Skript

Finanzmathematik I

Max v. Renesse
Aufgezeichnet von Tobias Weihrauch

Wintersemester 2012/13
Universität Leipzig

Version vom 4. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Dies ist das Skript zur Vorlesung “Finanzmathematik I”, gehalten im Wintersemester 2012/2013 an der Universität Leipzig für Studierdende der (Wirtschafts-)Mathematik ab dem fünften Semester. Es handelt sich dabei um ein Exzerpt der Kapitel 1, 5 und 6 des unübertroffenen Lehrbuches *“Stochastic Finanance in Discrete Time”* von Hans Föllmer und Alexander Schied (de Gruyter Verlag).

Es wird dabei die Theorie von *Arbitragepreisen* für Wertpapiere behandelt. Ein Arbitragepreis ist dadurch gekennzeichnet, dass er weder für den Käufer noch für die Verkäufer einen risikolosen Gewinn zulässt. Bei der konkreten Preisfindung kommt es darauf an, welche anderen Wertpapiere zum Vergleich bereits auf dem Finanzmarktmodell vorhandenen sind. Ist die Menge der Vergleichspapiere ausreichend groß für eine eindeutige Preisfindung, spricht man von einem *vollständigen Markt*, andernfalls heißt der Markt *unvollständig*.

Entsprechend deren praktischer Relevanz behandeln Föllmer/Schied unvollständige Märkte eher als Regelfall denn als Ausnahme. Insbesondere wird der allgemeinsten Variante des Bewertungsproblems von amerikanischen Optionen in unvollständigen Märkten mehr Raum gegeben als andernorts üblich.

Der Arbitrage-Ansatz erlaubt in einem unvollständigen Markt keine weitere Differenzierung zwischen den zulässigen Preisen eines Wertpapiers. Stattdessen kann man hilfsweise zusätzliche Optimierungsprobleme betrachten, die dann zu einer eindeutigen Preisauswahl führen. Aus Zeitgründen konnten diese weitergehenden Fragen nicht besprochen werden (Kapitel 8–10 in Föllmer/Schied), was wenigstens im Fall des Superhedgings eine grobe Unterlassung darstellt. Der Vollständigkeit halber ist es daher als Schlusskapitel angefügt.

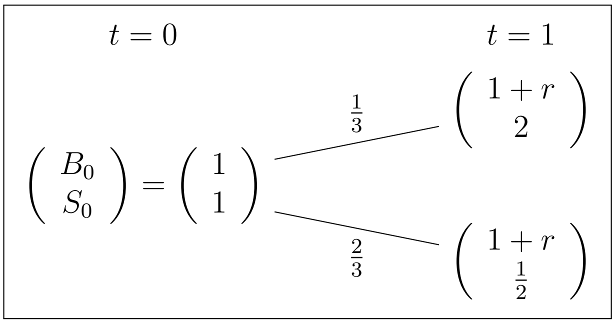
Die von Föllmer/Schied eingehend behandelten Risikomaße wurden nicht diskutiert, ebenso wenig wie der gesamte Bereich Kreditrisiko, der häufig auch als gesonderte Vorlesung für die Ausbildung in Finanzmathematik angeboten wird[1].

Vorausgesetzt wurden in diesem Kurs ein Grundwissen in Maßtheorie sowie der Trennungssatz für konvexe Mengen in $\mathbb{R}^d$ (bzw. in einem Banachraum als Verallgemeinerung). Die notwendigen Kenntnisse über Martingale werden begleitend im Text entwickelt.

[1] Als weitere Ergänzungslektüre für hier nicht behandelte Themen empfehlen sich die Skripten *“Stochastische Finanzmathematik”* von Chr. Kühn (Univ. Frankfurt), das sich in Teilen ebenfalls auf Föllmer/Schied stützt, jedoch mit einer anderen Schwerpunktsetzung und *Finanzmathematik I* von R. Frey und T. Schmidt (WWU Wien und Univ. Cottbus) für eine erste Einführung in Kreditrisiko.

1 Einführung – Der Arbitrage-Ansatz im Beispiel

Wir betrachten einen einfachen Finanzmarkt mit zwei Wertpapieren. Eines ist eine festverzinsliche Anlage B (für engl. 'Bond'), mit Wert $B_0 = 1$ in $t = 0$ und Wert $B = 1+r$ in $t = 1$, wobei $r > -1$ den Zinssatz bezeichnet. Der Wert des zweiten Wertpapiers S (für engl. 'Stock') $S_0 = 1$ in $t = 0$ kann sich beim Übergang nach $t = 1$ verdoppeln oder halbieren kann, je nachdem welches Marktszenario ω_1 oder ω_2 eintrifft. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Szenario ω_1 sei $\frac{1}{3}$, und die für das Eintreten von Szenario ω_2 sei $\frac{2}{3}$.



Jemand bietet uns nun eine Wette wie folgt an: "Ich zahle dir in $t = 1$ den Betrag $\max(S - 1, 0)$ aus." Bezeichnen wir die daraus resultierende Auszahlung in $t = 1$ mit C (für englisch 'Claim'), so ergibt sich

$$C = \max(S - 1, 0).$$

In Szenario ω_1 liefert diese Wette 1 Euro, in Szenario ω_2 gibt es 0 Euro.

Es stellt sich nun die Frage, was ein vernünftiger Wetteinsatz bzw. Preis für diese Wette C ist, wenn Sie in $t = 0$ abgeschlossen wird.

Antwort 1 verwendet die mittlere Auszahlung der Wette bei wiederholtem Spiel, d.h. den Erwartungswert $\pi_0 = \mathbb{E}(C) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$ als Preisvorschlag.

Antwort 2 beruht auf dem Vergleich mit den durch B und S bereits verfügbaren Wetten. Hierzu werden Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass in $t = 1$

$$C(\omega) = \alpha \cdot B(\omega) + \beta \cdot S(\omega) \text{ für } \omega = \omega_1, \omega_2.$$

Folglich suchen wir eine Lösung zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \cdot (1+r) + \beta \cdot 2 \\ 0 &= \alpha \cdot (1+r) + \beta \cdot \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

und finden falls z.B. $r = 1$

$$(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}).$$

Somit gilt für sämtliche Szenarien in $t = 1$

$$C = -\frac{1}{6}B + \frac{2}{3}S,$$

so dass wir den als Preis für C den Wert

$$\widetilde{\pi}_0 = -\frac{1}{6}B_0 + \frac{2}{3}S_0 = \frac{1}{2},$$

vorschlagen, was den Kosten in $t = 0$ einer Kombination der Wertpapiere S und B entspricht, die in $t = 1$ dieselbe Auszahlung bewirkt wie der angebotene Vertrag C.

Die folgende Überlegung zeigt nun, dass der Preis $\widetilde{\pi}$ ist der richtige ist, denn falls jemand die Wette zum Preis $\pi_0 < \widetilde{\pi}_0$ anbietet ergibt sich die Möglichkeit, durch eine geeignete Anlagestrategie, einen risikolosen Gewinn zu erzielen:

In t_0	**In** t_1
1. Kaufe C zum Preis von π_0.	1. Einnahmen aus $C = -\frac{1}{6}B + \frac{2}{3}S$
2. Verkaufe $\frac{2}{3}$ von S.	2. Kaufe $\frac{2}{3}$ von S zurück.
3. Kaufe $\frac{1}{6}$ von B.	3. Verkaufe $\frac{1}{6}$ von B
Nettoertrag: $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	Nettoertrag: 0

Das heißt, nach Abschluss der Transaktionen in $t = 1$ besitzt der Käufer von C genausoviel S- und B-Papiere wie vor Beginn der Transaktion in $t = 0$. Erhalten bleibt nach Ende von $t = 1$ aber der verzinste Nettoertrag der Transaktionen bei $t = 0$, d.h. ein Reingewinn von

$$(1 + r)(\widetilde{\pi}_0 - \pi)$$

Das Risiko, die Transaktionen in $t = 1$ mit Kostendeckung durchführen zu können, ist gleich Null. Die gesamte Transaktion bringt einen Gewinn bei Null Risko. Das nennt man eine Arbitrage oder auch *Free Lunch (at no risk).*

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von ω_1 bzw. ω_2 für den Wert des fairen Preises $\widetilde{\pi}_0$ nur insofern eine Rolle spielen, als dass beide Szenarien mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten.

Das Grundprinzip der Arbitrage-Bewertung

Das obige Beispiel illustriert das Grundprinzip der Arbitrage-Ansatzes zur Bewertung von Wertpapieren mit zufälliger Ausschüttung. Der Preis für ein neu angebotenes Wertpapier mit zufälliger Auszahlung entspricht dem Preis eines Portfolios aus bereits verfügbaren Papieren, sofern es das Auszahlungsprofil des neuen Papieres vollständig reproduziert. Man spricht von einem *Hedge-Portfolio* zur vollständigen Absicherung des Anspruchs bzw. der Auszahlung C.

Bemerkung. Sogenannte 'unvollständige' Märkten sind durch die Existenz von Optionen C gekennzeichnet, die nicht vollständig gehedged werden können. (Solches ist in der Praxis eher der Regel- als der Ausnahmefall). Hier wird die Theorie dann umfangreicher.

2 Das Einperiodenmodell

Der einfachste Fall eines Finanzmarktmodelles ist ein Einperiodenmodell. Es gibt darin $d + 1$ verschiedene Wertpapiere, deren Preise in $t = 0$ bekannt sind, mit zufälligen

Werten in $t = 1$. Die mathematische Modellierung des Zufalls erfolgt über einen geeignet gewählten Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine vektorwertige Zufallsvariable $\overline{S}$ für die ungewissen Kursstände der Basispapiere zum Zeitpunkt $t = 1$ definiert ist. Meistens ist dabei die erste Komponente $\overline{S}$ deterministisch und modelliert die Entwicklung einer festverzinslichen (Bargeld-)Anlage.

Definition 2.1. Ein Tripel $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ mit

- $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - Wahrscheinlichkeitsraum
- $\overline{\Pi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ - 'Preisvektor' (in $t = 0$)
- $\overline{S} : \Omega \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^{d+1}$ - Zufallsvariable als 'Marktpreisvektor' zum Zeitpunkt $t = 1$

heißt ein *d-dimensionales 1-perioden Finanzmarktmodell.*

Bemerkung. Der Wahrscheinlichkeiteraum Ω steht für die Menge der möglichen Marktszenarien zum Zeitpunkt $t = 1$ und die Sigma-Algebra $\mathfrak{F}$ für die Menge der im Modell sinnvoll beschreibbaren Ereignisse. Eine Menge $A \in \mathfrak{F}$ mit $P(A) = 0$ nennen wir *vernachlässigbar.* Die Komponenten des Vektor $\overline{\Pi}$ beschreiben die Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ von $d + 1$ Wertpapieren, deren Kursstände zum Zeipunkt $t = 1$ als Zufallsvariablen $S^i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 0, \cdots, d$, modelliert sind.

Vereinbarung 2.2. Im Folgenden nehmen wir stets (falls nicht anders bezeichnet) an, dass

$$\overline{\Pi} = (\Pi^0, \Pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ , \ \Pi^0 = 1$$
$$\overline{S} = (S^0, S) \in R^{1+d} \ , \ S^0 = 1 + r \ P\text{-fast sicher}$$

wobei der Parmeter $r > -1$ als die Verzinsung der sicheren Bargeldanlage S^0 beim Übrgang von $t = 0$ nach $t = 1$ interpretiert wird. Statt S^0 schreiben wir gelegentlich auch B (für englisch “Bond” = Anleihe).

Beispiel. Das einführende Beispiel korrespondiert zum Einperiodenmodell
$(\Omega, \mathfrak{F}, P) = (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}), P(0) = \frac{1}{3}, P(1) = \frac{2}{3})$ mit

$$\overline{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \overline{S} = \begin{pmatrix} B \\ S \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^{1+1}$$

mit

$$\overline{S}(\omega = 0) = \begin{pmatrix} 1 + r \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overline{S}(\omega = 1) = \begin{pmatrix} 1 + r \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Definition 2.3.

- Ein Vektor $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt *Portfolio.*
- $\langle \overline{\xi}, \overline{\Pi} \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}$ heißt *Preis des Portfolios in $t = 0$.*
- $\langle \overline{\xi}, \overline{S} \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ heißt *Wert oder Portfolios in $t = 1$.*

Beispiel (Fortsetzung)**.** Das Angebot, die Wette zum C Preis π_0 zu erwerben, führt zu einer Erweiterung des alten Finanzmarktmodelles auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ wie zuvor und

$$\widetilde{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pi_0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{S} = \begin{pmatrix} B \\ S \\ C \end{pmatrix}$$

wobei

$$\widetilde{S}(\omega = 0) = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{S}(\omega = 1) = \begin{pmatrix} 1+r \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir nun das (Gewinn-) Portfolio

$$\widetilde{\xi} := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \widetilde{\pi}_0 - \pi_0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

so hat es in $t = 0$ den Preis

$$\widetilde{\Pi} \cdot \widetilde{\xi} = \frac{1}{6} + \widetilde{\pi}_0 - \pi_0 - \frac{2}{3} \cdot S + \pi_0 = 0.$$

In $t = 1$ ist sein Wert

$$\widetilde{S} \cdot \widetilde{\xi} = (1+r)(\widetilde{\pi}_0 - \pi_0) + (1+r)\frac{1}{6} - \frac{2}{3}S + C = (1+r)(\widetilde{\pi}_0 - \pi_0) > 0$$

für jedes der beiden Szenarien $\omega = 0$ und $\omega = 1$. $\widetilde{\xi}$ kostet (in $t = 0$) nichts und bringt (in $t = 1$) positiven Ertrag.

2.1 Arbitrage im Einperiodenmodell

Definition 2.4. In einem 1-perioden Modell (der Dimension d) heißt $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ eine *Arbitrage-Möglichkeit (AM)*, falls

$$\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0$$

und

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} \geq 0 \ P\text{-fast sicher}$$

sowie

$$P(\overline{S} \cdot \overline{\xi} > 0) > 0$$

gilt.

Vereinbarung 2.5. Für eine reellwertige auf $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definierte Zufallsvariable X schreiben wir $X \geq_P^* 0$ bzw. einfach kurz $X \geq^* 0$ falls $X \geq 0$ P-fast sicher. Wir schreiben $X >^* 0$, falls zudem $P(X > 0) > 0$. Im ersten Fall sagen wir X sei *wesentlich nichtnegativ*, im zweiten Fall sprechen wir von einer *wesentlich positiven* Zufallsvariable. Entsprechend schreiben wir $X \geq^* Y$ und $X >^* Y$ falls $X - Y \geq^* 0$ bzw. $X - Y >^* 0$.

Somit schreibt sich die Arbitragebedingung an $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ im Modell $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ kurz als

$$\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0 \text{ und } \overline{\xi} \cdot \overline{S} >^* 0.$$

Lemma 2.6. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *hat eine Arbitrage-Möglichekeit*

2. $\exists\, \xi \in \mathbb{R}^d$ *mit* $\xi \cdot S >^* (1+r)\xi \cdot \Pi$

Bemerkung. Die Aussage 2 bescheibt ein Portfolio ξ als Linearkombination von zufälligen Wertpapieren, dessen Verzinsung niemals schlechter als die des Festgeldkontos B ist und in einer nicht-verschwindenen (im Sinne der P-Wahrscheinlichkeit) Menge von Marktsznarien die sichere Verzinsung sogar echt übertrifft.

Beweis von Lemma 2.6. $1 \Rightarrow 2$: Sei $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ eine Arbitragemöglichkeit. Dann gilt

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \xi_0 + \xi \cdot \Pi \leq 0,$$

folglich gilt wegen $r > -1$ auch

$$\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \Pi \geq \xi \cdot S + (1+r)\xi_0 = \overline{\xi} \cdot \overline{S}.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite $\overline{\xi} \cdot \overline{S}$ aber wesentlich positiv, somit auch die linke Seite.

$2 \Rightarrow 1$: Falls $\xi \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor wie in Aussage 2 ist, setzen wir $\xi_0 = -\xi \cdot \Pi$ und erhalten mit

$$\overline{\xi} = (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}$$
$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = 0$$

sowie

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = -(1+r)\xi \cdot \Pi + \xi \cdot S$$

Nach Voraussetzung ist

$$\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \Pi >^* 0,$$

also auch $\overline{\xi} \cdot \overline{S}$ und damit $\overline{\xi}$ eine Arbitragemöglichkeit. □

Definition 2.7. Ein Finanzmarktmodell heißt Arbitrage-frei, falls es keine Arbitragemöglichkeiten zulässt.

Bemerkung 2.8. Führen wir den neuen Zufallsvektor der diskontierten Zuwächse ein $Y = \frac{S}{1+r} - \Pi$, so ist die Arbitrage-Freiheit des Modells $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ gemäß Lemma 2.6 gerade, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\xi \cdot Y \not>^* 0.$$

2.1.1 Äquivalente Maße und Modelle

Definition 2.9. Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ heißen äquivalent, falls sie dieselben Nullmengen haben, d.h. falls für alle $A \in \mathfrak{F}$ gilt

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0.$$

Wir verwenden hierfür die Schreibweise $P \sim Q$.

Die Maße P und Q sind also genau dann äquivalent, wenn sie wechselweise absolut stetig zueinander sind, d.h.

$$Q \ll P \text{ und } P \ll Q.$$

Insbesondere existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym eine nichtnegative *Dichtefunktion* $Z \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, vermöge welcher sich das Maß Q darstellen lässt als

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) P(d\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

Offensichtlich gilt für zwei äquivalente Maße $P \sim Q$ auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, dass

$$X >_P^* 0 \Leftrightarrow X >_Q^* 0.$$

Definition 2.10. Zwei Einperiodenmodelle $M_1 = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ und $M_2 = ((\Omega, \mathfrak{F}, Q), \overline{\Pi}, \overline{S})$ heißen äquivalent, falls $P \sim Q$.

Insbesondere stimmen die Mengen der Arbitragemöglichkeiten in äquivalenten Modellen überein. – In der Tat sind auch sämtliche weitere Aussagen, die wir im folgenden über ein Finanzmarktmodell treffen, von der genauen Wahl des Maßes P in seiner Klasse von äquivalenten Maßen unabhängig. Das Maß P hat somit die allein die Funktion, die irrelevanten Marktszenarien (im Sinne von P-Nullmengen) von den relevanten zu unterscheiden.

2.2 Der erste Fundamentalsatz der Optionspreistheorie

Definition 2.11. Gegeben sei ein Finanzmarktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ heißt *risiko-neutral*, falls

$$\Pi^i = \mathbb{E}^* \left(\frac{S^i}{1+r} \right) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(S^i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, d.n$$

Die Menge $\mathfrak{P} := \{P^* \mid P^* \text{ ist ein risiko-neutrales, } P^* \sim P(\Omega, \mathfrak{F})\}$ heißt die Menge der (äquivalenten) risikoneutralen Maße des Modells $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$.

Satz 2.12 (Fundamentalsatz der Optionspreistheorie (FTAP))**.** *Das d-dimensionale Marktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ist genau dann arbitragefrei, falls die Menge $\mathfrak{P}$ nicht leer ist. In diesem Fall existiert sogar ein $P^* \in \mathfrak{P}$ mit beschränkter Dichte $Z = \frac{dP^*}{dP}$.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei $P^* \in \mathfrak{P}$. Sei $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} >^*_P 0,$$

dann gilt wegen $P \sim P^*$ auch

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} >^*_{P^*} 0.$$

Ferner ist

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \sum_{i=0}^{d} \xi^i \cdot \Pi^i = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(S^i) \cdot \xi^i = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(\overline{\xi} \cdot \overline{S}) > 0,$$

d.h. $\overline{\xi}$ kann keine Arbitragemöglichkeit sein.

"$\Rightarrow$": Sei $Y^i = \frac{S^i}{1+r} - \Pi^i$. Nach Lemma 2.6 ist die Arbitragefreiheit äquivalent dazu, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$Y \cdot \xi \not>^* 0,$$

d.h. entweder ist

$$Y \cdot \xi < 0 \text{ mit positiver } P\text{-Wahrscheinlichkeit}$$

oder

$$P(Y \cdot \xi > 0) = 0$$

Ferner ist ein Maß P^* ist genau dann risiko-neutral, wenn

$$\mathbb{E}^*(Y^i) = 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, d$$

Zum Nachweis der Existenz eines risikoneutralen äquivalenten Maßes gehen gehen wir in zwei Schritten vor.

Im ersten Schritt wollen wir zunächst annehmen, dass für alle $i = 1, \ldots, d$ gilt $E(|Y^i|) < \infty \ \forall\ i$. Seien

$$\mathfrak{Q} = \left\{ Q \mid Q \text{ äquivalent zu } P \text{ mit } \frac{dQ}{dP} \text{ beschränkt} \right\}$$

$$\mathfrak{C} = \{\mathbb{E}_Q(Y) \mid Q \in \mathfrak{Q}\} \subset \mathbb{R}^d$$

Dann ist $\mathfrak{C}$ konvex, denn für $y_1 = \mathbb{E}_{Q_1}(Y)$, $y_2 = \mathbb{E}_{Q_2}(Y) \in \mathfrak{C}$ und $\lambda \in [0,1]$ ist $Q_3 := (1-\lambda)Q_1 + \lambda Q_2$ wieder ein W-Maß in $\mathfrak{C}$ und es gilt

$$y_3 = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = (1-\lambda)\mathbb{E}_{Q_1}(Y) + \lambda \mathbb{E}_{Q_2}(Y) = \mathbb{E}_{Q_3}(Y) \in \mathfrak{C}$$

Angenommen es existiert kein risiko-neutrales $P^* \in \mathfrak{Q}$, dann liegt also der Nullvektor $\overrightarrow{0}$ nicht in $\mathfrak{C}$ und nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen im $\mathbb{R}^d$ finden wir ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ so dass $\xi \cdot y \geq 0 \ \forall\ y \in \mathfrak{C}$ sowie ein $y_0 \in \mathfrak{C}$ so dass $\xi \cdot y_0 > 0$. Gemäß Definition der Menge $\mathfrak{C}$ heißt das, dass $\mathbb{E}_Q(\xi \cdot Y) \geq 0 \ \forall\ Q \in \mathfrak{Q}$ und dass ein $Q_0 \in \mathfrak{Q}$ existiert mit $\mathbb{E}_{Q_0}(\xi \cdot Y) > 0$.

Aus letzterem folgt schon einmal, dass $Q_0(\xi \cdot Y) > 0$, also auch $P(\xi \cdot Y) > 0$. Wir behaupten sogar, dass $\xi \cdot Y \geq 0$ P-fast sicher. Sei zum Beweis dieser Behauptung

$$A := \{\omega \in \Omega \mid \xi \cdot Y(\omega) < 0\} \in \mathfrak{F}$$

Weiter seien

$$\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\varphi_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{1}_A + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{A^C}$$

Dann gehören die Maße

$$Q_n(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{E}(\varphi_n)}\varphi_n(\omega)P(d\omega)$$

ebenfalls zur Menge $\mathfrak{Q}$ und es folgt

$$0 \leq \mathbb{E}_{Q_n}(\xi \cdot Y) = \frac{1}{\mathbb{E}(\varphi_n)}\mathbb{E}_P(\varphi_n(\omega)\xi \cdot Y).$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}_P(\varphi_n(\omega)\xi \cdot Y) \geq 0$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (mit $n \to \infty$) gilt mithin

$$0 \leq \mathbb{E}_P(\underbrace{\mathbb{1}_A \cdot \xi \cdot Y}_{<0})$$

Da $\xi \cdot Y < 0$ auf A muss A also eine P-Nullmenge sein, d.h. in der Tat gilt $\xi \cdot Y \geq 0$ P-fast sicher.

Insgesamt folgt, dass ξ eine Arbitragemöglichkeit ist. Das ist ein *Widerspruch*! Es muss also ein risiko-neutrales $P^* \in \mathfrak{Q}$ existieren. Nach Definition der Menge $\mathfrak{Q}$ hat P^* zudem eine beschränkte Dichte $Z = dP^*/dP$.

