktion mit gleichem Definitionsbereich.

Punkt (a) legt einen naiven Konvergenzbegriff nahe:

Definition 1 (Punktweise Konvergenz). *Eine Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion f genau dann, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in U$. Schreibweise: $f_n \overset{pw}{\to} f$. Genauer:*

$$f_n \overset{pw}{\to} f \Leftrightarrow \forall x \in U, \forall \epsilon > 0 \exists N = N(x,\epsilon) : \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Beispiele:

(i) Die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

(ii) Die Folge $f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{für } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ konvergiert punktweise gegen 0.

Punktweise Konvergenz behandelt also Folgen von Funktionen als Familien von reellen Zahlenfolgen. Dies hat den Nachteil, dass jegliche Struktur die einzelne Folgenglieder möglicherweise besitzen ignoriert wird. D.h. wir können nicht erwarten dass punktweise Konvergenz Eigenschaften wie Regularität, Limiten oder Integrierbarkeit erhält. In der Tat wird dies durch obige Beispiele belegt. Genauer zeigt Beispiel (a), dass der punktweise Limes stetiger Funktionen nicht mehr stetig zu sein braucht. Wir untersuchen die punktweise Konvergenz im Beispiel (a) genauer. Für $x < 1$ gilt $x^n \to 0$. D.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(x,\epsilon) : \forall n \geq N, x^n \leq \epsilon$. Das Problem hierbei ist, dass die Konvergenzrate vom Punkt x abhängt. Beispiele:

$$\begin{array}{lll} \epsilon = 0,1 & x = 0,2 & N(x,\epsilon) \geq 2 \\ & x = 0,9 & N(x,\epsilon) \geq 22 \\ & x = 0,99 & N(x,\epsilon) \geq 230 \end{array}.$$

f_n konvergiert nicht „gleichmäßig“. Dies motiviert die folgende Definition.

1.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 2 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** *Eine Folge* (f_n) *konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion* f *genau dann, wenn* $\sup_{x\in U}|f_n(x)-f(x)| \to 0$*. Schreibweise* $f_n \overset{\infty}{\to} f$*. Genauer:*

$$f_n \overset{\infty}{\to} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N, \sup_{x\in U}|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon.$$

Wir führen folgende Schreibweise ein.

Definition 3. *Für eine beschränkte Funktion* $f : U \to \mathbb{R}$ *setzten wir* $\|f\|_\infty := \sup_{x\in U}|f(x)|$.

Beispiel 1. *Die Folge* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{n}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* 0*.*

Proposition 1. $f_n \overset{\infty}{\to} f \Rightarrow f_n \overset{pw}{\to} f$*.*

Proof.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty .$$

□

Satz 1. *Sind alle Folgenglieder* f_n *stetig und gilt* $f_n \overset{\infty}{\to} f$*, so ist auch* f *stetig.*

Proof. Blatt 11, Aufgabe 2. □

Proposition 2. $f_n : [a,b) \to \mathbb{R}$*,* $f_n \overset{\infty}{\to} f$*, existiert für alle* n *der Limes* $\lim_{x\nearrow b} f_n(x) = y_n$*, so existiert auch* $\lim_{x\nearrow b} f(x)$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\nearrow b} f_n(x) = \lim_{x\nearrow b} f(x).$$

Proof. Übung □

Proposition 3. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $f_n \overset{\infty}{\to} f$*. Für eine konvergente Folge* (x_n) *in* $[a,b]$ *mit* $x_n \to x$ *gilt dann* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$*.*

Proof. Übung □

1.2 Reihen von Funktionen

Definition 4. *Seien* $f_n : U \to \mathbb{R}$ *und* $f : U \to \mathbb{R}$ *reell-wertige Funktionen. Wir setzen* $S_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x)$*. Dann gilt:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konvergiert punktweise gegen* f *genau dann, wenn* $S_N \overset{pw}{\to} f$*.*

(ii) $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konvergiert gleichmäßig gegen* f *genau dann, wenn* $S_N \overset{\infty}{\to} f$*.*

Satz 2 (Weierstraß-Kriterium)**.** *Seien* $f_n : U \to \mathbb{R}$ *beschränkte Funktionen, so dass die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty$ *(absolut) konvergiert. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *gleichmäßig.*

Proof. Wegen $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ impliziert das Majoranten-Kriterium , dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ für jedes $x \in U$ absolut konvergiert und es gilt $|\sum_{n=k}^\infty f_n(x)| \leq \sum_{n=k}^\infty \|f_n\|_\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ der punktweise gebildete Limes. Es gilt

$$\|S_N - f\|_\infty = \sup_{x \in U} |\sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^\infty \|f_n\|_\infty \to 0.$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ gleichmäßig gegen f. □