Im zweiten Schritt kümmern wir uns um den Fall, dass $\mathbb{E}(|Y|) = \infty$. Hierzu betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\widetilde{P}(\omega) = \frac{c}{1 + |Y(\omega)|}P(d\omega)$$

mit

$$c := \frac{1}{\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+|Y|}\right)},$$

dass wegen $Y(\omega) < \infty$, also $\frac{d\widetilde{P}}{dP}(\omega) > 0$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ äquivalent zu P ist. Damit ist $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ Arbitrage-frei, wenn $((\Omega, \mathfrak{F}, \widetilde{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ Arbitrage-frei ist. Unter dem neuen Maß $\widetilde{P}$ gilt zudem

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}}(|Y|) = \mathbb{E}_P\left(\frac{c}{1 + |Y|} \cdot |Y|\right) \leq c < \infty$$

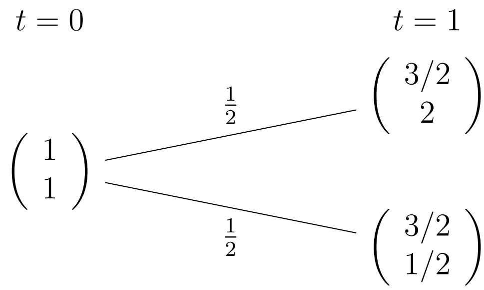
Somit existiert gemäßSchritt 1 ein risiko-neutrales und zu $\widetilde{P}$ und damit auch zu P äquivalentes risikoneutrales Maß P^*, sodass $\frac{dP^*}{d\widetilde{P}}$ beschränkt ist. Dann ist auch

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{dP^*}{d\widetilde{P}} \cdot \frac{d\widetilde{P}}{dP}$$

beschränkt. □

Bemerkung. Man beachte, dass Y bzw. S unter jedem risikoneutralen Maß integrierbar sind, obwohl das für das initiale Maß P nicht vorausgesetzt ist.

Beispiel 2.13. Ein einfaches Finanzmarktmodell sei schematisch wie folgt spezifiziert



($d = 1$, $r = \frac{1}{2}$ und $\Omega = \{0, 1\}$ und $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ und $\overline{\Pi} = (1, 1)$, $S(0) = 2$ und $S(1) = \frac{1}{2}$.) Wir behaupten, dass dieser Markt Arbitrage-frei ist. Wir suchen hierzu die Menge $P^* \mathrel{\widehat{=}} \{p^*, q^*\}$ mit

$$
\begin{aligned}
1 &= p^* \cdot \frac{3/2}{1+r} + q^* \cdot \frac{3/2}{1+r} = p^* + q^* \\
1 &= p^* \cdot \frac{2}{1+r} + q^* \cdot \frac{1/2}{1+r} = p^* \frac{4}{3} + q^* \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $p^* = \frac{2}{3}$ und $q^* = \frac{1}{3}$, d.h. $P^* \in \mathfrak{P}$ existiert und damit ist das Modell Arbitrage-frei.

2.3 Replizierbare Ansprüche und Vollständigkeit von Märkten

In Fortführung des vorigen Beispiels 2.13 betrachten wir jetzt den vom Zufall abhängigen Anspruch auf Zahlung in $t = 1$ der Höhe $C = \max(S - 1, 0)$, d.h. $C(\omega = 0) = 1$ und $C(\omega = 1) = 0$. Zur Ermittlung eines Preises dieses Anspruchs in $t = 0$ suchen wir nun Koeffizienten α, β einer Linearkombination, sodass

$$
\begin{aligned}
1 &= \alpha \cdot \frac{3}{2} + \beta \cdot 2 \\
0 &= \alpha \cdot \frac{3}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich $\alpha = -\frac{2}{9}$, $\beta = \frac{2}{3}$. Der Preis von C in $t = 0$ sollte somit

$$
\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = -\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9}
$$

sein. Zum Vergleich berechnen wir

$$
\mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{9}
$$

Der Preis in $t = 0$ des Anspruchs C auf Zahlungen in t=1 entspräche also dem Mittelwert der Auszahlungen gebildet unter dem risikoneutralen Maß P^*.

Definition 2.14 (Wette/Anspruch/Option und Derivat)**.** Sei $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ein 1-perioden Finanzmarktmodell. Dann heißt eine Zufallsvariable

$$C : \Omega \to \mathbb{R}$$

eine *Wette*, *Anspruch* oder auch *Option* (engl. *contingent claim*). Falls es eine Funktion $F : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ gibt mit $C(\omega) = F(\overline{S}(\omega))$ P-fast sicher, nennt man C ein *Derivat von S.*

Vereinbarung 2.15. In den meistens Fällen werden wir $0 \leq C < \infty$ P-fast sicher voraussetzen.

Beispiele (Für Derivate)**.**

1. *Forward-Contract* auf S^i.
$$C = S^i - \Pi^i$$
Achtung: Hier kann auch $C < 0$ gelten.
2. *Put-Option* auf S^i mit *Strike Preis* K.
$$C = (K - S^i)_+$$
3. *Call-Option* auf S^i mit *Strike Preis* K.
$$C = (S^i - K)_+$$
4. *Straddle* (auf Portfolio)
$$C = |\xi \cdot \Pi - \xi \cdot S|$$

Definition 2.16. In einem 1-perioden Finanzmarktmodell heißt die Menge der Zufallsvariablen

$$\mathcal{V} := \left\{C : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, \exists \overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1} : C = \overline{\xi} \cdot \overline{S} \ P\text{-fast sicher}\right\}$$

die *Menge der (mit Portfolios) replizierbaren Optionen.*

Eine replizierbare Option ist also insbesondere ein (lineares) Derivat.

Beispiel 2.17 ('Mario Draghi-Beispiel')**.** Im Beispiel 2.13 hatten wir gezeigt, dass die Option $C = \max(S-1, 0)$ durch ein Portfolio replizierbar ist. Wir betrachten nun eine Erweiterung dieses Modells zur Beschreibung einer Call-Option, die nur dann zu Auszahlung kommt, falls etwa der EZB-Präsident Mario Draghi am morigen Tag eine Pressekonferenz gibt, d.h. wir betrachten eine Option der Form

$$\overline{C} = \max(S - 1, 0) \cdot \mathbb{1}_{\text{Mario Draghi gibt eine Pressekonferenz}}.$$

Zur Modellierung hiervon führen wir einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $\overline{\Omega} = \{(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'\}$ ein, mit Ω aus Beispiel 2.13 zur Modellierung von $\overline{S}$, d.h. $\overline{S}(\overline{\omega} = (\omega, \omega')) = \overline{S}(\omega)$ sowie $\Omega' = \{j, n\}$ als Raum zur Modellierung von Mario Draghi. Wir wählen $\overline{\mathfrak{F}}$ als Potenzmenge von $\overline{\Omega}$ und $\overline{P}$ als Gleichverteilung auf $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}})$, d.h. $\overline{P}(\overline{\omega}) = \frac{1}{4}$ für alle $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$. Damit sind das Modell $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{P}, \overline{S}, \overline{\Pi})$ und die Option $\overline{C} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\overline{C}(\overline{\omega} = (\omega, \omega')) = C(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\omega' = j}$$

definiert. Da $\overline{C} = C(\omega)$ aber offensichtlich nicht als Funktion vom ersten Zufallsparameter allein darstellbar ist, kann es insbesondere kein Derivat von S sein und ist also nicht replizierbar.

Satz 2.18. *Es sei* $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ein Arbitrage-freies 1-perioden Finanzmarktmodell und* $\mathcal{V} \ni \overline{\xi} \cdot \overline{S} = \overline{\zeta} \cdot \overline{S}$ *mit* $\overline{\xi}, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}^{d+1}$. *Dann gilt*

$$\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} = \overline{\Pi} \cdot \overline{\zeta}.$$

Für die erwartete Rendite $\mathbb{E}^*(R(v)) = \mathbb{E}_{P^*}(R(v))$ *unter einem beliebigen risikoneutralen Maß* $P^* \in \mathfrak{P}$ *gilt*

$$\mathbb{E}^*(R(v)) = r$$

wobei

$$R(v) = \frac{\overline{\xi} \cdot \overline{S} - \overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}}{\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}}$$

Beweis. Es gilt

$$(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S} = 0 \ P\text{-fast sicher}$$

also auch P^*-fast sicher für $P \in \mathfrak{P}$. Damit gilt auch

$$(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{\Pi} = (\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \mathbb{E}^* \left(\frac{\overline{S}}{1+r} \right) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^* \left((\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S} \right) = 0$$

und weiter

$$\mathbb{E}^*(R(v)) = \frac{\mathbb{E}^*(\overline{S} \cdot \overline{\xi}) - \overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}}{\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}} = \frac{(1+r) \cdot \overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} - \overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}}{\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi}} = r.$$

□

Definition 2.19. Für $v = \overline{\xi} \cdot \overline{S} \in \mathcal{V}$ heißt

$$\Pi(v) := \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}$$

Preis von v.

Bemerkung 2.20. Der Zusammenhang

$$\Pi(v) = \mathbb{E}_{P^*} \left(\frac{v}{1+r} \right) \quad \forall P \in \mathfrak{P}.$$

führt das auf die *risikoneutrale Preisregel* für replizierbare Ansprüche. Hiernach entspricht der Preis eines replizierbaren Anspruchs entspricht seiner mittleren (d.h. erwarteten) diskontierten Auszahlung unter einem beliebigen risikoneutralen Maß.

Insbesondere stellt sich die Frage, ob die Menge der replizierbaren Auszahlungen bereits sämtliche im Modell darstellbare Optionen umfasst.

Definition 2.21. Eine Wette C heißt *replizierbar*, falls ein C replizierendes Portfolio $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ existiert, d.h. es gilt

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = C \ P\text{-fast sicher}$$

Definition 2.22. Ein Marktmodell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ heißt *vollständig*, falls jede Option $C : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ replizierbar ist.

Beispiel. Das Modell 2.13 ist vollständig, seine Erweiterung 2.17 hingegen nicht.

2.4 Arbitragepreise und -schranken im Einperiodenmodell

Wir wir im einführenden Abschnitt 1 gesehen haben, können durch die Ergänzung eines Markmodells um einen neuen Anspruch C mit einem gewissen Einstandspreis p Arbitragemöglichkeiten entstehen. Wir wollen nun nur solche Preise zulassen, zu denen keine Arbitrage realsiert werden kann.

Definition 2.23 (Arbitrage Preis)**.** Eine Zahl $\Pi^C \geq 0$ heißt *arbitrage-freier Preis* (oder *Arbitrage-Preis*) für den Anspruch C, falls das erweiterte Finanzmarktmodell

$$((\Omega, \mathfrak{F}, P), \widetilde{\Pi}, \widetilde{S})$$

mit

$$\widetilde{\Pi} = (\overline{\Pi}, \Pi^C)\ ,\ \widetilde{S} = (\overline{S}, C)$$

Arbitrage-frei ist.

Beispiel.

$$\begin{tikzcd} t=0 & & t=1 \\ & & \begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \arrow[urr, dash, "\frac{1}{2}"] \arrow[drr, dash, "\frac{1}{2}"'] & & \\ & & \begin{pmatrix}3/2\\1/2\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

mit $C = (S^1 - 1, 0)_+$ und dem Preisvorschlag $\Pi^C = \frac{4}{9}$.

Dabei ist Π^C ist ein arbitrage-freier Preis, falls der Markt

$$\begin{tikzcd} t=0 & & t=1 \\ & & \begin{pmatrix}3/2\\2\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\1\\4/9\end{pmatrix} \arrow[urr, dash, "\frac{1}{2}"] \arrow[drr, dash, "\frac{1}{2}"'] & & \\ & & \begin{pmatrix}3/2\\1/2\\0\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

ebenfalls arbitrage-frei ist.

Beispiel. Aus der Identität

$$\max(S-k, 0) - \max(k-S, 0) = S - k \quad \forall S \in \mathbb{R},$$

aufgefasst als Identität von Auszahlungsfunktionen in $t = 1$ verschiedener Derivate ergibt sich eine analoge Relation für die Arbitrage-Preise solcher Optionen in $t = 0$, nämlich

$$\Pi(call) = \Pi(put) + \Pi^i - \frac{K}{1+r}$$

Dies ist die sogenannte *Put-Call-Parity.*

Die Definition 2.23 ist intuitiv aber unhandlich. Der folgende Satz gibt eine griffige Charakterisierung der Arbitragepreise unter Verwendung der risikoneutralen Maße. Er liefert die Ausdehung des risikoneutralen Preisprinzips auf den Fall nicht-replizierbarer Ansprüche.

Satz 2.24. *Falls in einem 1-perioden Finanzmarktmodell* $\mathfrak{P} \neq 0$ *gilt, dann ist die Menge der arbitrage-freien Preise von* C *gegeben durch die Menge*

$$\emptyset \neq \Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) \mid P^* \in \mathfrak{P},\ \textit{sodass}\ \mathbb{E}^*(C) < \infty \right\}$$

Beweis. Π^C ist genau dann ein arbitrage-freier Preis von C, wenn $((\Omega, \mathfrak{F}, P), \widetilde{\Pi}, \widetilde{S})$ arbitrage-frei ist. Das ist genau dann der Fall, wenn ein risiko-neutrales Maß P^* für den entsprechend erweiterten Finanzmarkt existiert. Da

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{\widetilde{S}^i}{1+r} \right) = \widetilde{\Pi}^i \ \forall\ i = 0, \ldots, d+1$$

ist jedes solche P^* insbesondere für den ursprünglichen Markt risiko-neutral und es gilt

$$\widetilde{\Pi}^{d+1} = \Pi^C = \mathbb{E}^* \left(\frac{\widetilde{S}^{d+1}}{1+r} \right) = \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right)$$

Um zu zeigen, dass die $\Pi(C)$ nicht leer ist, können wir o.b.d.A. zum äquivalenten Maß

$$\widetilde{P}(d\omega) = \frac{c}{1+C(\omega)} P(d\omega),$$

mit

$$c = \left(\mathbb{E}_P \left[\frac{1}{1+C} \right] \right)^{-1}$$

übergehen, bzw. zum dadurch definierten äquivalenten Finanzmarktmodell, das dann ebenfalls Arbitrage-frei ist mit

$$\mathbb{E}_{\widetilde{B}}(C) = c\mathbb{E}_P(\frac{C}{1+C}) \leq c < \infty.$$

Nach dem Fundamentalsat Satz 2.12 gibt es dann eine $\widetilde{P}$-äquivalentes risikoneutrales Maß $P^* \in \mathfrak{P}$ mit beschränkter Dichte $Z = dP^*/d\widetilde{P}$, d.h. $|Z| \leq K$ fast sicher mit einem gewissen $K \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann

$$\mathbb{E}_{P^*}(C) = \mathbb{E}_{\widetilde{P}}(Z\,C) \leq K\,\mathbb{E}_{\widetilde{P}}(C) < \infty,$$

d.h. $\mathbb{E}_{P^*}(C) \in \Pi(C) \neq \emptyset$. □

Beispiel 2.25 (Fortsetzung von Bsp. 2.17)**.** Im Mario-Draghi-Beispiel $M = (\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{P}, \overline{S}, \overline{\Pi})$ hatten wir gesehen, dass Option $\overline{C} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\overline{C}(\overline{\omega} = (\omega, \omega')) = C(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\omega' = j}$$

kein Derivat von $\overline{S}$ ist. Wir fragen nun nach der Menge der risiko-neutralen äquivalenten Maße für M.

P^* ist genau dann risiko-neutral, wenn für $i = 0,1$

$$\Pi^i = \mathbb{E}^*\left(\frac{\overline{S}^i}{1+r}\right)$$

gilt. Diese Bedingung ist eine Bedingung allein für die Randverteilung von P^* auf Ω, d.h. P^* ist genau dann auf $\overline{\Omega}$ risiko-neutral, wenn gilt

$$P^*(\{\omega = 0\}) = \frac{2}{3}\ ,\ P^*(\{\omega = 1\}) = \frac{1}{3}$$

Die möglichen Kombinationen lassen sich in einer Vierfeldertafel darstellen:

$\omega \setminus \omega'$	j	n	$\sum$
0	P^*_{11}	P^*_{12}	$\frac{2}{3}$
1	P^*_{21}	P^*_{22}	$\frac{1}{3}$

Insbesondere erfüllt jedes beliebige Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß P^* der Form

$$\begin{aligned} P^*(\omega = 0 \wedge \omega = j) &= \frac{2}{3} \cdot p \\ P^*(\omega = 0 \wedge \omega = n) &= \frac{2}{3} \cdot (1-p) \end{aligned}$$

für ein beliebiges $p \in (0,1)$ und $P^*_{ij} > 0$ für alle $i,j = 0,1$ diese Bedingung und ist äquivalent zu $\overline{P}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}^*\left((S(\omega)-1)_+ \cdot \mathbb{1}_{\{\omega'=j\}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}^*((S(\omega)-1)_+) \cdot P^*(\omega' = j) = \frac{4}{9} \cdot p$$

$$\Rightarrow \Pi(C) = \left(0, \frac{4}{9}\right)$$

Bemerkung. Die Menge $\Pi(C)$ ist konvex, d.h. es handelt sich immer um ein Intervall.

Definition 2.26 (Arbitrage-Schranken)**.** Sei C eine Wette in einem 1-perioden Finanzmarktmodell. Dann heißen

$$\begin{aligned} \Pi_{\inf}(C) &:= \inf \Pi(C) \\ \Pi_{\sup}(C) &:= \sup \Pi(C) \end{aligned}$$

untere bzw. *obere Arbitrage-Preis-Schranken* für C.

Satz 2.27. *In einem Arbitrage-freien Modell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ sind die Arbitrage-Preis-Schranken für die Wette C gegeben durch*

1. $\Pi_{\inf}(C) = \inf\limits_{P^* \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) = \max\left\{m \geq 0 \mid\ \exists\, \xi : m + \xi \cdot Y \leq \frac{C}{1+r}\ P\text{-fast sicher}\right\}$

2. $\Pi_{\sup}(C) = \sup\limits_{P^* \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) = \min\left\{m \geq 0 \mid\ \exists\, \xi : m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}\ P\text{-fast sicher}\right\},$

wobei

$$Y := \frac{S}{1+r} - \Pi.$$

Definition 2.28. Ein Portfolio $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ heißt

- *superreplizierend* für eine Wette C, falls
$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq C \text{ } P\text{-fast sicher}$$
- *subreplizierend* für eine Wette C, falls
$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} \leq C \text{ } P\text{-fast sicher}$$
- *replizierend* für eine Wette C, falls
$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = C \text{ } P\text{-fast sicher}$$

Bemerkung 2.29. Es gilt

$$\inf\left\{m \geq 0 \mid \ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^d : m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}\right\} = \inf\left\{\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} \mid \overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1} : \overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq C\right\}$$

Beide Ungleichungen in den Mengendefinitionen gelten dabei P-fast sicher.

Damit besagt Satz 2.27, dass die obere Arbitrage-Preis-Schranke den minimalen Kosten in $t = 0$ für ein superreplizierendes Portfolio für C entspricht. Analog entspricht die untere Arbitrage-Preis-Schranke dem maximalen Ertrag in $t = 0$ für ein subreplizierendes Portfolio.

Ein *Verkauf* der Option C zu einem Preis höher als $\Pi_{\sup}(C)$ ist stets vorteilhaft, denn mit dem Verkauf in $t = 0$ verdient man mehr als gebraucht wird, um ein Portfolio zu kaufen, welches zum Zeitpunkt $t = 1$ die mit C versprochene Zahlung finanziert. Umgekehrt lohnt sich der *Kauf* von C bei einem Preis unterhalb von $\Pi_{\inf}(C)$, weil man dann den Kauf durch Verkauf eines subreplizierenden Portfolios mehr als gegenfinanziern kann, das $t = 1$ mit der Ausschüttung von C sicher wieder zurückgekauft werden kann.

Definition 2.30. Ein Modell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ heißt *nicht-redundant*, falls für alle $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt.

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \text{ } P\text{-fast sicher} \Rightarrow \overline{\xi} = \overrightarrow{0}$$

Bemerkung. Angenommen,$M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ist redundant Dann existiert $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\overline{\xi} \neq 0$ mit

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \text{ fast sicher}$$

d.h. es gilt

$$S^j = -\frac{1}{\xi^j} \sum_{i \neq j} \xi^j \cdot S^i$$

für $\xi^j \neq 0$. Folglich ist die Zufallsvariable S^j durch die anderen Einträge von S und ξ darstellbar. Somit ist jedes Derivat von S als Derivat des um den Eintrag S^j vekürzten Wertpapiervektors $\widehat{S} = (S^0, S^1, , \cdots, S^{j-1}, S^{j+1}, \cdots, S^d)$ darstellbar. Das entsprechende Modell $\widehat{M} = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \widehat{\Pi}, \widehat{S})$ mit $\widehat{\Pi} = (\Pi^0, \Pi^1, , \cdots, \Pi^{j-1}, \Pi^{j+1}, \cdots, \Pi^d)$ nennen wir das um S^j reduzierte Modell.

Lemma 2.31. *Sei M ein redundantes 1-perioden Marktmodell mit ξ wie oben. Dann ist M genau dann arbitrage-frei, wenn das reduzierte Modell $\widehat{M}$ arbitrage-frei ist und*

$$\Pi^j = -\frac{1}{\xi^j} \sum_{i \neq j} \xi^i \Pi^i$$

Beweis. Klar bzw. Übungsaufgabe. □

Lemma 2.32. *Falls M nicht-redundant ist, gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$:*

$$\xi \cdot Y = 0 \ P\text{-}\textit{fast sicher} \Rightarrow \xi = 0$$

Beweis. Sei $\xi \cdot Y = 0$ P-fast sicher.
$\Leftrightarrow \xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \Pi = 0$. Sei nun $\xi^0 = -\xi \cdot \Pi$.

$$\Rightarrow \overline{\xi} \cdot \overline{S} = S \cdot \xi + (1+r) \cdot (-\xi \cdot \Pi) = 0 \ P\text{-fast sicher}$$

$\Rightarrow \overline{\xi} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \xi = \overrightarrow{0}$, da M nicht-redundant ist. □

Beweis von Satz 2.27. Wir zeigen Aussage 2, der Beweis von Aussage 1 verläuft analog. Durch Übergang zu einem entsprechend reduzierten Modell können wir OBdA davon ausgehen, dass M nicht-redundant ist. Sei

$$\mathcal{M} := \left\{ m \geq 0 \mid \ \exists \ \xi : m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \right\}$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\min \mathcal{M} = \sup \Pi(C).$$

Sei hierfür $m \in \mathcal{M}$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit

$$m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}$$

Da das Marktmodell M Arbitrage-frei ist, ist die Menge $\mathfrak{P}$ nicht leer und für $P^* \in \mathfrak{P}$ gilt wegen $\mathbb{E}^*(Y) = 0$

$$m = \mathbb{E}^*(m + \xi \cdot Y) \geq \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right)$$

$$\Rightarrow m \geq \sup_{P^* \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) \geq \sup \Pi(C) \ \forall \ m \in \mathcal{M}$$

$\Rightarrow \inf \mathcal{M} \geq \Pi_{\text{sup}}(C)$.

Wir zeigen nun, dass in der obigen Ungleichung eigentlich Gleichheit gilt. Trivialerweise trifft das zu, wenn $\Pi_{\text{sup}}(C) = \infty$ gilt. Falls $\Pi_{\text{sup}}(C) < \infty$ und $m > \Pi_{\text{sup}}(C)$, so existiert nach Satz 2.24 eine Arbitrage im erweiterten Modell mit Preis- und Werpapiervektor $\widetilde{\Pi}$ bzw. $\widetilde{S}$

$$\widetilde{S}^{d+1} := C \ , \ \widetilde{\Pi}^{d+1} := m.$$

$\Rightarrow\ \exists\, \widetilde{\xi} = (\xi, \xi^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit

$$\widetilde{\xi} \cdot \widetilde{Y} = \xi \cdot Y + \xi^{d+1} \cdot \left(\frac{C}{1+r} - m \right) >^* 0 \quad (*)$$

Wegen der Arbitrage-Freiheit des ursprünglichen Modells ist $\xi^{d+1} \neq 0$. Durch Erwartungswertbildung mit einem $P^* \in \mathfrak{P}$ in $(*)$ gilt:

$$0 \leq \xi^{d+1} \cdot \left(\mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) - m \right).$$

Wegen $m > \Pi_{\sup}(C)$ ist der Wert in der Klammer negativ, folglich ist $\xi^{d+1} < 0$. Teilen wir $(*)$ durch $-\xi^{d+1}$ entsteht

$$0 \leq \zeta \cdot Y - \frac{C}{1+r} + m$$

mit $\zeta = -\frac{1}{\xi^{d+1}} \cdot \xi$. Somit gilt $m \in \mathcal{M}$, insbesondere $m \geq \inf \mathcal{M}$, d.h. wir haben gezeigt

$$m > \Pi_{\sup}(C) \Rightarrow m \geq \inf \mathcal{M}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\Pi_{\sup}(C) \geq \inf \mathcal{M},$$

was zusammen mit dem ersten Schritt die die Gleichheit

$$\inf \mathcal{M} = \Pi_{\sup}(C)$$

liefert. Es bleibt noch zu zeigen, dass das Infimum von $\mathcal{M}$ ein Minimum ist. Sei hierzu

$$m_n \searrow m := \inf \mathcal{M}\ ,\ m_n \in \mathcal{M}$$

Sei weiter $\xi_n \in \mathbb{R}^d : m_n + \xi_n \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}$ P-fast sicher. Falls

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\xi_n\| < \infty$$

gilt, existiert eine konvergente Teilfolge $\xi_{n_k} \to \xi$. Im Grenzübergang $k \to \infty$ gilt dann

$$m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}$$

P-fast sicher, d.h. $m \in \mathcal{M}$. Der Fall

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\xi_n\| = \infty$$

kann aber nicht auftreten, denn ansonsten gilt (gegebenfalls nach Auswahl einer Teilfolge) dass

$$\eta_n := \frac{1}{\|\xi_n\|} \cdot \xi_n \longrightarrow \eta$$

für ein gewisses η mit $\|\eta\| = 1$. Wegen

$$\frac{m_n}{\|\xi_n\|} + \eta_n \cdot Y \geq \frac{C}{(1+r)\,\|\xi_n\|}$$

und nach Grenzübergang $n \to \infty$ gilt

$$\eta \cdot Y \geq 0$$

P-fast sicher. Da das Modell Arbitrage-frei ist, folgt $\eta \cdot Y = 0$ P-fast sicher. Aus der Nicht-Redundanz des Modells folgt nun aber $\eta = \overrightarrow{0}$, im Widerspruch zu $\|\eta\| = 1$. $\square$

Korollar 2.33 (zu Satz 2.27)**.** *In einem Arbitrage-freien Modell* $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ist die Option* C *genau dann replizierbar, wenn es einen eindeutigen Arbitrage-freien Preis für* C *gibt, d.h. wenn*

$$\Pi_{\sup}(C) = \Pi_{\inf}(C)$$

und insbesondere

$$\#\Pi(C) = 1$$

gilt. Falls C *nicht replizierbar ist, so gilt*

$$\Pi(C) = (\Pi_{\inf}(C), \Pi_{\sup}(C))$$

Beweis. Für eine replizierbare Option C mit $C = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ fast sicher für ein $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ ist $\Pi_{\sup}(C) = \Pi_{\inf}(C) = \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \mathbb{E}_{P^*}(\frac{C}{1+r})$ für alle $P^* \in \mathfrak{P}$. Umgekehrt, falls $\Pi_{\sup}(C) = \Pi_{\inf}(C) = m$ so gibt es nach Satz 2.27 zwei Portfolios ξ und η mit $(\xi - \zeta) \cdot Y = m + \xi \cdot Y - (m + \zeta \cdot Y) \geq \frac{C}{1+r} - \frac{C}{1+r} \geq 0$, also $\xi - \zeta \cdot Y = 0$ fast sicher, da der Markt nach Voraussetzung Arbitrage-frei ist. Folglich gilt $m + \xi \cdot Y = \frac{C}{1+r}$ fast sicher, d.h. C ist replizierbar.

Wir zeigen nun noch, das im nicht replizierbaren Fall

$$\Pi_{\inf}(C) \notin \Pi(C)$$

gilt. (Analog lässt sich $\Pi_{\sup}(C) \notin \Pi(C)$ zeigen.) Gemäß Satz 2.27 gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\Pi_{\inf}(C) + Y \cdot \xi \leq \frac{C}{1+r} \; P\text{-fast sicher}$$

Da C nicht replizierbar ist, muss die echte Ungleichung auf einer Menge positiven P-Maßes gelten. Wir betrachten nun das erweiterte Marktmodell mit $\widetilde{\Pi}^{d+1} = \Pi_{\inf}(C)$ und $\widetilde{S}^{d+1} = C$. Es sei

$$\widetilde{\xi} := (\Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C), -\xi, 1) \in \mathbb{R}^{d+2}$$

Dann gilt

$$\widetilde{\xi} \cdot \widetilde{\Pi} = \Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C) - \xi \cdot \Pi + \Pi_{\inf}(C) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi} \cdot \widetilde{S} &= (1+r) \cdot (\Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C)) - \xi \cdot S + C \\ &= (1+r)[-\xi \cdot Y + \frac{C}{1+r} - \Pi_{\inf}(C)] \geq 0 \; P\text{-fast sicher} \end{aligned}$$

wobei die echte Ungleichung mit einer positiven Wahrscheinlichkeit gilt. Damit handelt es sich hier um eine Arbitrage-Möglichkeit, weshalb $\Pi_{\inf}(C) \notin \Pi(C)$ gilt. $\square$

Beispiel 2.34 (Fortsetzung von Bsp. 2.25)**.** Im Mario Draghi-Bespiel hatten wir die Menge der Arbitragepreise zur Option

$$\overline{C}(\omega, \omega') = (S(\omega) - 1)_+ \cdot \mathbb{1}_{\{\omega'=j\}}$$

bestimmt als

$$\Pi(\overline{C}) = \left(0, \frac{4}{9}\right),$$

was gemäß Korollar 2.33 einen weiteren Nachweis liefert, dass $\overline{C}$ nicht replizierbar ist. Offensichtlich reicht die Menge der Linearkombinationen von B und S nicht aus, um die im Modell durch den zweiten Parameter ω' beschriebene Ungewissheit vollständig abzubilden.

Bemerkung 2.35. Als Konsequenz aus Korollar 2.33 ist ein Preis p ein Arbitrage-freier Preises für die Option π, falls es $\pi, \pi' \in \Pi(C)$ gibt mit $\pi \leq p \leq \pi'$. Umgekehrt erlaubt ein Preis p mit $p < \pi \quad \forall \pi \in \Pi(C)$ eine Arbitrage für den Käufer ('Käufer-Arbitrage') und eine Preis p mit $p > \pi \forall \pi \in \Pi(C)$ eine Arbitrage für den Verkäufer ('Verkäufer-Arbitrage') von C, vergleiche Bemerkung 2.29.

2.5 Der zweite Fundamentalsatz der Optionspreistheorie

Der zweite Fudamentalsatz liefert die Charakterisierung des Sonderfalls eines vollständigen Finanzmarktmodelles. Aufgrund der Seltenheit von vollständigen Modellen ist der zweite 'Fundamentalsatz' weniger bedeutend als der erste Fundamentalsatz.

Satz 2.36 (FTAP II)**.** *Es sei* $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ein Arbitrage-freies Marktmodell. Dann gilt:*

$$M \text{ vollständig } \Leftrightarrow \mathfrak{P} = \{P^*\}$$

d.h. falls es genau ein risiko-neutrales, äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^* *gibt.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Im vollständigen Fall sind insbesondere auch Optionen der Form $C = C_A$ mit $C_A(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$ für $A \in \mathfrak{F}$ ist replizierbar. Folglich

$$\pi(C) = \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) = \mathbb{E}^*(\mathbb{1}_A)\frac{1}{1+r} \ \forall\ P^* \in \mathfrak{P}.$$

Es gilt also

$$P^*(A) = \pi(C) \cdot (1+r)$$

D.h. $P^*(A)$ ist eindeutig durch den eindeutigen Preis $\pi(C_A)$ von C_A bestimmt für alle $A \in \mathfrak{F}$ und somit auch P^*, also hat die Menge $\mathfrak{P}$ genau ein Element.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathfrak{P} = \{P^*\}$ und C eine Option, so liefert Satz 2.24, dass

$$\emptyset \neq \Pi(C) = \left\{\mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) \mid P^* \in \mathfrak{P}, \mathbb{E}^*(C) < \infty\right\}$$

Da die Menge $\mathfrak{P}$ aber nur das eine Element P^* hat, folgt (zum einen dass $E_{P^*}(C) < \infty$ und zum anderen) dass die Menge

$$\Pi(C) = \{E_{P^*}(\frac{C}{1+r})\}$$

einelementig ist. Gemäß Korollar 2.33 ist C somit replizierbar. ∎

Sämtliche bisher behandelten Beispiele handelten von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Im vollständigen Fall ist das keine echte Einschränkung, wie wir jetzt zeigen.

Satz 2.37. *Sei $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, P), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ein vollständiges und arbitrage-freies 1-perioden Marktmodell. Dann existiert eine Partition*

$$\Omega = \dot{\bigcup_{i=1,\dots,d+1}} \Omega_i$$

in maximal $d+1$ Atome von P.

Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathfrak{F}$ heißt *Atom* von P, falls

$$\forall\ B \in \mathfrak{F} : [B \subset A \Rightarrow P(B) = 0 \vee P(B) = P(A)]$$

Lemma 2.38. *Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist für alle $p \in [0, \infty]$*

$$\dim(L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)) = \sup \left\{ n \mid \ \exists\ A_1, \dots, A_n : \Omega = \dot{\bigcup_{i=1,\dots,n}} A_i \ , \ P(A_i) > 0 \right\}$$

Beweis. Die Dimension von L^p ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen charakteristischen Funktionen von Mengen mit positiven P-Maß (Übungsaufgabe). □

Beweis von Satz 2.37. Falls M vollständig, so lässt sich jedes $f \in L^r(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ (und $f \geq 0$) als Wert $\overline{\xi} \cdot \overline{S}$ eines geeigneten Portfolios $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ darstellen, d.h.

$$f = \sum_{i=0}^{d} \xi^i \cdot S^i$$

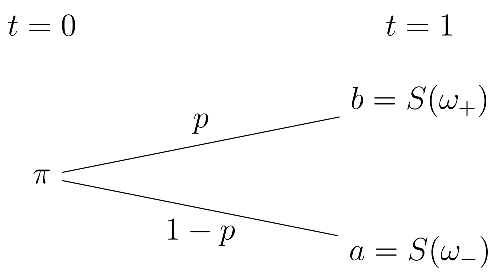
$\Rightarrow \dim(L^r(\Omega, \mathfrak{F}, P)) =: m \leq d+1$. Wegen des vorhergegangenen Lemmas existiert eine Partition $A_1, \dots, A_m$, $m \leq d+1$ mit

$$\Omega = \dot{\bigcup_{i=1,\dots,m}} A_i$$

und $P(A_i) > 0$. A_i sind notwendigerweise Atome, da ansonsten die Dimension von $L^r(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ größer wäre als m. □

Bemerkung. Da Wahrscheinlichkeitstheorie auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ eigentlich nur ein Teilgebiet der linearen Algebra ist, könnten wir die Theorie vollständiger Märkte somit auch ganz ohne Wahrscheinlichkeitstheorie betreiben.

Beispiel. Sei $r = 0$.



mit $p \in (0,1)$. P^* ist ein risiko-neutrales Maß, falls

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{S}{1+r}\right) = \mathbb{E}^*(S) = \pi$$

$$\Rightarrow p^* \cdot b + (1-p^*) \cdot a = \pi$$

$$\Rightarrow p^* = \frac{\pi - a}{b - a} \in (0,1)$$

Das ist genau dann möglich, wenn

$$\pi \in (a,b)$$

Das Modell ist somit genau dann arbitrage-frei, falls $\pi \in (a,b)$ gilt. In diesem Fall ist M auch vollständig, denn dann ist p^* eindeutig bestimmt.

3 Das Mehrperiodenmodell

Mit dem Mehrperiodenmodell werden dynamische Finanzmärkte abgebildet, die sich über mehrere Zeitpunkte hinweg zufällig bewegen. Dabei ist eine Beschreibung der zu Zwischenzeitpunkten (ohne Prophetie d.h. Vorausschau) verfügbaren Information nötig, um die Menge der zulässigen Wetten oder Strategien eingrenzen zu können.

Definition 3.1. Es seien $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{T}$ eine geordnete Indexmenge.

- Eine Familie von σ-Algebren $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$ von Ω heißt *Filtration* von Ω, falls

  $$\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_{i+1} \; \forall \; i = 0, \ldots, T-1$$

  gilt.

- Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i\in\mathcal{T}}$ mit

  $$X_i : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to (E, \mathfrak{E})$$

  mit Werten in einem messbaren Raum $(E, \mathfrak{E})$ heißt *stochastischer Prozess.* Notation $(X_i)_{i\in\mathcal{T}}$ bzw. $X_\bullet$.

- $\{X_i\}_{i\in\mathcal{T}}$ heißt *adaptiert an* $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$, falls

  $$X_i \text{ ist } \mathfrak{F}_i\text{-messbar } \forall \; i \in \mathcal{T}$$

- Ein stochastischer Prozess $(\xi_i)_{i\in\mathcal{T}}$ heißt *vorhersagbar*, falls ξ_i $\mathfrak{F}_{i-1}$-messbar ist für alle $i \in \mathcal{T}$.

Bemerkung (Interpretation)**.** $\mathfrak{F}_i$ ist die Menge aller Ereignisse, die bis zum Zeitpunkt $i \in \mathcal{T}$ sinnvoll definiert/beschrieben/beobachtet werden können. Wenn X_i an $\mathfrak{F}_i$ adaptiert ist, bedeutet das, dass X_i nur davon abhängt, was bis zum Zeitpunkt $i \in \mathcal{T}$ sinnvoll beobachtbar ist.

Beispiel (3-facher Münzwurf)**.** Wir setzen eine faire Münze voraus und betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{0,1\}^3 \ , \ P(\omega) = \frac{1}{8} \ \forall \ \omega \in \Omega$$

für die Beschreibung des dreifach stochastisch unabhängig wiederholten Münzwurfs.

Sei $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$X_k(\omega) = X_k(\omega^1, \omega^2, \omega^3) = \omega^k$$

die Zufallsvariable zur Beschreibung des k-ten Wurfergebnisses, so ist $(X_k)_{k=1,2,3}$ ein stochastischer Prozess. Eine mögliche Filtration wäre

$$\mathfrak{F}_1 := \sigma(X_1) = \sigma(A_0, A_1) \subset 2^\Omega$$

als die von X_1 erzeugte Sigma-Algebra von Mengen der Form

$$A_i = \left\{(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in \Omega \mid \omega^1 = i\right\},$$

$$\mathfrak{F}_2 := \sigma(X_1, X_2) = \sigma(B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}) \subset 2^\Omega$$

die Sigma-Algebra der gemeinsamen Beobachtungen von X_1 und X_2, erzeugt von Mengen der Form

$$B_{ij} = \left\{(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \in \Omega \mid \omega^1 = i, \omega^2 = j\right\}$$

und schließlich die Potenzmenge von Ω

$$\mathfrak{F}_3 = \sigma(X_1, X_2, X_3) = 2^\Omega$$

als Sigma-Algebra der gemeinsamen Beobachtung aller Teilwürfe. In diesem Fall gilt zum Beispiel, dass X_3 nicht $\mathfrak{F}_2$-messbar ist, denn es gilt z.B.:

$$X_3^{-1}(\{1\}) = \{(0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

Diese Menge lässt sich aber nicht als Durchschnitt/Vereinigung von Mengen der Form B_{ij} darstellen. Es gilt nämlich

$$B_{ij} \cap B_{mn} = \emptyset \ \forall \ (i,j) \neq (m,n)$$

und in B_{ij} kommt immer ein Tupel vor, bei dem die letzte Koordinate 1 ist, und eines, bei dem die letzte Koordinate 0 ist.

Definition 3.2 (Mehrperiodenmodell)**.** Ein (d-dimensionales) Mehrperioden-Finanzmarktmodell

$$M = ((\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_i)_{i \in \mathcal{T}}, P), (\overline{S}_i)_{i \in \mathcal{T}})$$

besteht aus

- einem Wahrscheinlichkeitesraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$
- einer Menge von Handelszeitpunkten $\mathcal{T}$
- einer Filtrierung $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ von $(\Omega, \mathfrak{F})$

- einem stochastischen Prozess

$$(\overline{S_i})_{i\in\mathcal{T}} : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}^{d+1}_{\geq 0}$$

der an die Filtration $(\mathfrak{F}_i)_{i\in\mathcal{T}}$ adaptiert ist. Es sei

$$\overline{S_i} = \begin{pmatrix} S_i^0 \\ \vdots \\ S_i^d \end{pmatrix}$$

Vereinbarung 3.3. Im Folgenden gehen wir von einigen Vereinbarungen aus:

- $\mathcal{T} = \{0, \ldots, T\}$
- $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_T$
- $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $(S_i^0)_{i\in\mathcal{I}}$ ist stets strikt positiv, d.h.

$$S_i^0 > 0 \ P\text{-fast sicher} \ \forall\ i \in \mathcal{T}$$

Bemerkung. Die Adaptiertheit von $\overline{S}_0$ an die triviale Sigma-Algebra $\mathfrak{F}_0$ bedeutet, dass $\overline{S}_0$ deterministisch ist. Das Mehrperiodenmodell verallgemeinert damit das 1-Perioden-Marktmodells mit $\mathcal{T} = \{0, 1\}$ und $\overline{S}_0 := \overline{\Pi}$.

Definition 3.4. $(S_i^0)_{i\in\mathcal{T}}$ wird auch als *Numeraire* bezeichnet. Wenn man es als (relative) Bezugsgröße für die anderen Papiere $(S_i^k)_{i\in\mathcal{T}}$ benutzt und den Vektor

$$(\overline{X_i})_{i\in\mathcal{T}} \ , \ X_i^k = \frac{S_i^k}{S_i^0}$$

einführt, stellt $\overline{X}_i^k$ den Wert des k-ten Wertpapiers zum Zeitpunkt k in Einheiten von S_i^0 dar. $(\overline{X_i})$ heißt *relativer* bzw. *diskontierter Wertpapierprozess.*

3.1 Selbstfinanzierende Handelsstrategien

Definition 3.5 (Handelsstrategie)**.**

- Eine *Handelsstrategie* ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersagbarer stochastischer Prozess $(\overline{\xi_i})_{i=1,\ldots,T}$.
- Eine Handelsstrategie heißt *selbstfinanzierend*, falls gilt:

$$\overline{\xi_t} \cdot \overline{S_t} = \overline{\xi_{t+1}} \cdot \overline{S_t}$$

Bemerkung. Die Menge $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ bezeichnet die Handelstage an denen man durch Kauf bzw. Verkauf von $\overline{S}$-Wertpapieren das eigene Portfolio vom Zustand $\overline{\xi}_t$ in den Zustand $\overline{\xi}_{t+1}$ überführen kann. Man stellt sich dabei vor, dass die Kurse $\overline{S}$ während der Handelstage unverändert bleiben. Die Veränderungen der Kursstände $\overline{S}$ ereignen sich zu den Zeitpunkten $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, T - \frac{1}{2}$, also zwischen den Handelstagen. Der Vektor $\overline{\xi}_t$ ist dann zu interpretieren als das Portfolio, das am (Morgen vom) Tag t gehalten wird. Bei einer (zulässigen) Handelsstrategie ist das Portfolio $\overline{\xi}_t$ für (den Morgen vom) Handelstag t bereits durch Transaktionen am (Abend von) Handelstag $t-1$ zusammengestellt worden, und ist somit $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbar. Bei einer selbstfinanzierende Handelsstrategie sind zudem die am Handelstag t durch Kauf bzw. Verkauf von Papieren aus $\overline{S}$ vorgenommenen Umschichtungen des Portfolios von $\overline{\xi}_t$ auf $\overline{\xi}_{t+1}$ kostenneutral.

Vereinbarung 3.6. Als vorhersagbarer Prozess ist $(\overline{\xi}_t)_t$ nur sinnvoll auf für die Zeitindizes $t \in \{1, \ldots, T\}$ zu definieren. Darüber hinaus verwenden wir zur Erleichterung der Notation gelegentlich die Zufallsvariable $\overline{\xi}_0 := \overline{\xi}_1$.

Definition 3.7.

- Der *diskontierte Wertprozess* für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\overline{\xi}_i)$ ist

$$V_0 = \overline{\xi_1} \cdot \overline{X_0}$$
$$V_t = \overline{\xi_t} \cdot \overline{X_t}$$

  bzw. einfach $V_t = \overline{\xi}_t \cdot \overline{V}_t$ für $t \in \{0, \cdots, T\}$.

- Der *(diskontierte) Gewinn-Prozess* der Handelsstrategie $(\overline{\xi_i})$ ist

$$G_0 = 0$$
$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \overline{\xi_k} \cdot (\overline{X_k} - \overline{X_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

Bemerkung. Die Größe $\overline{\xi}_k \cdot (\overline{X}_k - \overline{X}_k)$ stellt den diskontierten Gewinn (bzw. den Verlust) dar, der sich für ein Portfolio $\overline{\xi}_k$ Kursveränderungen des Wertpapiervektors $\overline{S}$ zum Zeitpunkt $k - \frac{1}{2}$ ergibt. G_k ist die Summe der Gewinne/Verluste am (Morgen vom) Tag k.

Vereinbarung 3.8. Für zwei auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ definierte $\mathbb{R}^d$-wertige stochastische Prozesse $(U_t)_{t=1,\cdots T}$ und $(V_t)_{t=0,\cdots T}$ definieren wir einen neuen stochastischen Prozess $((U \bullet V)_t)_{t=0,\cdots,T}$ durch $(U \bullet V)_t : \Omega :\to \mathbb{R}$

$$(U \bullet V)_0 = 0 \text{ und } (U \bullet V)_t = \sum_{k=1}^{t} U_t \cdot (V_t - V_{t-1})$$

Der Prozess $U \bullet V$ heißt das (diskrete) stochastische Intergal von U nach V. Mit dieser Notation schreibt sich der diskontierte Gewinnprozess

$$G_t = (\overline{\xi} \bullet \overline{X})_t = (\xi \bullet X)_t, \quad t \in \{0, \cdots, T\}$$

als stochastisches Integral des Portfolioprozesses $\overline{\xi}$ nach dem diskontierten Wertpapierprozess $\overline{X}$.

Bemerkung 3.9. Mit der Notation des diskreten stochastischen Integrals ist eine Portfoliostrategie selbstfinanzierend genau dann, wenn für alle $t \in \{0, \cdots, T\}$ gilt

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \overline{\xi}_0 \cdot \overline{S}_0 + (\overline{\xi} \bullet \overline{S})_t,$$

was durch Differenzbildung gleichbedeutend ist mit

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t - \overline{\xi}_{t-1} \cdot \overline{S}_{t-1} = \overline{\xi}_t \cdot (\overline{S}_t - \overline{S}_{t-1}) \quad \forall t \in \{1, \cdots T\}.$$

Satz 3.10. *Sei $\overline{\xi_\bullet}$ eine Handelsstrategie. Dann sind äquivalent:*

1. *$\overline{\xi_\bullet}$ ist selbstfinanzierend.*
2. *$\overline{\xi_t} \cdot \overline{X_t} = \overline{\xi_{t+1}} \cdot \overline{X_t} \;\forall\; t = 1, \ldots, T$*
3. *$V_t = V_0 + G_t \;\forall\; t = 1, \ldots, T$*
4. *$\xi^0_{t+1} - \xi^0_t = (\xi_t - \xi_{t+1}) \cdot X_t \;\forall\; t = 1, \ldots, T$*

Beweis. 1. $\Leftrightarrow$ 2. ist klar (Division durch S^0_t).
3. ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&V_{t+1} - V_t = G_{t+1} - G_t \\
\Leftrightarrow\ &\overline{\xi_{t+1}} \cdot \overline{X_{t+1}} - \overline{\xi_t} \cdot \overline{X_t} = \overline{\xi_{t+1}} \cdot (\overline{X}_{t+1} - \overline{X_t}) \\
\Leftrightarrow\ &\overline{\xi_{t+1}} \cdot (\overline{X_{t+1}} - \overline{X_t}) + (\overline{\xi_{t+1}} - \overline{\xi_t}) \cdot \overline{X_t} = \overline{\xi_{t+1}} \cdot (\overline{X_{t+1}} - \overline{X_t}) \\
\Leftrightarrow\ &(\overline{\xi_{t+1}} - \overline{\xi_t}) \cdot \overline{X_t} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\overline{\xi_{t+1}} - \overline{\xi_t}) \cdot \overline{S_t} = 0
\end{aligned}$$

Das ist wiederum äquivalent zu 1.