Bemerkung 1. *Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ folgt nicht die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty$. Ein Beispiel hierfür liefert die Taylorreihe der Funktion $\log(1+x)$. Es gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \text{ auf } [0,1].$$

Doch $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergiert. Die gleichmäßige Konvergenz erhalten wir jedoch aus dem Leibniz-Kriterium:

$$|\log(1+x) - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n| \leq \frac{1}{N+1} \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Beispiel 2 (Geometrische Reihe)**.** *Wir betrachten die Funktionen $f_n : [-r,r] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^n$ für festes $r \in]0,1[$. Dann gilt $\|f_n\|_\infty = r^n$ und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty r^n$ konvergiert absolut (Quotienten-Kriterium). Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f. Diese erhalten wir als punktweisen Limes $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \frac{x}{1-x}$.*

Satz 3. *Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $f_n \overset{\infty}{\to} f$. Dann ist auch f Regelfunktion und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Proof. Blatt 11, Aufgabe 3 und $|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$. □

Korollar 1. *Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen so dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert, dann ist auch ihr punktweiser Limes eine Regelfunktion und es gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=1}^\infty f_n.$$

Proof. $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$ ist Regelfunktion als gleichmäßiger Limes von Regelfunktionen. Wir erhalten

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n = \lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N = \int_a^b \sum_{n=1}^\infty f_n.$$

□

Beispiel 3. *(i) Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ auf $]-1,1[$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall. Wir addieren 1 zu beiden Seiten und erhalten $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ und die gleichmäßige Konvergenz bleibt erhalten. Für $r \in]0,1[$ können wir beide Seiten integrieren $\int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \int_0^r \frac{1}{1-x}$. Dies liefert:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} = -\log(1-r).$$

(ii) Es gilt $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $]-1,1[$. Wir integrieren die Gleichung und erhalten für $r \in]0,1[$:

$$\arctan(r) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{r^{2n+1}}{2n+1}.$$

1.3 Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass Stetigkeit, Limiten und Integrale unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleiben (vgl. Satz 1, Proposition 2, Satz 3). Nun wollen wir höhere Regularität behandeln. Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Falls f_n gleichmäßig gegen f konvergiert können wir fragen:

1. Ist f differenzierbar?
2. Gilt $f_n' \to f'$ gleichmäßig? (punktweise?)

Leider sind beide Antworten Nein.

Beispiel 4. *(i) Seien $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Betragsfunktion, denn $|x| \le f_n(x) \le |x| + \frac{1}{n}$.*

(ii) Seien $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n}$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$. Es gilt $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$. Also $|f_n'(0)| = n$ und damit konvergiert f_n' nicht punktweise.

Fordern wie jedoch die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen, erhalten wir:

Satz 4. *Es seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen so dass:*

1. Die Folge (f_n) konvergiert punktweise auf $[a,b]$.

2. Die Folge (f_n') konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.

Dann ist die Grenzfunktion f stetig differenzierbar auf $[a,b]$, und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Proof. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (f_n') liefert Satz 3:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt.$$

Wir erhalten

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt.$$

Da nach Satz 1 $\lim_{n\to\infty} f_n'$ stetig ist, folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Bemerkung 2. *Da der Definitionsbereich in obigem Satz beschränkt ist, erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz der Folge* (f_n)*:*

$$|f(x) - f_n(x)| = |\int_a^x f'(y)dy - \int_a^x f_n'(y)dy| \le (b-a) \|f' - f_n'\|_\infty .$$

Korollar 2. *Es seien* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbare Funktionen so dass:*

1. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *konvergiert punktweise auf* $[a,b]$.
2. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \|f_n'\|_\infty$ *konvergiert gleichmäßig auf* $[a,b]$.

Dann ist die Grenzfunktion $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *stetig differenzierbar auf* $[a,b]$*, und es gilt*

$$(\sum_{n=1}^\infty f_n(x))' = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x).$$

Proof. Das Kriterium von Weierstraß impliziert, dass $\sum_{n=1}^\infty f_n'$ absolut konvergiert. □

1.4 Potenzreihen

Definition 5. *Für eine Zahl* $a \in \mathbb{R}$ *und eine Folge reeller Zahlen* (c_n) *nennen wir den Ausdruck*

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n$$

eine formale Potenzreihe zentriert in a.