4. $\Leftrightarrow$ 2. ist klar, da $X^0_t = X^0_{t+1} = 1$ □

Korollar 3.11. *Es sei $\eta_\bullet = (\eta^1_\bullet, \ldots, \eta^d_\bullet)$ ein vorhersagbarer d-dimensionaler Prozess. Dann existiert zu jedem $v_0 \in \mathbb{R}$ ein vorhersagbarer Prozess $(\eta^0_i)_{i=1,\ldots,T}$, sodass*

$$\overline{\eta_\bullet} = (\overline{\eta_i})$$

mit

$$\overline{\eta_i} = \begin{pmatrix} \eta^0_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

eine selbstfinanzierende Strategie definiert mit Anfangswert $V_0 = v_0$.

Beweis. Nach Satz 3.10 ist $\overline{\eta_\bullet}$ genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$\eta^0_{k+1} - \eta^0_k = (\eta_k - \eta_{k+1}) \cdot X_k \;\forall\; k = 1, \ldots, T-1$$

Definiere rekursiv:

$$\begin{aligned}
\eta^0_1 &:= v_0 - \eta_1 \cdot X_0 \\
\eta^0_{k+1} &:= \eta^0_k + (\eta_k - \eta_{k+1}) \cdot X_k
\end{aligned}$$

Wegen der Vorhersagbarekeit des Prozesses $\eta_\bullet$ ist η^0_{k+1} ebenfalls $\mathfrak{F}_k$-adaptiert für $k \in \{1, \cdots, T\}$, d.h. der Prozess $\overline{\eta}$ eine zulässige und nach Konstruktion selbstfinanzierende Handelsstrategie. □

Definition 3.12. Eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\xi}_\bullet$ heißt *Arbitrage(-Möglichkeit)*, falls $\overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_0 \leq 0$ und $\overline{\xi}_T \cdot \overline{S}_T >^* 0$.

Bemerkung 3.13. Wegen $S^0_\bullet > 0$ fast sicher hätten wir auch ebenso verlangen können, dass für die diskontierten Werte des Portfolios gilt $V_0 \leq 0$ und $V_T >^* 0$.

Satz 3.14. *Ein Mehrperioden-Modell M erlaubt genau dann eine Arbitrage-Möglichkeit, wenn gilt ein $t \in \{1, \ldots, T\}$ und eine $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbare Zufallsvariable η mit Werten in $\mathbb{R}^d$ existieren, so dass*

$$\eta \cdot (X_t - X_{t-1}) >^* 0.$$

Vereinbarung 3.15. Gelegentlich benutzen wir die Bezeichnung

$$\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$$

für die Menge der $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbares Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^d$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $\overline{\xi_\bullet}$ eine Arbitrage-Möglichkeit mit Wertprozess $V_\bullet$ und sei

$$t := \min\{k \mid V_k >^* 0\}$$

Dann ist $t \leq T$ nach Voraussetzung. Weiter gilt entweder

$$V_{t-1} = 0 \text{ oder } P(V_{t-1} < 0) > 0$$

Fall 1: $\xi_t(X_t - X_{t-1}) \overset{\xi \text{ selbstfin.}}{=} V_t - V_{t-1} = V_t >^* 0$. Dann setze

$$\eta_t = \xi_t.$$

Fall 2: Sei $\eta := \xi_t \cdot \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}$. Dann ist η $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbar und

$$\begin{aligned}\eta(X_t - X_{t-1}) &= \xi_t \cdot \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}(X_t - X_{t-1})\\ &= \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}(V_t - V_{t-1})\\ &\geq \mathbb{1}_{\{V_{t-1}<0\}}(-V_{t-1}) >^* 0\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Sei η wie angegeben. Definiere

$$(\xi_s)(\omega) = \begin{cases} \eta & \text{falls } s = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei weiter $\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ die zu $\xi_\bullet$ und Anfangswert 0 zugehörige selbstfinanzierende Strategie. Dann ist $V_0 = 0$ und ferner

$$V_s - V_{s-1} = \xi_s(X_s - X_{s-1})$$

$$\Rightarrow V_T = \sum_{s=1}^{T} V_s - V_{s-1} = \eta(X_t - X_{t-1}) >^* 0$$

□

Bemerkung. Falls η nicht von Zufall abhängt, besteht die Strategie $\overline{\xi}$ darin, zum Zeitpunkt $t-1$ genau das Portfolio η aufzubauen. Die Kosten hierfür werden negativ als Eintrag ξ_t^0 in die Cash-Koordinate des erweiterten Portfoliovektors

$$\overline{\xi_t} = \begin{pmatrix} \xi_t^0 \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_t^0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

eingetragen. Zum Zeitpunkt t wird das Portfolio durch den Verkauf wieder aufgelöst.

3.2 Äquivalente Martingalmaße

Das Analogon von risikoneutralen Maßen im Einperiodenmodell sind die Martingale (bzw. Martingalmaße) im Mehrperiodenmodell. Hierfür erinnern wir zunächst an den Begriff der bedingten Erwartung für integrierbare Zufallsvariablen.

3.2.1 Erinnerung an die bedingte Erwartung

Definition 3.16. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Zufallsgröße und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{F}$. Dann heißt $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ die *bedingte Erwartung von X gegeben $\mathfrak{G}$*

$$Y = \mathbb{E}(X|\mathfrak{G})$$

falls gilt:

1. Y ist $\mathfrak{G}$-messbar
2. $\forall\ A \in \mathfrak{G} : \int_A Y(\omega)P(d\omega) = \int\limits_A X(\omega)P(d\omega)$.

Bemerkung (Interpretation)**.** 1. Y ist die Projektion von X auf die Menge der $\mathfrak{G}$-messbaren Zufallsvariablen.

2. Y entspricht dem Erwartungswert von X bedingt auf die Ereignisse in $\mathfrak{G}$.

Beispiel. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sei der Wahrscheinlichkeitsraum für das zweifache Werfen einer (fairen) Münze.

$$\Omega = \left\{(\omega^1, \omega^2) \mid \omega^i \in \{0,1\}\right\}$$

$$\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)\ ,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}\ \forall\ \omega \in \Omega$$

Weiter seien

$$X(\omega) = \omega^1 \cdot \omega^2$$

und

$$\mathfrak{G} := \{\emptyset, \Omega, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1)\}\}$$

$\mathfrak{G}$ enthält nur Informationen über den ersten Wurf. Es sei $A_1 = \{(1,0),(1,1)\}$ und $A_2 = \{(0,0),(0,1)\}$. Dann haben wir

$$\mathbb{E}(X|A_1) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_1})}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X|A_2) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_2})}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Definiere nun Y:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } \omega \in A_1 \\ 0 & \text{falls } \omega \in A_2 \end{cases}$$

Dann gilt:

1. Y ist $\mathfrak{G}$-messbar.
2. Für alle $A \in \mathfrak{G}$ gilt
$$\int_A Y(\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) P(d\omega)$$

Satz 3.17 (Existenz der bedingten Erwartung)**.** *Sei* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$. *Dann existiert* $Y := \mathbb{E}(X|\mathfrak{G})$ *und ist (fast sicher) eindeutig bestimmt.*

Beweis. $X \in L^1$. Sei $\nu(d\omega) = X(\omega)P(d\omega)$ ein signiertes Maß auf Ω. Ferner sei μ das Maß auf $(\Omega, \mathfrak{G})$, welches durch Einschränken von μ auf Mengen von $\mathfrak{G}$ entsteht. Dann ist ν absolut stetig bezüglich $P_{|\mathfrak{G}}$, d.h. es gilt

$$\nu(A) = \int_A X(\omega) P(d\omega)$$

$\Rightarrow$ Es existiert eine $\mathfrak{G}$-messbare Dichte Y mit

$$\nu(A) = \int_A Y(\omega) P_{|\mathfrak{G}}(d\omega)$$

Zur Eindeutigkeit: Seien Y und $\widetilde{Y}$ $\mathfrak{G}$-messbar mit

$$\int_A Y(\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) P(d\omega) = \int_A \widetilde{Y}(\omega) P(d\omega)$$

Dann gilt

$$\int_A (Y - \widetilde{Y})(\omega) P(d\omega) = 0 \ \forall \ A \in \mathfrak{G}$$

$\Rightarrow Y = \widetilde{Y}$ P-fast sicher, da beide $\mathfrak{G}$-messbar sind. □

Satz 3.18 (Eigenschaften der bedingten Erwartung)**.**

1. *Falls* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ *ist, gilt*
$$\mathbb{E}(X|\mathfrak{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{G})|\mathfrak{H})$$
2. *Falls* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion ist, gilt*
$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathfrak{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathfrak{G})$$

3. *Falls* $Z : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{G}$*-messbar ist, so gilt*

$$\mathbb{E}(Z \cdot X|\mathfrak{G}) = Z \cdot \mathbb{E}(X|\mathfrak{G})$$

Beweis. Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Definition der bedingten bzw. aus der Jensen'schen Ungleichung für Erwartungswerte unter konvexen Funktionen, siehe Standardliteratur zur Wahrscheinlichkeitstheorie[2]. □

3.2.2 Martingale

Definition 3.19 (Martingal)**.** Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), \mathfrak{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t)_{t\in\{1,\ldots,T\}}$ ein adaptierter Prozess. Dann heißt $X_\bullet$ *Martingal*, falls

$$X_t \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

und

$$\forall\ s \leq t : \mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s \ P\text{-fast sicher}$$

gilt.

Bemerkung 3.20.
- Ein Martingal ist die wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung eines fairen Spieles, in welchem zu jedem Zeitpunkt die künftigen Gewinne im Mittel dem aktuellen Spielwert entsprechen.
- Man, dass die bedingte Erwartung hier bzgl. dem Maß P gebildet wird. Somit sprechen wir strenggenomen von einem P-Martingal, bzw. noch genauer von einem $((\mathfrak{F}_t)_t, P)$-Martingal, wenn wir auch die Abhängigkeit von der Filtration $(\mathfrak{F}_t)_t$ herausstellen wollen.

Definition 3.21. Ein Maß Q auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ in einem Mehrperioden-Modell $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P, \overline{S})$ heißt *Martingalmaß*, falls

$$X_\bullet = \left(\frac{S}{S^0}\right)_\bullet$$

unter Q ein $(\mathfrak{F}_t)$-Martingal ist.

Bemerkung. Man beachte, dass die Definition von Martingalmaß inbsesondere die Intergrierbarkeit von $\overline{X}_t$ für alle $t \in \mathcal{T}$ einschließt, was vom intialen Maß P nicht verlangt ist.

Satz 3.22. *Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf dem filtrierten Raum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t, \mathfrak{F})$ sind äquivalent:*

1. *Q ist ein Martingalmaß*
2. *Falls $\overline{\xi}_\bullet$ eine selbstfinanzierende Strategie mit $|\xi_\bullet| \leq C < \infty$ für ein $C > 0$, so ist $V_\bullet$ unter Q ein $\mathfrak{F}_t$-Martingal.*
3. *Falls $\overline{\xi}_\bullet$ eine selbstfinanzierende Strategie mit $\mathbb{E}_Q(V_T^-) < \infty$, dann ist $V_\bullet$ unter Q ein Martingal.*

[2]Z.B. *Wahrscheinlichkeitstheorie* von A. Klenke, Springer Verlag.

4. *Falls $\overline{\xi}_\bullet$ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_T \geq 0$ Q-fast sicher ist, so gilt*

$$\mathbb{E}_Q(V_T) = V_0$$

Beweis.
$1 \Rightarrow 2$: Sei C wie in 2. Dann ist

$$\begin{aligned} |V_t| &= \left| V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1}) \right| \\ &\leq |V_0| + \sum_{k=1}^{t} C \cdot (|X_k| + |X_{k-1}|) \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_t \in L^1(\Omega, Q)$. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(V_{t+1}|\mathfrak{F}_t) &= \mathbb{E}_Q(V_{t+1} - V_t|\mathfrak{F}_t) + \mathbb{E}_Q(V_t|\mathfrak{F}_t) \\ &= \mathbb{E}_Q(\xi_{t+1}(X_{t+1} - X_t)|\mathfrak{F}_t) + V_t \\ &= \xi_{t+1} \cdot \mathbb{E}_Q(X_{t+1} - X_t|\mathfrak{F}_t) + V_t \\ &= \xi_t \cdot (\mathbb{E}_Q(X_{t+1}|\mathfrak{F}_t) - X_t) + V_t \\ &= 0 + V_t \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 3$: Wir bemerken zunächst, dass $X^- := -\min(X, 0) = \max(-X, 0)$ und die Funktion $\varphi(t) = \max(-t, 0)$ ist konvex. Behauptung: Es genügt für alle t zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(V_t^-) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}_Q(V_t|\mathfrak{F}_t) = V_{t-1} \quad (*)$$

gilt. Ist dies der Fall, so gilt für $\overline{\xi}_\bullet$ wie in 3. mit $t = T$ wegen $\mathbb{E}(V_T^-) < \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_{T-1}^-) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(V_T|\mathfrak{F}_{T-1})^-) \\ &= \mathbb{E}(\varphi(\mathbb{E}(V_T|\mathfrak{F}_{T-1}))) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi(V_T)|\mathfrak{F}_{T-1})) \\ &= \mathbb{E}(\varphi(V_T)) \\ &= \mathbb{E}(V_T^-) < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Voraussetzungen von $(*)$ sind mit $t = T - 1$ gegeben und induktiv folgt

$$\mathbb{E}(V_t|\mathfrak{F}_{t-1}) = V_{t-1} \ \forall \ t = 1, \ldots, T$$

Wir zeigen nun, dass $(*)$ gilt. Sei $\mathbb{E}(V_t^-) < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(V_t|\mathfrak{F}_{t-1}) := \mathbb{E}(V_t^+|\mathfrak{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(V_t^-|\mathfrak{F}_{t-1})$$

ist wohldefiniert als eine Zufallsvariable mit gegebenenfalls Werten inkl. ∞, die eine bedingte Erwartung für V_t ist. Sei nun $\overline{\xi}_\bullet$ wie angegeben und $a > 0$. Dann sei

$$\xi_t^{(a)} := \xi_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_t| \leq a\}}$$

Dann ist $\left(\overline{\xi_t^{(a)}}\right)_t$ ist eine selbstfinanzierende Strategie. Gemäß Voraussetzung 2 ist

$$\xi_t^{(a)}(X_t - X_{t-1}) = V_t^{(a)} - V_{t-1}^{(a)}$$

das Inkrement eines Martingals. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(V_t|\mathfrak{F}_{t-1}) \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}} &= \mathbb{E}_Q(V_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}|\mathfrak{F}_{t-1}) \\
&= \mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}(V_t - V_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) + \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}V_{t-1} \\
&= \mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) + \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}V_{t-1} \\
&= \mathbb{E}_Q(\xi_t^{(a)}(X_t - X_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) + \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}V_{t-1} \\
&= \mathbb{E}_Q(V_t^{(a)} - V_{t-1}^{(a)}|\mathfrak{F}_{t-1}) + \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}V_{t-1} \\
&= \mathbb{1}_{\{|\xi_t|\le a\}}V_{t-1}
\end{aligned}$$

Mit $a > C$ gilt

$$\mathbb{E}_Q(V_t|\mathfrak{F}_{t-1}) = V_{t-1}$$

$3 \Rightarrow 4$: $V_T \ge 0$ Q-fast sicher $\Rightarrow V_T^- = 0$ Q-fast sicher. Somit ist (V_t) ein Martingal.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_Q(V_T) = \mathbb{E}_Q(V_0) = V_0$$

$4 \Rightarrow 1$:

- Zeige $X_t^i \in L^1(\Omega, Q)$:
  Sei hierfür

  $$\xi_\bullet = (\xi_s)_{s=1,\dots,T} \in \mathbb{R}^d$$

  mit

  $$\xi_s^i = \mathbb{1}_{\{s\le t\}}\ ,\ \ \xi_s^j = 0\ \forall\ j \ne i$$

  $\xi_\bullet$ ist deterministisch und damit vorhersagbar. $\overline{\xi}_\bullet$ sei die zugehörige selbstfinanzierende Strategie zu $V_0 := X_0^i$. Dann folgt

  $$\begin{aligned}
  V_T &= V_0 + \sum_{s=1}^{T} \xi_s(X_s - X_{s-1}) \\
  &= X_0^i + \sum_{s=1}^{t}(X_s^i - X_{s-1}^i) = X_t^i \ge 0
  \end{aligned}$$

  Damit ist 4. anwendbar und es gilt

  $$X_0^i = V_0 = \mathbb{E}_Q(V_T) = \mathbb{E}_Q(V_T^i) < \infty$$

  $\Rightarrow X_t^i \in L^1(\Omega, Q)$.

- Zeige $\mathbb{E}_Q(X_t^i|\mathfrak{F}_{t-1}) = X_{t-1}^i$. Das ist äquivalent zu

$$\forall\ A \in \mathfrak{F}_{t-1} : \int_A X_t^i\ dQ = \int_A X_{t-1}^i\ dQ$$

Sei also $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$. Sei weiter

$$\eta_s^i := \mathbb{1}_{\{s<t\}} + \mathbb{1}_{A^C} + \mathbb{1}_{s=t}$$

und

$$\eta_s^j = 0\ \forall\ s\ \forall\ j \neq i$$

$\Rightarrow \eta_\bullet$ ist vorhersagbar. Sei $\overline{\eta}_\bullet$ die selbstfinanzierende Strategie mit $V_0 = X_0^i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} V_T &= V_0 + \sum_{k=1}^{t-1}(X_k^i - X_{k-1}^i) + \mathbb{1}_{A^C}(X_t^i - X_{t-1}^i) \\ &= X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{A^C}(X_t^i - X_{t-1}^i) \\ &= \mathbb{1}_A X_{t-1}^i + \mathbb{1}_{A^C} X_t^i \geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist 4. anwendbar und es folgt

$$\mathbb{E}_Q(X_t^i) = X_0^i = V_0 = \mathbb{E}(V_T) = \mathbb{E}_Q(X_{t-1}^i \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}_Q(X_t^i \mathbb{1}_{A^C})$$

$$\Rightarrow \int_A X_t^i\ dQ = \mathbb{E}_Q(X_t^i \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q(X_{t-1}^i \mathbb{1}_A) = \int_A X_{t-1}^i\ dQ$$

□

Wir notieren noch eine wichtige Beobachtung, die im Beweisschritt 1 ⇒ 2 gleich zu Beginn bewiesen wurde.

Lemma 3.23. *Falls $P \in \mathfrak{P}$ ein Martingalmaß ist, so ist für vorhersagbares beschränktes $\eta_\bullet$ der Prozess*

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k \cdot (X_k - X_{k-1}) = V_0 - (\eta \bullet X)_t$$

ebenfalls ein P-Martingal.

3.3 Der erste Fundamentalsatz im Mehrperiodenmodell

Theorem 3.24 (FTAP, Mehrperioden-Fall)**.** *Ein d-dimensionales Mehrperioden-Marktmodell $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}, P, (\overline{S}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}})$ ist genau dann arbitragefrei, wenn es mindestens ein P-äquivalentes Martingalmaß Q gibt. In diesem Fall kann Q mit beschränkter P-Dichte gewählt werden.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei Q ein P-äquivalentes Martingalmaß und $\overline{\xi}_\bullet$ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_T >^* 0$, dann gilt auch $\Rightarrow V_T >^*_Q 0$. Insbesondere gilt $V_T \geq 0$ Q-fast sicher, so dass wir Satz 3.22 anwenden können. Folglich

$$V_0 = \mathbb{E}_Q(V_T) > 0,$$

d.h. $\overline{\xi}_\bullet$ ist keine Arbitrage-Möglichkeit.

"$\Rightarrow$": Wir beweisen hier den Spezialfall für endliches Ω, d.h. $\#\Omega < \infty$. Die Beweisidee besteht im schrittweisen Zurückführen auf den Einperiodenfall.

1. Schritt: $T = 1$. Hier betrachten wir einen weiteren Spezialfall, nämlich dass das Modell ein 1-Perioden-Modell mit

$$\overline{S_0} = \overline{\Pi}\ ,\ \overline{S_1} = \overline{S}$$

ist, und $S_1^0 = (1+r)\cdot S_0^0$ mit $r > -1$. Damit ist das Mehr-Perioden-Modell genau dann im Sinne von Definition 3.12 arbitragefrei, wenn das 1-Perioden-Modell arbitragefrei im Sinne von Definition 2.4 ist. Man beachte, dass die Bedingung selbstfinanzierend zu sein für $T = 1$ leer ist.
Nach 2.12 existiert dann Q^* äquivalent zu P, sodass

$$\mathbb{E}_{Q^*}(\overline{X_1}) = \mathbb{E}_{Q^*}\left(\frac{\overline{S_1}}{1+r}\right) = \Pi = \overline{X_0}$$

d.h. $\overline{X_\bullet}$ ist ein Q^*-Martingal.

2. Schritt: Es gelte immer noch $T = 1$, aber wir machen keine einschränkenden Annahmen bzgl. S_1^0. Sei nun

$$\widetilde{\mathfrak{F}_0} := \sigma(S_1^0) \subseteq \mathfrak{F}_1$$

die von S_1^0 erzeugte σ-Algebra. Dann gilt

$$\mathfrak{F}_0 \subseteq \widetilde{\mathfrak{F}_0} \subseteq \mathfrak{F}_1$$

Da Ω endlich ist, wird $\widetilde{\mathfrak{F}_0}$ von endlich vielen Atomen $A_1^0, \ldots, A_{N_0}^0$ erzeugt. Analog wird $\mathfrak{F}_1$ ebenfalls von endlich vielen Atomen $A_1^1, \ldots, A_{N_1}^1$ mit

$$\forall\ i\ \exists\ j : A_i^1 \subseteq A_j^0$$

erzeugt. Für $i = 1, \ldots, N_0$ sei M_i das Finanzmarktmodell das durch Einschränkung auf $A_i^0 =: A_i$ entsteht:

$$M_i = (A_i, P_i, \mathfrak{F}_i, \overline{\Pi}, \overline{S}_{|A_i})$$

$$P_i := P(\cdot|A_i)\ ,\ P_i(A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A_i)}$$

$$\mathfrak{F}_i := \mathfrak{F}_1 \cap A_i$$

Dann gilt in jedem M_i

$$S_1^0 = (1+r_i)S_0^0$$

Ferner ist das Ursprungsmodell M genau dann arbitragefrei, wenn jedes der Modelle M_i arbitragefrei ist. Insbsendere folgt aus der Arbitragefreiheit von M nach Schritt 1, dass für jedes i ein zu P_i äquivalentes Maß Q_i existiert mit

$$\mathbb{E}_{Q_i}(\overline{X_1}) = \mathbb{E}_{Q_i}\left(\frac{\overline{S_1}}{1+r_i}\right) = \overline{S_0} = \overline{X_0}$$

Definiere nun Q^* auf $\mathfrak{F}_1$. Für $A_i \in \mathfrak{F}_1$ existiert $A_j \in \mathfrak{F}_0$ mit $A_i \subseteq A_j$. Dann sei

$$Q^*(A_i) = P(A_j) \cdot Q_j(A_i)$$

Q^* ist äquivalent zu P denn für $A_i^1 \in \mathfrak{F}_1, A_i^1 \subseteq A_j^0 \in \mathfrak{F}_0$, so gilt

$$0 = Q^*(A_i^1) = \underbrace{P(A_j^0)}_{\neq 0} \cdot Q_j(A_i^1) \Leftrightarrow Q_j(A_i^1) = 0 \Leftrightarrow P_j(A_i^1) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A_i^1) = P(A_j^0) \cdot P_j(A_i^1) = 0.$$

$\overline{X}$ ist zudem ein Q^*-Martingal, denn wir müssen im Fall $T = 1$ nur prüfen, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Q^*}(\overline{X_1}) &= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E}(\overline{X_1} \cdot \mathbb{1}_{A_i^0}) \\
&= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E}_{Q^*}(\overline{X_1}|A_i^0) \cdot Q^*(A_i^0) \\
&= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E}_{Q_i}(\overline{X_1}) \cdot P(A_i^0) \\
&= \sum_{i=1}^{N_0} \overline{X_0} \cdot P(A_i^0) \\
&= \overline{X_0} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_0} P(A_i^0)}_{=1}
\end{aligned}$$

3. Schritt: $T \geq 2$. Wie zuvor wird $\mathfrak{F}_t$ erzeugt durch Atome, die wir mit

$$A_1^t, \ldots, A_{N_t}^t$$

bezeichnen, und

$$\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Wegen $\mathfrak{F}_{t-1} \subset \mathfrak{F}_t$ gibt es für jedes i ein j, sodass

$$A_i^t \subseteq A_j^{t-1}$$

Dann ist M genau dann arbitragefrei, wenn sämtliche durch Einschränkung auf die Mengen A_i^t definierte Teilmodelle arbitragefrei sind. Somit finden wir in jedem dieser Modelle Martingalmaße Q_i^t. Analog zu Schritt 2 definiert man zu $A_{i_T}^T \in \mathfrak{F}_T$ mit

$$A_{i_T}^T \subseteq A_{i_{t-1}}^{t-1} \subseteq \ldots \subseteq A_{i_0}^0$$
$$Q^*(A_{i_T}^T) = P(A_{i_0}^0) \cdot Q_{i_0}^0(A_{i_1}^1) \cdot \ldots \cdot Q_{i_{t-1}}^{t-1}(A_{i_T}^T).$$

Analog zu Schritt 2 sieht man, dass hierdurch ein zu P äquivalentes Martingalmaß gegeben ist.

□

Bemerkung. Man kann den hier gegebenen Beweis leicht auf den Fall von abzählbarem Ω übertragen, wobei wir ähnlich wie im Einperioden-Fall zunächst auf ein äquivalentes Maß $\widetilde{P}$ wechseln, bezüglich welchem die Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in T}$ integrierbar sind. Einen abstrakteren Beweis für allgemeines $(\Omega, \mathfrak{F})$ findet man im Buch *Stochastic Finance* von Föllmer und Schied.

3.3.1 Martingalmaße bei Wechsel des Numeraires

Man kann sich fragen, in wie weit die bisherigen Ergebnisse von der Wahl des Numeraires zum diskontieren abhängen. Praktisch entspricht ein Numerairewechsel etwa einem Übergang von Dollar auf Euro als neue Bezugswährung, in der Werte gemessen werden. Da unsere Definition von Arbitrage in nicht-diskontierten Größen formuliert war, ist die Arbitragefreiheit eines Marktes von der Wahl eines Numeraires unabhängig. Die Menge der äquivalenten Martingalmaße hingegen nicht, wie wir weiter unten feststellen.

Angenommen: $S_\bullet^1$ ist strikt positiv für alle Zeiten $0, \ldots, T$. Sei $\overline{Y_t} := (Y_t^0, \ldots, Y_t^d)$ mit

$$Y_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^1} = (Y_t^0, 1, Y_t^2, \ldots, Y_t^d)$$

Dann gilt:

$$\overline{Y_t} = \frac{S_t^0}{S_t^1} \cdot \overline{X_t} = \frac{1}{X_t^1} \cdot \overline{X_t}$$

Satz 3.25. *Es sei $\widetilde{\mathfrak{P}}$ die Menge der zu P äquivalenten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, s.d. $\overline{Y_\bullet}$ ein Martingal ist. $\mathfrak{P}$ sei die Menge aller zu P äquivalenten Maße, s.d. $\overline{X_\bullet}$ ein Martingal ist. Dann gilt:*

$$\widetilde{\mathfrak{P}} = \left\{ \widetilde{P^*} \mid \frac{d\widetilde{P^*}}{dP^*} = \frac{X_T^1}{X_0^1} \ , \ P^* \in \mathfrak{P} \right\}$$

Beweis. Sei $P^* \in \mathfrak{P}$, d.h. $\overline{X}$ ist ein P^*-Martingal.
$\Rightarrow \left(\frac{X_t^1}{X_0^1}\right)_{t=0,\ldots,T}$ ist ein positives P^*-Martingal. Insbesondere gilt:

$$\mathbb{E}_{P^*}\left(\frac{X_T^1}{X_0^1}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_0^1}{X_0^1}\right) = 1$$

Das heißt $Z = \frac{X_T^1}{X_0^1}$ ist eine strikt positive Zufallsvariable mit $\mathbb{E}_{P^*}(Z) = 1$. Daher ist

$$d\widetilde{P^*}(\omega) = Z(\omega)P^*(d\omega)$$

ein zu P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$.
Nun ist $\overline{Y_\bullet}$ ein $\widetilde{P^*}$-Martingal zur Filtrierung $(\mathfrak{F}_t)$, denn aus Lemma 3.26 unten folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{P^*}}(\overline{Y}_t|\mathfrak{F}_s) &= \frac{1}{M_s}\mathbb{E}_{P^*}(M_t\overline{Y_t}|\mathfrak{F}_s) \\
&= \frac{X_0^1}{X_s^1} \cdot \frac{1}{X_0^1} \cdot \mathbb{E}_{P^*}(\underbrace{X_t^1 \cdot \overline{Y_t}}_{=\overline{X_t}}|\mathfrak{F}_s) \\
&= \frac{1}{X_s^1} \cdot \mathbb{E}_{P^*}(\overline{X_t}|\mathfrak{F}_s) \\
&= \frac{1}{X_s^1} \cdot \overline{X_s} \\
&= \overline{Y_s}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.26. *Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(M_t)_t$ ein strikt positives Martingal mit $\mathbb{E}(M_t) = 1$. Weiter sei*

$$Q(d\omega) = M_T(\omega)P(d\omega)$$

ein neues Maß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$. Dann gilt für eine beliebige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_Q(Z|\mathfrak{F}_t) = \frac{1}{M_t}\mathbb{E}_P(Z \cdot M_T|\mathfrak{F}_t)$$

Beweis.

1. Schritt: Falls $V : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{F}_t$-messbar ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(V) &= \mathbb{E}_P(M_T \cdot V) \\
&= \mathbb{E}_P(\mathbb{E}_P(M_T \cdot V|\mathfrak{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_P(V \cdot \mathbb{E}_P(M_T|\mathfrak{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_P(M_t \cdot V)
\end{aligned}$$

2. Schritt: Sei $A \in \mathfrak{F}_t$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(Z \cdot \mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}_P(Z \cdot \mathbb{1}_A \cdot M_T) \\
&= \mathbb{E}_P(\mathbb{E}_P(Z \cdot \mathbb{1}_A \cdot M_T|\mathfrak{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_P(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{E}_P(Z \cdot M_T|\mathfrak{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_P(M_t \cdot \underbrace{\mathbb{1}_A \cdot \frac{1}{M_t} \cdot \mathbb{E}_P(Z \cdot M_T|\mathfrak{F}_t))}_{\mathfrak{F}_t\text{-messbar}} \\
&\overset{1.}{=} \mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_A \underbrace{\frac{1}{M_t}\mathbb{E}_P(Z \cdot M_T|\mathfrak{F}_t))}_{=:Z'}
\end{aligned}$$

Es gilt also, dass Z' $\mathfrak{F}_t$-messbar ist und für alle $A \in \mathfrak{F}_t$ gilt

$$\int_A Z(\omega)Q(d\omega) = \int_A Z'(\omega)Q(d\omega)$$

$\Rightarrow Z' = \mathbb{E}_Q(Z|\mathfrak{F}_t)$.

□

3.4 Europäische Optionen im Mehrperiodenmodell

Definition 3.27. Eine nicht-negative Zufallsvariable $C : (\Omega, \mathfrak{F}) \to \mathbb{R}$ heißt *europäische Wette*, *europäischer Anspruch* oder *europäische Option*, (engl. *european contingent claim*).
C heißt *Derivat* von $\overline{S_\bullet}$, falls C messbar ist bzgl. der vom Wertpapierprozess $\overline{\Sigma}$ erzeugten Sigma-Algebra $\sigma(S_t^i; i = 0, \dots, d,\ t = 0, \dots, T)$, d.h. falls

$$C = C(S_0^0, \dots, S_0^d, S_1^0, \dots, S_1^d, \dots, S_T^0, \dots, S_T^d)$$

Bemerkung (Interpretation)**.** $C(\omega)$ entspricht dem Zahlungsanspruch zum Zeitpunkt T beim Eintreten des Marktszenarios ω, wobei ω der Zufallsparameter für das gesamte Marksznario mitsamt der vollständigen Kurshistorie von S ist. Europäische Optionen zeichnen sich (etwa im Gegensatz zu amerikanischen Optionen) dadurch aus, dass es nur einmal und an einem zuvor festgelegten Fälligkeitstermin T zu Zahlungen zwischen den Vertragsparteien kommt (abgesehen von der Kaufpreiszahlung in $t = 0$).

Beispiel (Derivate)**.**

1. Europäischer Call / europäischer Put

$$C^{call} = (S_T^i - K)_+$$

$$C^{put} = (K - S_T^i)_+$$

2. Asiatische Option (hier die Call-Variante)

$$C = \left(S_T^i - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} S_k^i \right)_+$$

3. Barrier-Option:

$$C = \begin{cases} 1 & , \max\limits_{t=0,\dots,T} S_t^i \geq K \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

4. "Down-and-in"-Put

$$C = \begin{cases} (K - S_T^i)_+ & , \min\limits_{t=0,\dots,T} S_t^i \leq k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

5. "Look-back"-Option:
$$C = S_T^i - \min_{0 \leq t \leq T} S_t^i$$

Die Grundaufgabe der Optionspeis-Theorie lautet auch hier: Wieviel Geld soll man in $t = 0$ für eine bestimmte Option C (mit Auszahlung in T) bezahlen?

Definition 3.28. Eine Wette C heißt *erreichbar* bzw. *replizierbar*, falls es eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\xi}$ gibt, s.d.

$$C = \overline{\xi_T} \cdot \overline{S_T} \quad P\text{– fast sicher.}$$

In diesem Fall heißt $\overline{\xi}$ *replizierende Strategie.*

Bemerkung 3.29. C ist genau dann replizierbar, wenn für die *diskontierte Wette*

$$H := \frac{C}{S_T^0}$$

gilt, dass
$$H = \overline{\xi_T} \cdot \overline{X_T} = V_T$$

Satz 3.30. *Jede replizierbare diskontierte Wette H ist integrierbar bzgl. eines jeden Martingalmaßes P^*, d.h.*
$$\mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty \ \forall \ P^* \in \mathfrak{P}$$
Ferner gilt für jede replizierende Strategie

$$V_t = \mathbb{E}_{P^*}(H|\mathfrak{F}_t) \ P\text{-}\textit{fast sicher} \ \forall \ t = 0, \ldots, T$$

Insbesondere ist (V_t) ein P^*-Martingal.

Beweis von Satz 3.30. Folgt aus Satz 3.22 mit Bemerkung 3.29. □

Bemerkung 3.31.

1. Für zwei replizierende Strategien $\overline{\xi}$ und $\overline{\eta}$ gilt

$$V_t^{\overline{\xi}} = \mathbb{E}_{P^*}(H|\mathfrak{F}_t) = V_t^{\overline{\eta}},$$

   d.h. der Wertprozess für ein replizierendes Portfolio ist stets derselbe unabhängig von der genauen Wahl der replizierenden Strategie.

2. Für $P, P' \in \mathfrak{P}$ und $\overline{\xi}$ replizierend gilt

$$\mathbb{E}_P(H|\mathfrak{F}_t) = V_t^{\overline{\xi}} = \mathbb{E}_{P'}(H|\mathfrak{F}_t)$$

   Für $t = 0$ gilt dann
$$V_0^{\overline{\xi}} = \mathbb{E}_P(H) = \mathbb{E}_{P'}(H)$$
   d.h. das Anfangskapital (relativ zum Numeraire S_0^0) lässt sich als Erwartungswert des diskontierten Anspruches bzgl. einem beliebigen äquivalenten Martingalmaß bestimmen.

3. Falls H replizierbar ist, gilt also

$$V_0 = \mathbb{E}_{P^*}(H),$$

d.h. der Preis einer replizierenden Strategie entspricht der mittleren diskontierten Auszahlung unter einem beliebigen äquivalenten Martingalmaß. Insbesondere würde ein anderer Preis für die Option als dieser Wert offensichtlich zu einer Arbitrage führen. Für erreichbare Ansprüche stellt also die Zahl

$$\Pi(C) = \mathbb{E}_{P^*}(H).$$

den einzigen sinnvollen Preis für die Option bei Kauf bzw. Verkauf in $t = 0$ dar. Das ist das *risikolose Bewertungsprinzip für replizierbare Ansprüche im Mehrperiodenmodell.*

3.5 Arbitragepreise und -schranken für europäische Optionen im Mehrperiodenmodell

Definition 3.32. Eine Zahl $\pi \geq 0$ heißt *Arbitrage-Preis* eines diskontierten Anspruches H, falls es einen adaptierten Prozess $X_\bullet$ mit

$$X_0 = \pi$$

$$X_T = H$$

gibt, sodass das erweiterte (diskontierte) Marktmodell

$$((\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, \mathfrak{F}, P), \widetilde{X_\bullet}) \ , \ \widetilde{X}_t = (\overline{X_t}, X_t) \in \mathbb{R}^{d+2}$$

arbitragefrei ist.

Satz 3.33. *Die Menge der Arbitrage-Preise zu einem diskontierten Anspruch H in einem arbitrage-freien Marktmodell ist ein nicht leeres Intervall und gegeben durch*

$$\Pi(H) = \{\mathbb{E}_{P^*}(H) \mid P^* \in \mathfrak{P} \ , \ \mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty\}$$

mit den oberen und unteren Schranken

$$\Pi_{\inf}(H) := \inf_{P^* \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_{P^*}(H)$$

$$\Pi_{\sup}(H) := \sup_{P^* \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_{P^*}(H).$$

Beweis. π ist genau dann ein Arbitrage-Preis von H, wenn ein P-äquivalentes Maß P^* existiert, sodass $\widetilde{X_\bullet}$ ein P^*-Martingal ist. Inbseondere ist dann $\overline{X_\bullet}$ ebenfalls ein P^*-Martingal und

$$\pi = \mathbb{E}_{P^*}(V_T) = \mathbb{E}_{P^*}(H).$$

D.h. es gilt $\Rightarrow \Pi(H) \subseteq \{\mathbb{E}_{P^*}(H) \mid P^* \in \mathfrak{P} \ , \ \mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty\}$.

Sei andererseits $P^* \in \mathfrak{P}$ mit $\pi := \mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty$. Definiere

$$X_t := \mathbb{E}_{P^*}(H|\mathfrak{F}_t), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Dann ist $X_\bullet$ ein P^*-Martingal mit

$$\pi = X_0 \ , \ H = X_T$$

denn H ist $\mathfrak{F}_T$-messbar. Insbesondere ist

$$\widetilde{X_\bullet} = (\overline{X_\bullet}, X_\bullet) \in \mathbb{R}^{d+2}$$

ein P^*-Martingal. Nach dem FTAP (Satz 3.24) ist das erweiterte Marktmodell arbitragefrei, also $\pi \in \Pi(H)$.

Somit ist die Gleichheit der beiden Mengen bewiesen. Zudem gilt $\Pi(H) \neq \emptyset$, denn sei

$$\widetilde{P}(d\omega) = \frac{\lambda}{1 + H(\omega)} P(d\omega)$$

mit

$$\lambda := \left[\mathbb{E}_P \left(\frac{1}{1+H} \right) \right]^{-1}$$

Dann ist $\widetilde{P}$ äquivalent zu P mit

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}}(H) = \lambda \cdot \mathbb{E}_P \left(\frac{H}{1+H} \right) < \infty.$$

Mit $((\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, \mathfrak{F}, P), \overline{X})$ ist auch $((\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, \mathfrak{F}, \widetilde{P}), \overline{X})$ arbitragefrei. Nach Theorem 3.24 existiert ein (zu $\widetilde{P}$ äquivalentes) $P^* \in \mathfrak{P}$ mit

$$\left| \frac{dP^*}{d\widetilde{P}} \right| (\omega) \leq K < \infty \ \widetilde{P}\text{-fast sicher}$$

für ein gewisses $K \geq 0$, somit

$$\mathbb{E}_{P^*}(H) = \int_\Omega H(\omega) \frac{dP^*}{d\widetilde{P}}(\omega) \ \widetilde{P}(d\omega) \leq K \cdot \mathbb{E}_{\widetilde{P}}(H) < \infty,$$

also gilt $\Pi(H) \neq \emptyset$. Schließlich ist $\Pi(H)$ als Bildmenge der konvexen Menge $\{P^* \in \mathfrak{P} \,|\, \mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty\}$ unter linearen Abbildung $P \to \mathbb{E}_P(H)$ ebenfalls konvex, also ein Intervall.

Zu den Schranken von $\Pi(H)$: Führen wir die Menge

$$\mathfrak{P}_0 := \{P \in P \,|\, \mathbb{E}_P(H) < \infty,$$

so lautet die Behauptung hier also, dass

$$\inf_{P \in \mathfrak{P}_0} E_P(H) = \inf_{P \in \mathfrak{P}} E_P(H)$$

und

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}_0} E_P(H) = \sup_{P \in \mathfrak{P}} E_P(H).$$

Oben wurde gezeigt, dass $\mathfrak{P}_0 \neq \emptyset$, daher ist die erste der beiden Aussagen eine Trivialität, weil man sich bei Infimumsbildung rechts auf die Menge $\mathfrak{P}_0$ beschränken kann.

Bei der zweiten Aussage müssen wir nur im Fall $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_0 \neq \emptyset$ zeigen, dass dann auch $\sup_{P \in \mathfrak{P}_0} E_P(H) = \infty$. Sei also $P^\infty \in \mathfrak{P}$ mit $\mathbb{E}_{P^\infty}(H) = \infty$. Für festes n gilt dann

$$\mathbb{E}_{P^\infty}(H \wedge n) < \infty$$

und

$$\mathbb{E}_{P^\infty}(H \wedge n) \overset{n \to \infty}{\to} \infty.$$

Erweitern wir unser Marktmodell um

$$\widehat{X}_t := \mathbb{E}_{P^\infty}(H \wedge n | \mathfrak{F}_t)$$

zu $\widetilde{X}_\bullet = (\overline{X}_\bullet, \widehat{X}_\bullet)$, so ist das Marktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, P), \widetilde{X}_\bullet)$ arbitragefrei, denn P^∞ ist hierfür ein äquivalentes Martingalmaß. Sei nun $\widetilde{P}(d\omega) = \frac{c}{1+H(\omega)} P^\infty(d\omega)$ mit $c = (\mathbb{E}_{P^\infty}(\frac{1}{1+H(\omega)}))^{-1}$, so ist $\widetilde{P}$ äquivalent zu P^∞ und es gilt $\mathbb{E}_{\widetilde{P}}(H) < \infty$. Insbesondere ist auch $((\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, \widetilde{P}), \widetilde{X}_\bullet)$ arbitragefrei, und nach dem FTAP existiert hierfür ein Martingalmaß P^* mit beschränkter Dichte gegenüber $\widetilde{P}$, d.h. mit

$$\frac{dP^*}{d\widetilde{P}} \leq C \text{ fast sicher}$$

für ein gewisses $C \geq 0$. Folglich ist

$$\pi := \mathbb{E}_{P^*}(H) = \mathbb{E}_{\widetilde{P}}(\frac{dP^*}{d\widetilde{P}} H) \leq C\mathbb{E}_{\widetilde{P}}(H) < \infty$$

und

$$\pi = \mathbb{E}_{P^*}(H) \geq \mathbb{E}_{P^*}(H \wedge n) = \widehat{X}_0 = \mathbb{E}_{P^\infty}(H \wedge n).$$

Damit ist die Menge $\Pi(H)$ unbeschränkt und es folgt die Behauptung. □

Satz 3.34. *Sei H ein diskontierter Anspruch.*

1. *Falls H replizierbar ist, gilt*
$$\Pi(H) = \{\pi\}$$
mit $\pi = V_0$ für eine beliebige replizierende Strategie $\overline{\xi}$.

2. *Falls H nicht replizierbar ist, so ist*
$$\Pi_{\text{inf}}(H) < \Pi_{\text{sup}}(H)$$
und es gilt
$$\Pi(H) = (\Pi_{inf}(H), \Pi_{\text{sup}}(H))$$

Bemerkung 3.35. 1. H ist genau dann replizierbar, wenn $\Pi(H) = \{\pi\}$ gilt. H ist nicht replizierbar, sobald es mindestens zwei verschiedene Arbitrage-Preise gibt.

2. Ein Preis p ist somit genau dann kein Arbitragepreis, falls $p < \pi \quad \forall \pi \in \Pi(H)$ oder $p > \pi \quad \forall \pi \in \Pi(H)$. Im replizierbaren Fall ist das trivial, im nicht-replizierbaren Fall ist das äquivalent zu $p \leq \Pi_{\text{inf}}(H)$ oder $p \geq \Pi_{\text{sup}}(H)$, d.h. $p \notin (\Pi_{\text{inf}}(H), \Pi_{\text{sup}}(H))$. Je nachdem ob p in der linken oder der rechten Zusammenhangskomponente von $R \setminus \Pi(H)$ liegt, erlaubt es eine Arbitrage für den Käufer oder den Verkäufer von C.