Wir nennen die Reihe formal, da wir noch keine Annahmen über eine mögliche Konvergenz der Reihe gemacht haben. Die Reihe konvergiert jedoch automatisch für $x = a$ und allgemein gilt, je näher x an a liegt desto besser sind die Konvergenzaussichten. Genauer:

Definition 6. *Für eine formale Potenzreihe* $\sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n$ *definieren wir den Konvergenzradius* R *durch:*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Hier folgen wir der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$ *und* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Satz 5. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine formale Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius.*

1. (a) *Ist $|x-a| > R$, so divergiert die Reihe bei x.*

   (b) *Ist $|x-a| < R$, so konvergiert die Reihe absolut bei x.*

2. *Ist $R > 0$, so erhalten wir also eine Grenzfunktion $f :]a-R, a+R[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.*

3. (c) *Für alle $0 < r < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ gleichmäßig gegen f auf dem kompakten Intervall $[a-r, a+r]$. Insbesondere ist f stetig auf $]a-R, a+R[$.*

   (c) *f ist differenzierbar auf $]a-R, a+R[$, und für alle $0 < r < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ gleichmäßig gegen f' auf dem kompakten Intervall $[a-r, a+r]$. Insbesondere ist f' stetig auf $]a-R, a+R[$.*

   (c) *Für jedes abgeschlossene Intervall $[y,z] \subset]a-R, a+R[$ gilt*

$$\int_y^z f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1} - (y-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Bemerkung 3. *Satz 5 macht keine Aussage für $x = a \pm R$.*

Satz 6 (Abel)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe zentriert in 0 mit Konvergenzradius $R = 1$. Konvergiert die Reihe im Punkt $x = 1$ also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, so gilt $\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.*

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1 (Partielle Summation)**.** *Seien (a_n) und (b_n) konvergente reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Angenommen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)b_n$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(b_{n+1} - b_n)$ und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)b_n = AB - a_0 b_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(b_{n+1} - b_n).$$

Proof. Übung □

Satz von Abel. Wir setzen $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und $S_N = (\sum_{n=0}^{N-1} c_n) - C$. Dann gilt $\lim_{N\to\infty} S_N = 0$, $S_0 = -C$ und $c_n = S_{n+1} - S_n$. Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C.$$

gilt. Dazu können wir uns auf den Bereich $x \in [0, 1[$ einschränken. Wir summieren partiell.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1} - S_n)x^n \\
&= \underbrace{(\lim_{n\to\infty} S_n)}_{=0} \underbrace{(\lim_{n\to\infty})x^n}_{=0} - S_0 x^0 - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^{n+1} - x^n) \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^n - x^{n+1})
\end{aligned}$$

Die Behauptung reduziert sich zu der Aussage

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^n - x^{n+1}) = 0.$$

Wegen

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^n - x^{n+1})\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1})$$

genügt es

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|\underbrace{(x^n - x^{n+1})}_{\ge 0} = 0$$

zu zeigen. Da hier alle Summanden nicht-negativ sind folgt die Behauptung aus

$$\limsup_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) = 0.$$

Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\epsilon)$ so dass $|S_n| \le \epsilon$ für alle $n \ge N$. Wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) \le \sum_{n=0}^{N} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \epsilon(x^n - x^{n+1}).$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist eine Teleskopreihe. Ihr Wert ist ϵx^{N+1}, denn

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=N+1}^{k}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{k\to\infty}(x^{N+1} - x^{k+1}) = x^{N+1}.$$

Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) \le \sum_{n=0}^{N} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) + \epsilon x^{N+1}.$$

Nun gilt für jedes $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$: $\lim_{x\nearrow 1}(x^n - x^{n+1}) = 0$. Da wir Limiten mit endlichen Summen vertauschen können, erhalten wir

$$\limsup_{x\nearrow 1}\sum_{n=0}^{\infty} |S_{n+1}|(x^n - x^{n+1}) \le \epsilon.$$

□

Korollar 3. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine in a zentrierte Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. Konvergiert die Potenzreihe in $a+R$, so ist f stetig in $a+R$, d.h.*

$$\lim_{x\nearrow a+R}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

Konvergiert die Potenzreihe in $a-R$, so ist f stetig in $a-R$, d.h.

$$\lim_{x\searrow a-R}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-R)^n.$$

Beispiel 5 (Vgl. Beispiel 3). *1. Der Satz von Abel ermöglicht es uns die Identität*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \text{ für } x \in]-1,1[$$

auf den Punkt $x = -1$ *auszudehnen, denn nach dem Leibniz-Kriterium ist* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ *konvergent. Wir erhalten:*

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

2. Genauso erhalten wir aus der Identität

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ für } x \in]-1,1[.$$

durch Fortsetzung auf $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3. Wir beginnen mit $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$*, für* $x \in \mathbb{R}$*. Integration liefert*

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Fehlerabschätzung aus dem Leibniz-Kriterium können wir nun den Wert des Integrals $\int_0^x e^{-t^2} dt$ *beliebig genau bestimmen.*