Beweis von Satz 3.34. Folgt aus Satz 3.30, Bemerkung 3.31, Satz 3.33 und die Konvexität von $\Pi(H)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\Pi(H)$ offen ist.
Sei $\pi \in \Pi(H)$ gegeben und H nicht replizierbar. Zeige: $\exists\, \pi^-, \pi^+ \in \Pi(H)$ mit

$$\pi^- < \pi < \pi^+$$

Sei $P^* \in \mathfrak{P}$ mit $\mathbb{E}_{P^*}(H) = \pi$. Sei

$$U_t := \mathbb{E}_{P^*}(H|\mathfrak{F}_t)$$

Dann gilt

$$H = U_0 + \sum_{t=1}^{T} U_t - U_{t-1}$$

Da H nicht replizierbar und $U_t - U_{t-1}$ ist $\mathfrak{F}_t$-messbar, existiert $t \in \{1, \dots, T\}$ sodass

$$U_t - U_{t-1} \notin K_t \cap L^1(P^*)$$

wobei

$$K_t := \{\eta(X_t - X_{t-1}) \mid \eta \ \mathfrak{F}_{t-1}\text{-messbar}\}$$

Nun ist $K_t \cap L^1(P^*)$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P^*)$. Da

$$U_t - U_{t-1} \notin K_t \cap L^1(P^*)$$

Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach existiert $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, P^*)$ sodass

$$\sup_{W \in K_t \cap L^1(P^*)} \mathbb{E}_{P^*}(W \cdot Z) < \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot (U_t - U_{t-1}))$$

Die Zuordnung

$$W \mapsto \mathbb{E}_{P^*}(W \cdot Z)$$

ist eine lineare Abbildung auf dem linearen Raum $K_t \cap L^1(P^*)$, die wegen

$$\mathbb{E}_{P^*}(W \cdot Z) < c < \infty$$

beschränkt ist. Damit muss sie konstant gleich 0 sein.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot (U_t - U_{t-1})) > 0$$

O.B.d.A. gelte

$$\sup_{\omega \in \Omega} |Z(\omega)| \leq \frac{1}{3}$$

Sei

$$\widehat{Z} := 1 + Z - \mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})$$

$$\Rightarrow \widehat{z} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Sei $\widehat{P}(d\omega) = \widehat{Z}(\omega)P^*(d\omega)$. Dann ist $\widehat{P}$ ein zu P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{F}_t)$ mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widehat{P}}(H) &= \mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z}H) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(H) + \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot H) - \mathbb{E}_{P^*}(H \cdot \mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(H) + \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot \mathbb{E}(H|\mathfrak{F}_t)) - \mathbb{E}_{P^*}(\mathbb{E}(H|\mathfrak{F}_{t-1}) \cdot \mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(H) + \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot U_t) - \mathbb{E}_{P^*}(U_{t-1} \cdot \mathbb{E}(Z|\mathfrak{F}_{t-1}) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(H) + \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot U_t) - \mathbb{E}_{P^*}(U_{t-1} \cdot Z) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(H) + \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot (U_t - U_{t-1})) =: \pi^+ > \pi
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen: $\widehat{P}$ ist ein Martingalmaß:
$\widehat{Z}$ ist $\mathfrak{F}_t$-messbar. Sei

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\mathfrak{F}_k$ messbar mit $k \leq t-1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}}(Y) = \mathbb{E}_{P^*}(Y \cdot \widehat{Z}) = \mathbb{E}_{P^*}(Y \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z}|\mathfrak{F}_k)}_{=1}) = \mathbb{E}_{P^*}(Y)$$

Denn es gilt

$$\mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z}|\mathfrak{F}_k) = 1 + \mathbb{E}(Z|\mathfrak{F}_k) - \mathbb{E}_{P^*}(\mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})|\mathfrak{F}_k) = 1$$

Daraus folgt für alle $k \leq t-1$

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}}(X_k|\mathfrak{F}_{k-1}) = \mathbb{E}_{P^*}(X_k|\mathfrak{F}_{k-1}) = X_{k-1}$$

Dies gilt P^*-fast sicher und damit auch $\widehat{P}$-fast sicher. Für $k = t-1$ ergibt sich weiter

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}}(X_t - X_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}) = \frac{1}{\mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z}|\mathfrak{F}_{t-1})} \cdot \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1}) \cdot \widehat{Z}|\mathfrak{F}_{t-1})$$

Es gilt

$$\mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z}|\mathfrak{F}_{t-1}) = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1}) \cdot \widehat{Z}|\mathfrak{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}_{P^*}(X_t - X_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}) + \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1}) \cdot Z|\mathfrak{F}_{t-1}) \\
&\quad - \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1})\mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) \\
&= 0 + \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1})Z|\mathfrak{F}_{t-1}) - \mathbb{E}_{P^*}(Z|\mathfrak{F}_{t-1}) \cdot \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}((X_t - X_{t-1})Z|\mathfrak{F}_{t-1}) = 0
\end{aligned}$$

denn es gilt für alle $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbaren η:

$$\mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot \eta \cdot (X_t - X_{t-1})) = 0$$

$\Rightarrow$ Mit $\eta = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathfrak{F}_{t-1}$ gilt

$$\int\limits_A Z(X_t - X_{t-1}) \, dP^* = 0 = \int\limits_A \mathbb{E}_{P^*}(Z \cdot (X_t - X_{t-1})|\mathfrak{F}_{t-1}) \, dP$$

Für $k \geq t+1$ gilt

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}}(X_k - X_{k-1}|\mathfrak{F}_{k-1}) = \frac{1}{\widehat{\widehat{Z}}} \cdot \mathbb{E}_{P^*}(X_k - X_{k-1}|\mathfrak{F}_{k-1}) = \mathbb{E}_{P^*}(X_k - X_{k-1}|\mathfrak{F}_{k-1}) = 0$$

Wir haben also gezeigt, dass $\widehat{P}$ ein zu P (da zu P^*) äquivalentes Martingalmaß ist mit

$$\mathbb{E}_{\widehat{P}}(H) = \mathbb{E}_{P^*}(\widehat{Z} \cdot H) \leq \frac{5}{3}\mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty$$

$$\Rightarrow \pi < \pi^+ = \mathbb{E}_{\widehat{P}}(H) \in \Pi(H)$$

Analog liefert

$$\widetilde{Z} = 1 - Z + \mathbb{E}(Z|\mathfrak{F}_{t-1})$$

einen Arbitrage-Preis

$$\pi^- := \mathbb{E}_{\widetilde{P}}(H) \in \Pi(H)$$

mit $\pi^- < \pi$. □

3.6 Vollständigkeit und zweiter Fundamentalsatz im Mehrperiodenfall

Definition 3.36. Ein arbitragefreies Marktmodell heißt *vollständig*, falls jeder Anspruch C replizierbar ist.

Bemerkung. Die Replizierbarkeit von C ist äquivalent zur Replizierbarkeit von

$$H = \frac{C}{S_T^0}$$

Satz 3.37 (FTAP II, Mehrperioden-Modell)**.** *Ein d-dimensionales arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt.*

$$\mathfrak{P} = \{P^*\}$$

In diesem Fall ist die Anzahl der Atome zu $(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ höchstens

$$(d+1)^T$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei das Marktmodell vollständig. Dann sind alle $\mathfrak{F}_T$-messbaren

$$H : \Omega \to \mathbb{R}$$

replizierbar (es gilt die Konvention $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}$). Sei

$$H = \mathbb{1}_A \ , \ A \in \mathfrak{F}_T$$

Dann existiert eine selbstfinanzierende Portfoliostrategie für H mit Anfangswert

$$V_0 = \mathbb{E}_{P^*}(H) = P^*(A)$$

Da V_0 nach Bemerkung 3.31 unabhängig von der genauen Wahl von $P^* \in \mathfrak{P}$ ist, ist $P^*(A)$ schon eindeutig definiert. Da A beliebig ist, kann es nur ein Maß $P^* \in \mathfrak{P}$ geben.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathfrak{P} = \{P^*\}$. Nach Satz 3.34 ist H genau dann erreichbar, wenn

$$\Pi(H) = \{\pi\}$$

Sei nun ein beliebiges H gegeben. Dann gilt

$$\emptyset \neq \Pi(H) = \{\mathbb{E}_{P^*}(H) \mid P^* \in \mathfrak{P}, \mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty\}$$

$\Rightarrow P^*$ muss schon $\mathbb{E}_{P^*}(H) < \infty$ erfüllen. Dann folgt

$$\Pi(H) = \{\mathbb{E}_{P^*}(H)\} = \{\pi\}$$

$\Rightarrow H$ ist erreichbar.

Die obere Schanke für die Zahl von Atomen kann man durch vollständige Induktion. Im Fall $T = 1$ haben wir für jedes integrierbare H eine Darstellung

$$H = V_0 + \eta_1 \cdot (X_1 - X_0)$$

Dabei sind V_0 und η_1 deterministische Größen und X_1 bzw. X_0 sind Vektoren von d Zufallsgrößen, d.h. $\dim(L^1(\Omega, \mathfrak{F})) \leq (d+1)$. Für den Induktionsschritt von $T-1$ auf T schränkt man zunächst auf die gemäß Induktionsannahme maximal $(d+1)^{T-1}$ Atome von $\mathfrak{F}_{T-1}$ ein, die gemäß dem obigen Argument für $T = 1$ jeweils in maximal $(d+1)$ Atome von $\mathfrak{F}_T$ aufspalten. □

Wir notieren noch die *Vorhersagbare Integraldarstellung* für beliebige nichtnegative Zufallsvariablen als eine wichtige Konsequenz der Vollständigkeit.

Satz 3.38. *In einem vollständigen Model gibt es für jedes $\mathfrak{F}_T$ messbare Zufallsgröße $H \geq 0$ einen vorhersagbaren Process $\xi_\bullet$, so dass*

$$H = \mathbb{E}_{P^*}(H) + \sum_{k=1}^{T} \eta_k (X_k - X_{k-1}).$$

Beweis. Aufgefasst als Option ist H erreichbar, d.h. es existiert eine selbstfinanzierende Portfoliostrategie $\eta_\bullet$, so dass

$$H = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \eta_k (X_k - X_{k-1}) = V_0 + (\xi \bullet X)_T$$

Unter dem Martingalmaß P^* ist der Prozess $(\xi \bullet X)_\bullet$ ein Martingal mit $(\xi \bullet X)_0 = 0$, also folgt aus der obigen Identität nach Erwartungsbildung unter P^*, dass $\mathbb{E}_{P^*}(H) = V_T$. □

Bemerkung. Durch eine Zerlegung in Positiv- und Negativanteil kann diese Aussage leicht auf integrierbare Zufallsvariablen ausgedehnt werden.

4 Das Binomialmodell

Das Binomial- oder Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist ein Spezialfall des Mehrperiodenmodells, in dem jedes Atom aus $\mathfrak{F}_t$, $t \in 0, \ldots, T-1$ stets in genau zwei Atome aus $\mathfrak{F}_t$ aufspaltet. Graphisch entspricht das einer Baumstruktur für die Möglichkeiten aller Entwicklungen des Finanzmarktes. Im Binomialmodell sind grundsätzlich alle Größen entweder explizit oder wenigstens rekursiv in endlicher Zeit bestimmbar. Daher ist es bei Praktikern besonders beliebt.

Es seien $d = 1$, $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > -1$. Weiter seien

$$S_t^1 = S_t$$

und

$$R_t := \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \in \{a, b\}$$

mit $-1 < a < b$.

$$\Omega := \{1, 0\}^T = \{\omega = (Y_1, \ldots, Y_T) \mid Y_t \in \{0, 1\}\}$$

Dann gilt

$$R_t(\omega) = \begin{cases} a & , y_t = 0 \\ b & , y_t = 1 \end{cases}$$

Weiter sei

$$S_t := S_0 \cdot \prod_{k=1}^{t} (1 + R_k)$$

dabei sei S_0 ein konstanter Anfangskurs. Dann gilt

$$X_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_0 \cdot \prod_{k=1}^{t} \left(\frac{1 + R_k}{1 + r} \right)$$

Wir betrachten die Filtration

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_t &:= \sigma(S_0, \ldots, S_t) \\ &= \sigma(X_0, \ldots, X_t) \\ &= \sigma(R_1, \ldots, R_t) \\ &= \sigma(Y_1, \ldots, Y_t) \end{aligned}$$

Satz 4.1. *Das CRR-Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $a < r < b$ gilt. In diesem Fall ist das Modell vollständig und es gilt $\mathfrak{P} = \{P^*\}$. P^* ist dadurch bestimmt, dass unter P^* $\{R_1, \ldots, R_T\}$ unabhängige Zufallsgrößen sind mit $R_i \in \{a, b\}$ und*

$$P^*(R_i = b) = \frac{r - a}{b - a} \ \forall\ i = 1, \ldots, T$$

Beweis. Angenommen Q sei ein Martingalmaß.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(X_{t+1}|\mathfrak{F}_t) &= X_t \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_{t+1}}{(1+r)^{t+1}}|\mathfrak{F}_t\right) &= \frac{S_t}{(1+r)^t} \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}_Q((1+R_t)S_t|\mathfrak{F}_t) &= (1+r)\cdot S_t \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}_Q(1+R_t|\mathfrak{F}_t) &= 1+r \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}_Q(R_t|\mathfrak{F}_t) &= r \\
\Leftrightarrow b\cdot Q(R_t=b)+a\cdot Q(R_t=a) &= r \qquad |Q(R_t=a)=1-Q(R_t=b) \\
\Leftrightarrow Q(R_t=b) &= \frac{r-a}{b-a}
\end{aligned}$$

Da Q ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ist dies nur möglich, wenn $Q(R_t = b) \in (0,1)$, also wenn

$$r \in (a,b)$$

gilt. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit

$$Q(R_t = b)$$

unabhängig von t. Damit sind $\{R_1,\dots,R_t\}$ insbesondere stochastisch unabhängig unter Q. Auch ist Q eindeutig dadurch bestimmt. □

Bemerkung. Das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß im CRR-Modell ist also identisch mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß des wiederholten (unabhängigen) Münzwurfs mit Erfolgsparameter

$$p = \frac{r-a}{b-a}$$

Bemerkung. Wette: $C:\Omega\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathfrak{F}$-messbar mit $\mathfrak{F}_T=\mathfrak{F}$ und

$$C(\omega)=\kappa(S_0,\dots,S_T)$$

bzw.

$$H=\frac{C}{(1+r)^T}\ ,\ H(\omega)=h(S_0,S_1(\omega),\dots,S_T(\omega))$$

4.1 Explizite Berechnungen im CRR Modell

Satz 4.2. *Der Wertprozess $V_t := \mathbb{E}_Q(H|\mathfrak{F}_t)$, $t=0,\dots,T$ einer replizierenden Strategie im CRR-Modell hat die Darstellung*

$$V_t(\omega)=v_t(S_0,S_1(\omega),\dots,S_t(\omega))$$

mit

$$v_t := \mathbb{R}^{t+1}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$$

und

$$v_t(x_0,\dots,x_t)=\mathbb{E}_Q\left(h\left(x_0,\dots,x_t,x_t\cdot\frac{S_1}{S_0},\dots,x_t\cdot\frac{S_{T-t}}{S_0}\right)\right)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}(H|\mathfrak{F}_t) \\ &= \mathbb{E}_Q(h(S_0,\dots,S_T)|\mathfrak{F}_t) \\ &= \mathbb{E}_Q\left(h\left(S_0,\dots,S_t,S_t\cdot\frac{S_{t+1}}{S_t},\dots,S_t\cdot\frac{S_T}{S_t}\right)\right) \end{aligned}$$

Unter Q hängen

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} = 1 + R_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{S_T}{S_t} = \prod_{i=t+1}^{T}(1+R_i)$$

von $\{R_i \mid i = t_1,\dots,T\}$ ab. Andererseits hängen $(S_0,\dots,S_t)$ nur von $\{R_1,\dots,R_t\}$ ab. Daher sind die beiden Anteile

$$\{S_0,\dots,S_t\}$$

und

$$\left\{\frac{S_{t+1}}{S_t},\dots,\frac{S_T}{S_t}\right\}$$

unabhängig. Ferner ist $\left(\frac{S_{t+1}}{S_t},\dots,\frac{S_T}{S_t}\right)$ unter Q wie $(S_1,\dots,S_{T_t})$ verteilt, da die einzelnen Komponenten jeweils durch Produkte von Termen $(1+R_i)$ entstehen. Damit und mit Lemma 4.3 (s. unten) lässt sich die obige Gleichung weiterführen:

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_Q(h(S_0,\dots,S_t,S_t\cdot\widehat{S}_1,\dots,S_t\cdot\widehat{S}_{T-t})|\mathfrak{F}_t) \\ &= v(S_0,\dots,S_t) \end{aligned}$$

mit

$$v(x_0,\dots,x_t) = \mathbb{E}_Q(h(x_0,\dots,x_t\cdot\widehat{S}_1,\dots,\widehat{S}_{T-t}))$$

$\square$

Bemerkung.

1. V_t hängt (natürlicher Weise) nur von den bis zum Zeitpunkt t beobachtbaren Kursen $S_0,\dots,S_t$ ab.

2. Die zugehörige Funktion v_t ist durch Erwartungsbildung explizit berechenbar.

3. Insbesondere ist v_t aus v_{t+1} rekursiv bestimmbar wie folgt:

$$v_T = h$$

d.h.

$$v_T(S_0,\dots,S_T) = h(S_0,\dots,S_T) = H$$

Für $t < T$ gilt

$$\begin{aligned}
v_t(S_0,\dots,S_t) &= \mathbb{E}_{P^*}(H|\mathfrak{F}_t)\\
&= \mathbb{E}_{P^*}(\mathbb{E}(H|\mathfrak{F}_{t+1})|\mathfrak{F}_t)\\
&= \mathbb{E}_{P^*}(v_{t+1}(S_0,\dots,S_{t+1}|\mathfrak{F}_{t+1})\\
&= \mathbb{E}_{P^*}\left(v_{t+1}\left(S_0,\dots,S_t,S_t\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)|\mathfrak{F}_t\right)\\
&= p^*\cdot v_{t+1}(S_0,\dots,S_t,S_t\cdot(1+b)) + (1-p^*)\cdot v_{t+1}(S_0,\dots,S_t,S_t\cdot(1+a))
\end{aligned}$$

4. V_t entspricht dem Wert (in Einheiten des Numeraires S_t^0) zum Zeitpunkt t eines replizierenden selbstfinanzierenden Portfolios. Dies ist gleich dem Preis zum Zeitpunkt t für den Anspruch H (mit versprochener Auszahlung in T).
   Das bedeutet, dass der Wertprozess $(V_t)_{t=0,\dots,T}$ eines selbstfinanzierenden replizierenden Portfolios identisch ist mit dem Preisprozess $(\Pi_t)_{t=0,\dots,T}$ des Anspruchs H.

   Insbesondere: Der aktuelle Preis $\Pi_t = \Pi_t^H$ des Anspruchs H hängt von der bisherigen Entwicklung $(S_0,\dots,S_t)$ des Aktienkurses ab. Somit ist Π_t ein zufälliger Prozess.

Lemma 4.3. *Falls $h(X,Y) = Z$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar ist und falls X und Y unabhängige Zufallsvariablen unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q sind, so gilt*

$$\mathbb{E}(h(X,Y)|\sigma(X)) = g(X)$$

mit

$$g(x) = \mathbb{E}(h(x,Y)))$$

Beweis. O.B.d.A. sei $h(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\cdot\mathbb{1}_B(y)$ für $A,B \subseteq R$. Dann gilt

$$g(x) = \mathbb{E}(h(x,Y)) = \mathbb{1}_A(x)\cdot\mathbb{P}(Y\in B)$$

$\Rightarrow g(X) = \mathbb{1}_A(X)\cdot\mathbb{P}(Y\in B)$. Damit gilt für alle $\{X\in C\}\in\sigma(X)$:

$$\int\limits_{\{X\in C\}} h(X,Y)\ P(d\omega) = \int\limits_{\{X\in C\}} g(X)\ P(d\omega)$$

□

Beispiele.

1. $H = h(S_T)$. Behauptung: $V_t(\omega) = V_t(S_t(\omega))$, d.h. der Preis hängt nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab.

$$\begin{aligned}
V_t(x_t) &= \sum_{k=0}^{T-t}\binom{T-t}{k}(p^*)^k\cdot(1-p^*)^{T-t-k}\cdot h\left(x_t\cdot(1+b)^k\cdot(1+a)^{T-t-k}\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(h\left(S_t\cdot\frac{S_T}{S_t}\right)|\mathfrak{F}_t\right)
\end{aligned}$$

Insbesondere für $t = 0$:

$$V_0 = \pi = \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} (p^*)^k \cdot (1-p^*)^{T-k} \cdot h\left(S_0 \cdot (1+b)^k \cdot (1+a)^{T-k}\right)$$

Bemerke: Der Wert von H zum Zeitpunkt t hängt allein von S_t (und nicht von $S_0, \dots, S_{t-1}$) ab. Der aktuelle Kurs S_t geht aber auf nicht-triviale Weise in die Bestimmung des Preises Π_t von H ein.

2. Sei $M_t := \sup\limits_{0 \le s \le t} S_s$ (das laufende Maximum).

$$H = h(M_T, S_T)$$

(z.B. *Up-and-In-Anspruch*)

$$\Rightarrow V_t = v_t(S_t, M_t)$$

mit

$$v_t(x, m) = \mathbb{E}_Q\left(h\left(x \cdot \frac{S_{T-t}}{S_0}, \max\left(m, x \cdot \frac{M_{T-t}}{S_0}\right)\right)\right)$$

denn:

$$M_T = \max\left(M_t, S_t \cdot \max_{t \le n \le T} \frac{S_n}{S_t}\right)$$

Mit Satz 4.2 gilt

$$\begin{aligned}
V_T &= \mathbb{E}_Q(h(S_T, M_T)|\mathfrak{F}_t) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(h\left(S_t \cdot \frac{S_T}{S_t}, \max\left(M_t, S_t \cdot \max_{t \le n \le T} \frac{S_n}{S_t}\right)\right) |\mathfrak{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(h\left(S_t \cdot \frac{\widehat{S}_{T-t}}{\widehat{S}_0}, \max\left(M_t, S_t \cdot \max_{1 \le n \le T-t} \frac{\widehat{S_n}}{\widehat{S}_0}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

mit i.i.d. Kopien $\widehat{S}_0, \dots, \widehat{S_T}$ von $S_0, \dots, S_T$.

3. $H = h\left(\frac{1}{T+1} \sum\limits_{i=0}^{T} S_i, S_T\right)$, $A_t := \sum\limits_{i=0}^{t} S_i$. Dann folgt mit Satz 4.2

$$V_t = v_t(A_t, S_t)$$

Beweis: Übung.

Satz 4.4. *In dem CRR-Modell ist die selbstfinanzierende Portfoliostrategie*

$$\overline{\xi_t} = (\xi_t^0, \overline{\xi}) \in \mathbb{R}^2$$

definiert durch

$$\xi(\omega) = \Delta_t(S_0, \dots, S_{t-1})$$

mit

$$\Delta_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = (1+r)^t \left[\frac{v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} \cdot (1+b)) - v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} \cdot (1+a))}{x_{t-1}(1+b) - x_{t-1}(1+a)}\right]$$

Bemerkung (Interpretation).

$$\Delta_t \mathrel{\widehat{=}} (1+r)^t \cdot \frac{\text{"}\Delta V_t\text{"}}{\text{"}\Delta S_t\text{"}}$$

d.h. es handelt sich um den verzinsten Quotienten aus Preisschwankung der Option und Preisschwankung des Kurses beim Übergang von $t-1$ zu t. Im formalen infinitesimalen Grenzübergang ergibt sich

$$\Delta_t \sim \frac{\partial V_t(S_0, \dots, S_t)}{\partial S_t}$$

Die Strategie heißt *Delta-Hedging-Strategie.*

Beweis von Satz 4.4. $\overline{\xi}$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$\forall\ \omega \in \Omega : \xi_t(X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)) = V_t(\omega) - V_{t-1}(\omega)$$

mit

$$X_t = \frac{S_t}{S_t^0} = \frac{S_t}{(1+r)^t}$$

Es gilt

$$X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega) = X_{t-1}(\omega) \cdot \begin{cases} 1+b & \text{, falls } \omega_t = 1 \\ 1+a & \text{, falls } \omega_t = 0 \end{cases}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} V_t(\omega) &= v_t(S_0(\omega), \dots, S_{t-1}(\omega), S_t(\omega)) \\ &= \begin{cases} v_t(S_0(\omega), \dots, S_{t-1}(\omega), S_{t-1}(\omega) \cdot (1+b)) & \text{, falls } \omega_t = 1 \\ v_t(S_0(\omega), \dots, S_{t-1}(\omega), S_{t-1}(\omega) \cdot (1+a)) & \text{, falls } \omega_t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\xi_t(S_0, \dots, S_{t-1}) \cdot X_{t-1}(\omega) \left[\frac{1+b}{1+r} - 1\right] = v_t(S_0, \dots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+b)) - v_{t-1}(S_0, \dots, S_{t-1})$$

und

$$\xi_t(S_0, \dots, S_{t-1}) \cdot X_{t-1}(\omega) \left[\frac{1+a}{1+r} - 1\right] = v_t(S_0, \dots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+a)) - v_{t-1}(S_0, \dots, S_{t-1})$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\xi_t(S_0, \dots, S_{t-1}) \cdot X_{t-1}(\omega) \cdot \left[\frac{b-a}{1+r}\right] = \Delta v_t$$

$$\Rightarrow \xi_t(S_0, \dots, S_{t-1}) = (1+r) \cdot \frac{\Delta v_t}{(b-a)X_{t-1}} = (1+r)^t \cdot \frac{\Delta v_t}{(b-a)S_{t-1}}$$

□

Bemerkung (Praktische Bedeutung). Unter der Annahme, dass mit geeigneten Parametern

$$-1 < a < r < b$$

das CRR-Modell eine zulässige Approximation einer realen Finanzmarktes (mit einer Aktie) darstellt, lassen sich alle relevanten Größen explizit oder zumindest numerisch leicht bestimmen.

4.2 Konvergenz gegen die Black-Scholes-Formel

Das Black-Scholes Modell ist das Basisobjekt der Finanzmathematik in stetiger Zeitparametrisierung. Die mathematische Grundlage hierfür ist das Ito-Integral für stochastische Prozesse, das im Rahmen der stochastischen Analysis eingeführt wird. Das Black-Scholes-Modell liefert schließlich explizite Formeln für die Preise und Hedging-Strategien im Fall simpler Optionen wie Put und Call. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass man diese Formeln auch durch Grenzübergang aus einer Familie von geeignet skalierten CRR-Modellen erhalten kann. Im Kern basiert diese Aussage auf der folgenden Variante des zentralen Grenzwertsatzes.

Satz 4.5. *Für $N \in \mathbb{N}$ sei $Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k^N$ eine Summe von identisch unabhängig verteilten Zufallsvariablen $Y_1^N, \dots, Y_N^N$ und*

$$\exists\ K_N : |Y_k^N| \leq K_N \ \forall\ k = 1, \dots, N\ ,\ K_N \to 0$$

Ferner gelte

$$\mu_N := \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[Y_k^N] \to \mu$$

und

$$\sigma_N^2 := Var(Z_N) = \sum_{k=1}^{N} Var(Y_k^N) \to \sigma^2$$

Dann konvergiert Z_N schwach gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable

$$Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Beweis. Die schwache Konvergenz $Z_N \to Z$ schwach ist äquivalent zur punktweisen Konvergenz der zugehörigen Laplace-Transformationen, d.h. wenn

$$\Lambda_N(t) := \mathbb{E}\left[e^{tZ_N}\right] \to \mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] =: \Lambda(t)\ \forall\ t > 0.$$

Nun gilt

$$\Lambda_N(t) = \mathbb{E}\left[e^{t \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} Y_i^N}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{N} e^{t \cdot Y_i^N}\right] = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[e^{t \cdot Y_i^N}\right] = (\lambda_N(t))^N$$

mit

$$\lambda_N(t) = \mathbb{E}\left[e^{t \cdot Y_1^N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (Y_1^N)^k}{k!}\right] = 1 + t \cdot \mathbb{E}[Y_1^N] + \frac{t^2}{2} \cdot \mathbb{E}\left[(Y_1^N)^2\right] + \dots$$

Weiter gilt

$$\mathbb{E}[Y_1^N]] = \frac{1}{N}\mathbb{E}[Z_N] = \frac{\mu_N}{N}$$

$$\mathbb{E}\left[(Y_1^N)^2\right] = Var(Y_1^N) + \left(\mathbb{E}[Y_1^N]\right)^2 = \frac{\sigma_N^2}{N} + \left(\frac{\mu_N}{N}\right)^2 = \frac{\sigma_N^2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Analog finden wir

$$\left|\mathbb{E}\left[(Y_1^N)^k\right]\right| \leq (K_N)^{k-2}\frac{2\sigma_N^2}{N}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_N(t) = 1 + \frac{t\cdot\mu_N + \frac{t^2}{2}\sigma_N^2}{N} + \underbrace{O\left(\frac{1}{N^2}\right) + O\left(K_N^3\left(\frac{\sigma_N}{N}\right)^3\right)}_{=:r_N=\frac{\rho_N}{N}}$$

$$\Rightarrow [\lambda_N(t)]^N = \left(1 + \frac{t\cdot\mu_N + \frac{t^2}{2}\sigma_N^2 + \rho_N}{N}\right)^N$$

Mit $\rho_N \to 0$, $\mu_N \to \mu$, $\sigma_N \to \sigma$ ergibt sich schließlich

$$[\lambda_N(t)]^N \to e^{t\cdot\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2} = \mathbb{E}\left[e^{tZ}\right]$$

für $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. □

Für die Anwendung auf eine Folge von CRR-Modellen sei nun $T > 0$ gegeben und zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\Delta_n := \frac{T}{n}$ eine Zeitschrittweite zu Diskretisierung das Zeitintervalls $[0, T]$ in n gleichlange Teilstücke.

Zu $n \in \mathbb{N}$ fix betrachten wir nun ein CRR Modell mit $r = r_n := e^r \cdot \Delta_n$ auf den Zeitpunkten $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n = \{0, \ldots, n\}$ mit

$$\frac{S_i^{(n)}}{S_{i-1}^{(n)}} = 1 + R_i^{(n)} = \begin{cases} e^{r\cdot\Delta_n+\sigma\cdot\sqrt{\Delta_n}} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ e^{r\cdot\Delta_n-\sigma\cdot\sqrt{\Delta_n}} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei $\sigma > 0$ ein fester Parameter ("Volatilität") und S_0 ein gegebener Anfangspreis ist.

$$S_n^{(n)} := S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + R_i^{(n)})$$

Somit ist logarithmische Rendite

$$Z_i^{(n)} := \ln\frac{S_i^n}{S_{i-1}^n} = \ln(1 + R_i^{(n)}).$$

Wie gesehen entsteht bei dieser Parameterwahl, d.h. bei

$$a = a_n = \exp(r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}) - 1$$

$$b = b_n = \exp(r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}) - 1$$

das Martingalmaß für jedes dieser zu $n \in \mathbb{N}$ gegebenen CRR-Modelle durch Wahl von

$$q_n = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}$$

als Wahrscheinlichkeit für einen Sprung nach oben bzw. $1 - q_n$ als Wahrscheinlichkeit für den Sprung nach unten. Die Folge der zugehörigen Martingalmaße auf $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ sei mit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Lemma 4.6. *Es gilt:*

$$q_n = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\Delta_n} + O(\Delta_n)$$

Beweis. Das ergibt sich aus einer einfachen Taylor-Entwicklung von q_n nach Δ_n □

Lemma 4.7. *Unter dem Maß $Q = Q_n$ gilt*

$$\mathbb{E}_Q(Z_i^{(n)}) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta_n + O\left(\Delta_n^{3/2}\right)$$

$$Var_Q(Z_i^{(n)}) = \sigma^2\Delta_n + O\left(\Delta^{3/2}\right)$$

Beweis. Nachrechnen und Taylor-Entwicklung. □

Satz 4.8. *Für $n \to \infty$ konvergieren die Zufallsvariablen $\ln S_n^{(n)}$ unter Q_n schwach gegen eine Normalverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Erwartungswert $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln S_0$ und Varianz $\sigma^2 T$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem vorausgegangenen beiden Lemmata zusammen mit dem Zentralen Grenzwertsatz in der Variante von Satz 4.5. □

Bemerkung 4.9. Analog hätten wir auch nach der Konvergenz der Größen $S_n^{(n)}$ unter der Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten für Sprung nach oben bzw. unten in der Folge von CRR-Modellen fragen können. Es bezeichne $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die entsprechende Folge von Maßen auf $\Omega_n = \{0,1\}^n$, dann hätten wir in diesem Falle

$$\mathbb{E}(Z_i^{(n)}) = r \cdot \Delta_n,$$
$$Var(Z_i^{(n)}) = \sigma^2 \cdot \Delta_n.$$

und

$$\mathbb{E}(Z_i^{(n)}) = \ln S_0 + r \cdot T$$
$$Var(Z_i^{(n)}) = \sigma^2 T$$

Aus Satz 4.5 folgt dann, dass die Folge der Zufallsvariablen $\ln S_n^{(n)}$ unter P_n schwach gegen eine $N(\ln S_0 + r\cdot T, \sigma^2 \cdot T)$-verteilte Zufallsvariable konvergieren ("Konvergenz unter dem empirischen Maß"). Die Bedeutung des der Parameter r und hierbei besonders ersichtlich. Der Parameter r ist die mittlere Rendite bei zeitkontinuierlicher (d.h. expontieller) Verzinsung. Der Paraemeter σ ist die Streuung für die logarithmische Rendite.

Die Black-Scholes Formel gibt den Preis einer europäischen Call-Option an. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Preis der Option $(S_n^{(n)} - K)^+$ im skalierten CRR-Modell gleich

$$V_0^{(n)} = e^{-rT} \cdot \mathbb{E}_Q[(S_T^n - K)_+]$$

Das Auszahlungsprofil von $C = C(S) = (S - K)_+$ ist als Funktion aber unbeschränkt im Aktienwert S_T, so dass wir nicht direkt von der schwachen Konvergenz von $S_n^{(n)}$ auf die Konvergenz der zugehörigen Erwartungswerte schließen können. Die Lücke schließt das folgende kleine Lemma.

Lemma 4.10. *Für $n \to \infty$ gilt*

$$V_0^{(n)} \longrightarrow e^{-rT}\mathbb{E}[(e^{Z_T} - K)^+]$$

wobei

$$Z_T \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln S_0; \sigma^2 T\right)$$

Beweis. Es gilt $S - K = (S-K)_+ - (K-S)_+$, wobei der zweite Ausdruck $(K-S)_+ = (K - e^{\ln S})_+$ eine beschränkte stetige Funktion in $\ln S$ ist, d.h. mit Satz 4.8 erhalten wir, dass

$$\mathbb{E}_{Q_N}((K - S_n^{(n)})_+) \longrightarrow \mathbb{E}[(e^{Z_T} - K)_+]$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}_{Q_N}(S_n^{(n)}) = S_0 = \mathbb{E}(e^{Z_T}),$$

falls $Z \sim N(r - \frac{\sigma^2}{2}T + \ln S_0; \sigma^2 T)$ (nachrechnen!). Daraus folgt die Behauptung. □

Theorem 4.11 (Black-Scholes-Formel)**.** *Gegeben sei eine Folge der CRR-Modelle mit*

$$u_n = e^{r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}}\ ,\ d_n = e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}}\ ,\ \Delta_n := \frac{T}{n}$$

und eine feste Zinsrate $r > 0$. Dann konvergiert der Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis K und Fälligkeit T für $n \to \infty$ gegen

$$C_0 = S_0 \cdot \Phi(d_+) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_-)$$

mit

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T}$$

Insbesondere ist dann

$$\lim_{N\to\infty} V_0^{(N)} =: V_0 = v(S_0, T)$$

Φ sei hier die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

Beweis. Nach vorigem Lemma wissen wir

$$V_0 = e^{-rT} \cdot \mathbb{E}[f(e^{Z_T})]$$

mit $Z_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma^2 T\right)$ und $f(u) = (u-K)_+$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow V_0 &= e^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot u + \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K \right)_+ e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= e^{-rT} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{\infty} \left(e^{\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot u + \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K \right) e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= S_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \sigma\sqrt{T}\cdot u - \frac{\sigma^2}{2}T}\, du - e^{-rT} \cdot K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-}^{\infty} e^{-\frac{(u-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\, d_u - e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi(d_-) \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\underbrace{(d_- + \sigma\sqrt{T})}_{=d_+}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du - e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi(d_-) \\
&= S_0 \cdot \Phi(d_+) - e^{-rT} \cdot K \cdot \Phi(d_-)
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung.

1. Die Formel für den Preis einer europäischen Call-Option im Limes heißt *Black-Scholes-Formel*. Für ihre Findung (und die zugrundeliegende Theorie, die wir hier nicht behandelt haben) wurde der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1997 vergeben.

2. Analog kann man durch Übergang aus CRR-Modellen Wetten/Derivate der einfachen Form
$$C = f(S_T)$$
mit z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, s.d. für ein $p > 1$
$$\sup_N \mathbb{E}\left(\left| f\left(S_N^{(N)}\right)\right|^p\right) < \infty$$
behandeln. Dann gilt nämlich
$$\lim_{N\to\infty} V_0^{(N)} =: V_0 = e^{-rT} \cdot \mathbb{E}\left[f\left(e^{Z_T}\right)\right]$$
Im Allgemeinen liefert dies keine kompakte Formel wie die Black-Scholes-Formel für beliebige Auszahlungsfunktionen f.

3. Bedeutung der Parameter: Die Parameter des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Modells sind Insgesamt sind (r, T, S_0, σ), deren Interpretation in Bemerkung 4.9 besprochen wurde.

4. Es ist auch ein simultaner Grenzübergang möglich

$$S^{(N)}_{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor N} \overset{N\to\infty}{\to} S_t \ , \ t \in [0,T]$$

mit der Lösung $(S_t)_{t\in[0,T]}$ der "stochastischen Differentialgleichung"

$$\begin{cases} dS_t &= r \cdot S_t \ dt + \sigma \cdot S_t \ dB_t \\ S_0 &= S(0) \end{cases}$$

mit der Standard-Brown'schen Bewegung $t \mapsto B_t$. Dies ist das eigentliche *Black-Scholes-Finanzmarktmodell.*

5. $\Delta(x,t) := \frac{\partial}{\partial x} v(x,T)$ heißt *Delta.* Es entspricht der Preisschwankung der Option, die durch Preisschwankungen der unterlegten Aktie hervorgerufen werden.
Im Black-Scholes-Modell entspricht Delta genau der Anzahl der S-Papiere in einem replizierenden (zeitkontinuierlichen) selbstfinanzierenden Portfolio. Dies führt auf diie Strategie des *Delta Hedging*, welches ein ad-hoc (bzw. im Black-Scholes-Modell exaktes) Verfahren für die Vermeidung/Reduzierung von Ungewissheit/Risiko.

6. $\Gamma(x,t) := \frac{\partial}{\partial x}\Delta(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)$ heißt *Gamma.* Es misst die Größe der Veränderung im Hedging-Portfolio, hervorgerufen durch Schwankungen im unterlegten Wertpapier S. Gamma ist genau dann groß, wenn bei kleinen Kursänderungen von S viel Umschichtung im selbstfinanzierenden Portfolio passiert.

   Ähnliche Größen:
   $\rho(x,t) = \frac{\partial}{\partial r} v(x,t)$ heißt *Rho.*
   $\mathfrak{v}(x,t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} v(x,t)$ heißt *Vega.*
   $\Theta(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x,t)$ heißt *Theta.*

   Zusammen heißen $(\Delta, \Gamma, \rho, \mathfrak{v}, \Theta)$ heißen *Greeks* (*Griechen*) und werden für die dynamische Neubewertung (im Sinne einer Taylor-Approximation) von Optionspreisen in Folge von Marktänderungen häufig in der Praxis benutzt .

5 Arbitrage-Bewertung von Amerikanischen Optionen

Bei sogenannten amerikanischen Optionen hat der Käufer das Recht, zu beliebigen Zeitunkten $t \in \{0,\dots,T\}$ die Auszahlung eines Betrages auszulösen. Der Auszahlungsbetrag wird dabei nach bei Vertragsbeginn festgelegten Regeln bestimmt und hängt im Allgemeinen von dem bis dahin eingetretenen Marktgeschehen ab. Für den Käufer stellt sich die Frage, welches der optimale Zeitpunkt zum Auslösen ist, für den Verkäufer ergibt sich die Anforderung, sich gegen jede mögliche Auslösestrategie des Käufers abzusichern.

Definition 5.1. Es sei $(\Omega, \mathfrak{F}_\bullet, P, \overline{S_\bullet})$ ein Mehrperioden-Finanzmarktmodell. Dann heißt ein stochastischer Prozess $C_\bullet = (C_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ (mit $C_t \geq 0$) eine *amerikanische Option.*

Bemerkung. $C_t = C_t(\omega)$ beschreibt die Auszahlungsbetrag an den Käufer bei Ausübung der Option zum Zeitpunkt t im Marksznario ω.

Beispiel. $C_t := (S_t - K)_+$ heißt *amerikanische Call-Option.*

Bemerkung. Jeder (zufällige) Anspruch lässt sich als amerikanische Option darstellen. Zum Beispiel kann man eine europäische Option mit Auszahlung $f(X_T) \geq 0$ auch als amerikanische der Form

$$C_t := \begin{cases} 0 & t < T \\ f(X_T) & t = T \end{cases}$$

auffassen. Insofern ist eine amerikanische Option der allgemeine Fall. Wir könnten also von einer (allgemeinen) Option reden.

Vereinbarung 5.2. Notation: $H_t := \frac{C_t}{S_t^0}$ ist die diskontierte Auszahlung von C bei Ausübung zum Zeitpunkt t. Der Prozess $(H_t)_{t \in \mathcal{T}}$ heißt *diskontierte amerikanische Option.*

Eine zulässige Strategie für den Käufer besteht aus einer Vorschrift für den Zeitpunkt, wann die amerikanische Option ausgeübt werden soll. Dieser Mechanismus darf aber nicht in die Zukunft schauen dürfen, d.h. es darf die in die Entscheidung, ob etwa zum Zeitpunkt t ausgeübt werden soll, nur die bis einschl. t verfügbare Marktinformation eingehen.

Definition 5.3 (Stoppzeit)**.** Eine messbare Zufallsgröße

$$\tau : (\Omega, \mathfrak{F}) \to \{0, \dots, T\}$$

heißt *Stoppzeit*, falls $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ gilt.

Bemerkung (Interpretation)**.** $\tau(\cdot) = \tau(\omega)$ ist der Zeitpunkt, wann ein Wecker zum Auslösen der Option klingelt. Wann der Wecker klingelt, hängt vom Marktgeschehen ab. Die Bedingung $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ bedeutet, dass allein anhand das Marktgeschehen bis zum Zeitpunkt t bestimmt, ob der Wecker bis zum Zeitpunkt t geklingelt hat.

Kanonisches Beispiel ist die Stoppzeit des ersten Überschreiten eines gewissen Niveaus

$$\tau := \inf \left\{ t \mid S_t^1 > k \right\} \wedge T.$$

Vereinbarung 5.4. Für einen Prozess X und eine Stoppzeit τ definieren wir

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

5.1 Optimales Stoppen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Frage, wie man bei fixiertem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ den Ausdruck

$$\mathbb{E}(H_\tau)$$

unter allen zulässigen Strategien maximieren kann. Hierbei ist $H_\bullet$ als ein adaptierter nichtnnegativer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $((\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, P)$.

Definition 5.5. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem filtrierten Raum $((\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathcal{T}})$, dann heißt eine Stoppzeit τ^* heißt *optimal* (für H), falls $\mathbb{E}_P[H_{\tau^*}]$ maximal ist unter allen Stoppzeiten τ, d.h.

$$\tau^* \in argmax \left\{ \mathbb{E}[H_\tau] \mid \tau : \Omega \to \{0, \dots, T\} \text{ Stoppzeit} \right\}$$

Das zugehörige Optimierungsproblem heißt *Problem des optimalen Stoppens.*

Bemerkung. Die Optimalität von τ^* hängt von H und vom gewählten Wahrscheinlichkeitsmaß P ab. Daher müsste man genauer von einer (H, P)-optimalen Stoppzeit reden.

5.1.1 Martingaltheorie in diskreter Zeit

Satz 5.6. *Für Stoppzeiten σ, τ sind auch*

$$\sigma + \tau \ , \ \sigma \wedge \tau \ , \ \sigma \vee \tau$$

Stoppzeiten.

Beweis. Wegen $\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq \tau\} \cup \{\tau \leq t\}$ gehört diese Menge als Vereinigung zweier $\mathfrak{F}_t$-Mengen wieder zu $\mathfrak{F}_t$. Die anderen beiden Aussagen zeigt man Analog. □

Definition 5.7. Für eine Stoppzeit τ heißt

$$\mathfrak{F}_\tau := \{A \in \mathfrak{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t\}$$

die *σ-Algebra der τ-Vergangenheit.*

Lemma 5.8.

1. *$\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}$ ist eine σ-Algebra.*
2. *$\sigma \leq \tau \Rightarrow \mathfrak{F}_\sigma \subseteq \mathfrak{F}_\tau$*
3. *$\mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_{\sigma \wedge \tau}$*
4. *Wenn X ein $\mathfrak{F}_t$-adaptierter Prozess ist, so ist X_τ $\mathfrak{F}_\tau$-messbar.*

Beweis.

1. Wir zeigen beispielhaft
$$A \in \mathfrak{F}_T \Rightarrow A^C \in \mathfrak{F}_T$$
Sei also $A \in \mathfrak{F}_T$. Dann gilt $A \in \mathfrak{F}_\infty$ und $A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$.
$\Rightarrow A^C \in \mathfrak{F}_\infty$ und
$$A^C \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \setminus (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t$$
Analog zeigt man
$$A_k \in \mathfrak{F}_T \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}_T$$
2. $S \leq T \Rightarrow \{T \leq t\} \subseteq \{S \leq t\}$ und es gilt für $A \in \mathfrak{F}_S$
$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$$
$\Rightarrow A \in \mathfrak{F}_T$.
3. folgt aus 2.
4. Sei $B \subset \mathbb{R}$ messbar, dann ist $X_\tau^{-1}(B) = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} X_t^{-1}(B) \cap \{\tau = t\}$, also $\mathfrak{F}_T$-messbar. Ferner ist $X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{i \in \{0,\ldots,t\}} X_i^{-1}(B) \cap \{\tau = i\} \in \mathfrak{F}_i$. Somit liegen sämtliche Urbilder von messbaren Mengen unter X_τ in $\mathfrak{F}_\tau$, d.h. X_τ ist $\mathfrak{F}_\tau$ messbar. □

Lemma 5.9 (Doob-Zerlegung für Submartingale)**.** *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Submartingal mit* $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$*. Dann existiert ein vorhersagbarer wachsender*[3] *Prozess* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und ein Martingal* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$X_n = M_n + A_n$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis. Sei

$$S_i := \mathbb{E}(X_i|\mathfrak{F}_{i-1}) - X_{i-1},\ i \geq 1$$

Dann ist S_i $\mathfrak{F}_{i-1}$-messbar und es gilt $S_i \geq 0$. Definiere

$$A_i := \sum_{k=1}^{i} S_k$$

$$A_0 := 0$$

$$M_i := X_i - A_i,\ i \geq 1$$

$$M_0 := X_0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} M_{i+1} - M_i &= X_{i+1} - X_i - (A_{i+1} - A_i) \\ &= X_{i+1} - X_i - S_{i+1} \\ &= X_{i+1} - X_i - [\mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i) - X_i] \\ &= X_{i+1} - \mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_{i+1}|\mathfrak{F}_i) = M_i + [\mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i) - \mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i)] = M_i$$

d.h. M_i ist ein Martingal. A_i ist offensichtlich wachsend.

Zur Eindeutigkeit:

$$X_i - X_{i-1} = M_i - M_{i-1} + A_i - A_{i-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_i|\mathfrak{F}_{i-1}) - X_{i-1} = 0 + A_i - A_{i-1}$$

Denn $A_\bullet$ ist vorhersagbar, also ist A_i $\mathfrak{F}_{i-1}$-messbar.
$\Rightarrow$ Die Zuwächse von A sind eindeutig durch die Zuwächse von X definiert.
$\Rightarrow$ $A_\bullet$ ist für $A_0 = 0$ eindeutig.
$\Rightarrow$ $M = X - A$ ist eindeutig. □

Satz 5.10 (Optional Sampling Theorem)**.** *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein* $(\mathfrak{F}_n)$*-Submartingal und seien* $S \leq T \leq n_0 < \infty$ *zwei beschränkte* $(\mathfrak{F})_n$*-Stoppzeiten. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) \geq X_S \ P\text{-fast sicher}$$

Bemerkung (Interpretation)**.** Durch diese Aussage wird die Submartingals-Eigenschaft auf zufällige Zeiten $S \leq T$ verallgemeinert.

Beweis.

[3] $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, falls $A_{n+1}(\omega) \geq A_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1. Schritt: X Martingal, $T = t$ deterministisch, $S \leq t$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s) \geq X_S$$

Sei $A \in \mathfrak{F}_S$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_S \cdot \mathbb{1}_A) &= \sum_{k=0}^{t} \mathbb{E}(X_S \cdot \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{\{S=k\}}) \\
&= \sum_{k=0}^{t} \mathbb{E}(X_k \cdot \mathbb{1}_{A\cap\{S=k\}}) \\
&\overset{X \text{ Mart.}}{=} \sum_{k=0}^{t} \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A\cap\{S=k\}}) \\
&= \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_A)
\end{aligned}$$

d.h. X_S ist $\mathfrak{F}_S$-messbar und

$$\int_A X_S \, dP = \int_A X_t \, dP \ \forall \ A \in \mathfrak{F}_S$$

$\Rightarrow X_S = \mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_S)$.

2. Schritt: X Martingal, $S \leq T \leq n_0$. Wegen $\mathbb{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$ und der Projektionseigenschaft der bedingten Erwartung gilt:

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n_0}|\mathfrak{F}_T)|\mathfrak{F}_S) = \mathbb{E}(X_{n_0}|\mathfrak{F}_S) \overset{\text{Schritt 1}}{=} X_S$$

3. Schritt: X sei integrierbares Submartingal, $S \leq T \leq n_0$. Benutze die Doob-Zerlegung

$$X_n = M_n + A_n$$

$\Rightarrow X_T = M_T + A_T \geq M_T + A_S$. Daher gilt

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) \geq \mathbb{E}(M_T|\mathfrak{F}_S) + A_S \overset{\text{Schritt 2}}{=} M_S + A_S = X_S$$

4. Schritt: Sei X ein beliebiges Submartingal, $S \leq T \leq n_0$.
$\Rightarrow$ Zu $a \geq 0$ sei

$$X_t^{(a)} := \max(-a, X_t) = \varphi^{(a)}(X_t)$$

mit $\varphi^{(a)}$ konvex und monoton wachsend. Dann ist $X_t^{(a)}$ ein Submartingal mit $\mathbb{E}(|X_t^{(a)}|) < \infty$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^{(a)}|\mathfrak{F}_S) \geq X_S^{(a)}$$

Mit $a \to \infty$ folgt

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) \geq X_S.$$

□

Lemma 5.11 (Charakterisierung von Submartingalen durch Stoppzeiten). *Sei $X_\bullet$ ein integrierbarer $\mathfrak{F}_\bullet$-adaptierter Prozess. Dann ist $X_\bullet$ genau dann ein $\mathfrak{F}_\bullet$-Submartingal, wenn für alle beschränkten Stoppzeiten $\sigma \le \tau \le C$ gilt*

$$\mathbb{E}[X_\tau|\mathfrak{F}_\sigma] \ge X_\sigma$$

Beweis. $\Rightarrow$: Optional Sampling (Satz 5.10).
$\Leftarrow$: Seien $0 \le s \le t$. Für $A \in \mathfrak{F}_s$ definiere $\sigma : \Omega \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\sigma(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \cdot s + \mathbb{1}_{A^C}(\omega) \cdot t$$

σ ist offenbar eine Stoppzeit und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t|\mathfrak{F}_\sigma] &\ge \mathbb{E}[X_\sigma] = \mathbb{E}[X_s \cdot \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_t \cdot \mathbb{1}_{A^C}] \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X_t \cdot \mathbb{1}_A] &\ge \mathbb{E}[X_s \cdot \mathbb{1}_A] \end{aligned}$$ □

Satz 5.12 (Optional Stopping Theorem). *Sei $X_\bullet$ ein integrierbares $\mathfrak{F}_\bullet$-Submartingal und τ eine $\mathfrak{F}_\bullet$-Stoppzeit. Dann ist der an τ gestoppte Prozess $X_\bullet^\tau$*

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)$$

wieder ein $\mathfrak{F}_\bullet$-Submartingal.

Beweis. Seien $\sigma \le \tau \le C < \infty$ zwei beschränkte $\mathfrak{F}_\bullet$-Stoppzeiten.

$$\Rightarrow X_\sigma^T = X_{T\wedge\sigma}\ ,\ X_\tau^T = X_{T\wedge\tau}\ ,\ T\wedge\sigma \le T\wedge\tau \le C$$

$$\Rightarrow E(X_\tau^T) = \mathbb{E}(X_{T\wedge\tau}) \ge \mathbb{E}(X_{T\wedge\sigma}) = \mathbb{E}(X_\sigma^T)$$

Aus der $\mathfrak{F}_\bullet$-Messbarkeit von $X_\bullet^T$ folgt mit dem vorigen Lemma die Behauptung. □

Lemma 5.13. *Sei $X_\bullet$ ein integrierbares Submartingal mit*

$$t \mapsto \mathbb{E}[X_t] = const$$

Dann ist $X_\bullet$ ein Martingal.

Beweis. Folgt aus der Doob-Zerlegung. □

Bemerkung. Analoge Aussagen gelten für Supermartingale.

5.1.2 Snell'sche Einhüllende

Definition 5.14 (Snell'sche Einhüllende). Sei $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, Q)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $H_\bullet$ in $\mathfrak{F}_\bullet$-adaptierter Prozess. Dann heißt der rekursiv definierte Prozess $U_\bullet = U_\bullet^Q$

$$U_T = H_T$$

$$U_t = \max\left(H_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t]\right)$$

die *Snell'sche Einhüllende*

Satz 5.15. *In der Situation von Definition 5.14 gilt: $U_\bullet$ ist ein $(Q, \mathfrak{F}_\bullet)$-Supermartingal mit $U_t \geq H_t$ Q-fast sicher und für jedes andere $(Q, \mathfrak{F}_\bullet)$-Supermartingal $\widetilde{U}_t$ mit $\widetilde{U}_t \geq H_t$ Q-fast sicher gilt*

$$\widetilde{U}_t \geq U_t$$

Beweis. Es gilt $U_t \geq H_t$ und $U_t \geq \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t]$. Somit ist $U_\bullet$ ein $H_\bullet$-dominierendes Supermartingal.

Sei nun $\widetilde{U}_\bullet$ ein anderes $H_\bullet$-dominierendes Supermartingal. Weiter gilt

$$\widetilde{U_T} \geq H_T = U_T$$

Mit einer Rekursion folgt dann

$$\widetilde{U}_t \geq \mathbb{E}[\widetilde{U_{t+1}}|\mathfrak{F}_t] \geq \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t] \ \forall\ t$$

und $\widetilde{U}_t \geq H_t$.

$$\Rightarrow \widetilde{U}_t \geq \max\left(H_t, \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t]\right) = U_t \ \forall\ t. \qquad \square$$

Satz 5.16. *Eine Stoppzeit τ ist genau dann optimal (für $\mathbb{E}_Q[H_\tau]$), wenn folgende Aussagen gelten:*

1. $H_\tau = U_\tau$
2. *Der gestoppte Prozess $U_\bullet^\tau$ ist ein Q-Martingal.*

Bemerkung. Die iterative Rekursion zur Konstruktion von $U_\bullet$ zusammen mit der Eigenschaft 1. liefert eine Konstruktionsverfahren zur Bestimmung einer optimalen Stoppzeit:

1. Berechne iterativ $U_\bullet$
2. Übe die Option aus, sobald $U = H$ beobachtet wird.

Insbsendere in CRR-Modell kann man das praktisch implementieren.

Beweis. Sei $\widetilde{\tau}$ eine Stoppzeit, dann gilt wegen $U_t \geq H_t$

$$\mathbb{E}_Q[H_{\widetilde{\tau}}] \leq \mathbb{E}_Q[U_\tau] \leq \mathbb{E}_Q[U_0] = U_0$$

Sei nun τ eine Stoppzeit, die die beiden Aussagen erfüllt. Dann gilt

$$\mathbb{E}_Q[H_\tau] = \mathbb{E}_Q[U_\tau] = \mathbb{E}_Q[U_T^\tau] = \mathbb{E}[U_0^\tau] = U_0$$

d.h. τ ist optimal.

Durch Nachrechnen verifiziert man, dass die Stoppzeit

$$\tau_{\min} = \inf\{t \geq 0 \mid U_t = H_t\}$$

welche in der vorigen Bemerkung konstruiert wird, optimal ist.

Sei nun τ optimal. Dann gilt:

$$U_0 = \mathbb{E}_Q[H_\tau] \leq \mathbb{E}_Q[U_\tau] \leq \mathbb{E}[U_0] = U_0$$

Wegen $H_\tau \leq U_\tau$ und $\mathbb{E}[H_\tau] = \mathbb{E}[U_\tau]$ folgt $H_\tau = U_\tau$ Q-fast sicher. Ferner gilt: (U_t^τ) ist ein Q-Supermartingal mit

$$U_0 = \mathbb{E}_Q[U_\tau] \leq \mathbb{E}_Q[U_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}_Q[U_t^\tau] \leq U_0$$

d.h. (U_t^τ) ist ein Supermartingal mit konstantem Erwartungswert, also ein Martingal. $\square$

Korollar 5.17.

- $U_0^Q = \sup_{\tau \text{ Stoppzeit}} \mathbb{E}_Q[H_\tau]$
- τ *optimal* $\Rightarrow \tau \geq \tau_{\min}$.

Satz 5.18. *Sei* $\tau_{\max} := \inf\{t \geq 0 \mid \mathbb{E}_Q[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t] \neq U_t\}$. *Dann ist* $\tau_{\max}$ *die größte optimale Stoppzeit für das Optimierungsproblem. Ferner ist eine Stoppzeit genau dann optimal, wenn folgende Aussagen gelten:*

1. $\tau \leq \tau_{\max}$
2. $U_\tau = H_\tau$.

Beweis von Satz 5.18. Sei $U = M - A$ die Doob'sche Zerlegung des Supermartingals U. Sei τ eine Stoppzeit, so ist

$$U^\tau = M^\tau - A^\tau$$

die Doob-Zerlegung des gestoppten Supermartingals. U^τ ist genau dann ein Martingal, wenn $A_\bullet^\tau = 0_\bullet$. $A_t^\tau = A_{\tau\wedge t}$. Da A_t wachsend ist, gilt

$$A_\bullet^\tau = 0 \Leftrightarrow A_\tau = 0$$

Weiter gilt

$$A_\tau = 0 \Leftrightarrow \tau \leq \tau_{\max}$$

denn

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \inf\{t \in \{0,\dots,T\} \mid \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t] - U_t \neq 0\} \\ &= \inf\{t \in \{0,\dots,T\} \mid A_{t+1} - A_t \neq 0\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow U^\tau$ genau dann ein Martingal, wenn $\tau \leq \tau_{\max}$. Damit folgt die Charakterisierung von optimalen Stoppzeiten aus

$$\tau \text{ optimal } \Leftrightarrow \begin{cases} U^\tau \text{ Martingal} \\ U_\tau = H_\tau \end{cases}$$

Bleibt zu zeigen: $\tau_{\max}$ ist optimal.

$$A_{\tau_{\max}} = 0 \Rightarrow U^{\tau_{\max}} \text{ ist Martingal}$$

Bleibt also zu zeigen, dass $U_{\tau_{\max}} = H_{\tau_{\max}}$ gilt. Trivialerweise gilt dies aus $\{\tau_{\max} = T\}$. Für $t < T$ gilt auf $\{\tau_{\max} = t\}$

$$\begin{aligned} A_t = 0\ ,\ A_{t+1} > 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}_Q[U_{t+1} - U_t|\mathfrak{F}_t] = -(A_{t+1} - A_t) = -A_{t+1} < 0 \\ \Rightarrow U_t > \mathbb{E}[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t]\end{aligned}$$

$U_t = \max(\mathbb{E}_Q[U_{t+1}|\mathfrak{F}_t], H_t) = H_t$ auf $\{\tau_{\max} = t\}$.
$\Rightarrow U_{\tau_{\max}} = H_{\tau_{\max}}$ auf $\{\tau_{\max} = t\}$ für alle $t < T$. $\square$

5.1.3 Amerikanische Optionen in vollständigen Märkten

Im allgemeinen stellt sich die Frage, welches Maß bei der Bestimmung einer optimalen Strategie verwendet werden soll. Im Falle von vollständigen Märkten sind die unter dem eindeutigen Martingalmaß gebildeten Snell'schen Einhüllenden bzw. optimalen Stoppregeln zusätzlich über eine punktweise Optimalität charakterisiert, die universell für sämtliche äquivalente Marktmodelle zutrifft.

Satz 5.19. *Sei das Marktmodell vollständig und sei $U_0^* = U_0^{P^*}$ die Snell'sche Einhüllende von $H_\bullet$ bzgl. dem eindeutig bestimmten Martingalmaß P^*. Dann existiert ein d-dimensionaler vorhersagbarer Prozess $\xi_\bullet$, s.d.*

$$U_t^* + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \geq H_u \;\forall\; u \geq t \quad P\text{-fast sicher.} \tag{$*$}$$

Ferner gilt für jede $\mathfrak{F}_t$-messbare Zufallsvariable $\widetilde{U}_t$ mit $(*)$ für einen gewissen vorhersagbaren Prozess $\widetilde{\xi}$, dass

$$\widetilde{U}_t \geq U_t^* \quad P\text{-fast sicher.}$$

Bemerkung.

- U_t^* ist somit charakterisiert als die minimale Anfangsinvestition (zum Zeitpunkt t) in ein selbstfinanzierendes Portfolio zur Absicherung sämtlicher künftiger Risiken, die dem Verkäufer der amerikanischen Optionen vom Zeitpunkt t ab drohen.
- $(*)$ gilt für P-fast jedes Szenario, das unter dem Ausgangsmaß P beobachtet werden kann. Inbsesondere ist die Charakterisierung von $U_\bullet^*$ damit unabhängig von P bzw. P^* innerhalb der Klasse der äquivalenten Maße.

Beweis von Satz 5.19. U_t^* ist ein P^*-Supermartingal.

$$U_t^* = M_t - A_t$$

mit dem P^*-Martingal M_t und (A_t) wachsend, $A_0 = 0$. Da das Modell vollständig ist, hat (M_t) eine vorhersagbare Darstellung: Es existiert ein vohersagbarer Prozess $\xi_\bullet$, s.d.

$$M_t = \underbrace{U_0}_{=M_0} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow U_u^* &= U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1}) + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k (X_k - X_{k-1}) - (A_u - A_t) - A_t \\
&= U_t^* + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k (X_k - X_{k-1}) - (A_u - A_t) \\
&\leq U_t^* + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k (X_k - X_{k-1})
\end{aligned}$$

Ferner: $U_u^* \geq H_u$.

Seien $\widetilde{U_s}, (\widetilde{\xi_s})_{s\in\{t+1,\dots,T\}}$ ein weiteres Paar mit

$$V_U := \widetilde{U}_t + \sum_{k=t+1}^{u} \widetilde{\xi}_k (X_k - X_{k-1}) \geq H_u \ P\text{-fast sicher}$$

Behauptung: $V_u \geq U_u^* \ \forall \ u \geq t$. Beweis durch Rückwärtsinduktion:

$$V_T \geq H_T = U_T^*$$

Angenommen es gilt

$$V_{u+1} \geq U_{u+1}^* \ P\text{-fast sicher}$$

$\Rightarrow V_{u+1} \geq U_{u+1}^*$ P^*-fast sicher. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P^*}[V_{u+1} - V_u|\mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}_{P^*}[\xi_{u+1}(X_{u+1} - X_u)|\mathfrak{F}_u] \\ &= \widetilde{\xi_{u+1}} \cdot \mathbb{E}_{P^*}[X_{u+1} - X_u|\mathfrak{F}_u] = 0 \end{aligned}$$

da $X_\bullet$ ein P^*-Martingal ist. Damit gilt

$$V_u = \mathbb{E}_{P^*}[V_{u+1}|\mathfrak{F}_u] \geq \mathbb{E}_{P^*}[U_{u+1}^*|\mathfrak{F}_u]$$

Es gilt ferner $V_u \geq H_u$ nach Voraussetzung.

$$\Rightarrow V_u \geq \max\left(H_u; \mathbb{E}_{P^*}[U_{u+1}^*|\mathfrak{F}_u]\right) = U_u^*$$

$\Rightarrow V_t = \widetilde{U}_t \geq U_t^*$. □

Satz 5.20. *Sei das Modell vollständig und $Q = P^*$. Dann gilt*

$$H_\tau \leq M_\tau = U_0^* + \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k (X_k - X_{k-1}) \ P\text{-}\textit{fast sicher}$$

für alle Stoppzeiten τ. Es gilt genau dann die Gleichheit, wenn τ P^*-optimal ist.

Bemerkung. Satz 5.20 ist ein szenarioweises Kriterium für die Optimalität von τ. Auch hier besteht die Rolle von P lediglich in der Auswahl der zu untersuchenden Szenarien. Insbesondere ist diese Charakterisierung einer optimalen Stoppzeit unabhängig von der genauen Wahl von P in der Klasse der äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße.

Beweis von Satz 5.20. Es gilt nach Konstruktion von U^* immer

$$\begin{aligned} H_\tau &\leq U_\tau^* \\ &= M_\tau - A_\tau \\ &\leq M_\tau = \left(U_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k (X_k - X_{k-1})\right)_{t=\tau} \end{aligned}$$

Ferner gilt: τ optimal $\Leftrightarrow \begin{cases} 1. & \tau \leq \tau_{\max} \Leftrightarrow A_\tau = 0 \\ 2. & H_\tau = U_\tau \end{cases}$

Dies ist genau dann der Fall, wenn Gleichheit in der obigen Abschätzung gilt. □

Bemerkung 5.21. Aus Satz 5.20 folgt, dass der Preis $\pi(H) := U_0^*$ weder für den Käufer noch für den Verkäufer von H eine Arbitrage zulässt: Bei fest gewählter Strategie τ kann H_τ als europäische Option $C = H_\tau \cdot S_T^0$ aufgefasst werden, indem die Auszahlung von H in τ in das Numeraire reinvestiert und in T dann abgerufen wird. Benutzt nun der Käufer eine P^*-optimale Strategie, so entspricht nach Satz 5.20 U_0^* dem Anfangswert eines H_τ-replizierenden Portfolios. Wählt der Käufer hingegen eine nicht-optimale Strategie, ergibt sich mit der Aussage "$<^*$" von Satz 5.20 eine Arbitrage für den Verkäufer. Offensichtlich führt ein Preis $\pi' > U_0^*$ zu einer Verkäufer- bzw. $\pi' < U_0^*$ zu einer Käufer-Arbitrage. $\pi(H) = U_0^*$ *ist daher der einzige Preis, der keinerlei Arbitrage zulässt.*, vergl. auch Satz 5.30 im nächsten Abschnitt.

5.2 Arbitragepreise und -schranken für amerikanische Optionen in unvollständigen Märkten

Im vorigen Abschnitt hatten wir für dan Falle von vollständigen Märkten argumentiert, dass $\pi(H) = U_0^*$ (Anfangswert der Snell'schen Einhüllenden unter dem Martingalmaß P^*) der einzige Preis ist, der weder auf Käufer- noch auf Verkäuferseite eine Arbitrage zulässt.

In diesem Abschnitt geht es um die systematische Anwendung des Arbitrageprinzips auf die Preisfindung von amerikanischen Optionen in unvollständigen Märkten. Da jede Option als amerikanische Option aufgefasst werden kann, handelt es sich dabei um das Preisfindungsproblem in der allgemeinsten Form.

Vereinbarung 5.22. In der folgenden Definition von Arbitrage-freien Preisen für amerikanische Optionen gehen wir wieder von der Anschauung aus, dass eine amerikanische Option H bei festgelegter Ausübungsstrategie τ zur europäischen Option $C = H_\tau \cdot S_T^0$ identisch ist, weil für deren diskontierte Ausschüttung $C/S_T^0 = H_\tau$ gilt. C wird aus H_τ kostenneutral realisiert, indem der Erlös aus H zum Zeitpunkt τ vollständig in das Numeraire S^0 investiert und in T dann abgerufen wird.

Definition 5.23. $\pi \in \mathbb{R}$ heißt *Arbitrage-freier Preis* oder *Arbitrage-Preis* für die amerikanische Option $H_\bullet$, falls folgende Aussage gelten:

1. Es existiert eine Stoppzeit τ mit

$$\exists\ \pi' \in \Pi(H_\tau) : \pi' \geq \pi$$

2. Es existiert keine Stoppzeit τ' mit

$$\forall\ \pi' \in \Pi(H_{\tau'}) : \pi' > \pi$$

Die Menge der Arbitrage-freien Preise von $H_\bullet$ wird mit $\Pi(H_\bullet)$ bezeichnet, und

$$\inf \Pi(H_\bullet) =: \pi_{\inf}(H_\bullet)$$

$$\sup \Pi(H_\bullet) =: \pi_{\sup}(H_\bullet)$$

Bemerkung (Erläuterung zu Definition 5.23)**.** Ein Preis p erlaubt genau dann eine Käufer-Arbitrage, wenn

$$\exists \;\text{ Stoppzeit } \tau : p \text{ erlaubt eine Käufer-Arbitrage für } H_\tau$$

Nach Bemerkung 3.35 ist das Äquivalent zu

$$p < \pi \quad \forall \pi \in \Pi(H_\tau).$$

Floglich erlaubt der Preis p keine Käufer-Arbitrage, wenn

$$\forall \;\text{ Stoppzeiten } \tau \;\exists\; \pi' \in \Pi(H_\tau) : p \geq \pi'$$

Der Vekäufer kennt bei Verkauf die Stratgie τ des Käufers nicht. Für ihn ergibt sich hieraus ein zusätzliches Risiko. Ein Preis p bietet damit nur die Aussicht auf einen risikolosen Gewinn, wenn für jede zulässige Käufer-Strategie τ der Preis p eine Verkäufer-Arbitrage für die eurpopäische Option H_τ ermöglicht, d.h. wenn

$$\forall \;\text{ Stoppzeiten } \tau : p \text{ erlaubt eine Verkäufer-Arbitrage für } H_\tau$$

Wieder mit Bemerkunng 3.35 erlaubt p also keine Verkäufer-Arbitrage, falls

$$\exists \;\text{ Stoppzeit } \tau : \;\exists\; \pi' \in \Pi(C) : p \leq \pi'.$$

Bemerkung 5.24 (Konsequenzen aus Definition 5.23)**.**

1. Bedingung 2 ist äquivalent zur Aussage, dass für alle Stoppzeiten ein π' existiert mit

$$\pi' \leq \pi$$

Für $c \in \Pi(H_\bullet)$ folgt

$$c \leq \sup_\tau \sup_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P(H_\tau) =: b$$
$$c \geq \sup_\tau \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P(H_\tau) =: a$$

d.h.

$$\Pi(H_\bullet) \subseteq [a, b]$$

2. Falls $c \in \Pi(H_\bullet)$, so gilt

$$c = \mathbb{E}_P(H_\tau)$$

für eine gewisse Stoppzeit τ und ein gewisses $P \in \mathfrak{P}$. Denn nach Bedingung 2 ex. eine Stoppzeit τ und ein $\pi \in \Pi(H_\tau)$, so dass $p \leq \pi$ Zudem existiert gemäß Bedingung 1 für alle τ' mindestens ein $\pi' \in \Pi(H'_\tau)$ so dass

$$\pi' \leq p.$$

D.h. im Falle von $\tau' := \tau$ erhält man ein $\pi' \in \Pi(H_\tau)$, so dass

$$\pi' \leq p \leq \pi.$$

d.h $p \in \Pi(H_\tau)$, also $p = \mathbb{E}_P(H_\tau)$ für ein gewisses $P \in \mathfrak{P}$.

3. Falls $\overline{P} \in \mathfrak{P}$ und $\overline{\tau}$ optimal für $\overline{P}$, so ist

$$\overline{U^0} := \mathbb{E}_{\overline{P}}[H_{\overline{\tau}}] = \sup_{\tau} \mathbb{E}_{\overline{P}}[H_\tau]$$

ein Arbitrage-freier Preis für H. In der Tat: $\overline{U^0}$ ist ein Arbitrage-freier Preis für die europäische Option $H_{\overline{\tau}}$, denn die an $\overline{\tau}$ gestoppte Snell'sche Einhüllende

$$\overline{U}_\bullet^{\overline{\tau}}$$

ist ein $\overline{P}$-Martingal.
$\Rightarrow$ Definiert eine Fortsetzung von H_τ zu einem erweiterten arbitrage-freien Finanzmarktmodell

$$\widetilde{X}_\bullet = \begin{pmatrix} \overline{X}_\bullet \\ \overline{U}_\bullet^\tau \end{pmatrix}$$

mit einem $\overline{P}$-Martingal $\widetilde{X}$ und $\widetilde{X}_T^{d+2} = H_\tau$, $\widetilde{X}_0^{d+2} = U^0$. Somit gilt schon einmal:

(a) $\exists\, \overline{\tau}$ und $\overline{P} \in \mathfrak{P}$, s.d.

$$\overline{U}^0 \leq \mathbb{E}_{\overline{P}}[H_{\overline{\tau}}] \in \Pi(H_{\overline{\tau}})$$

(b) Angenommen ex existiert τ' mit

$$U^0 < \mathbb{E}_P[H_{\tau'}] \ \forall\ P \in \mathfrak{P}$$

$\Rightarrow U^0 < \mathbb{E}_{\overline{P}}[H_{\tau'}]$ im Widerspruch zur $\overline{P}$-Optimalität von $\overline{\tau}$.

4. Aus 3 folgt insbesondere, dass $\emptyset \neq \Pi(H_\bullet) \supset \{U_0^P \mid P \in \mathfrak{P}\}$.

Im Vergleich der Schlussfolgerungen 2 und 3 stellt sich nun die Frage, ob sich sich jeder Arbitrage-freie Preis von H in der Form

$$\sup_\tau E_P(H_\tau) = \mathbb{E}_P[H_{\tau*}] = U_0^P$$

mit $P \in \mathfrak{P}$ und τ^* P-optimal darstellen lässt. Die Antwort hierauf geben die Sätze 5.25 und 5.27 unten als unser Hauptergebnis zur Bewertung amerikanischer Optionen.

5.2.1 Risikoneutrale Bewertung für Amerikanische Optionen

Satz 5.25. *Falls $H_t \in L^1(P)\ \forall\ P \in \mathfrak{P}$, so gilt: $\Pi(H_\bullet)$ ist ein Intervall mit*

$$\pi_{\inf}(H) = \inf_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$$

$$\pi_{\sup}(H) = \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$$

Bemerkung. Satz 5.25 ist das Analogon zur risikoneutralen Preismethode für eurpopäische Optionen, dass im Falle amerikanischer Optionen noch mit dem optimalen Stopproblem zu kombinieren ist.

Der Beweis von Satz 5.25 fußt auf einer Vertauschungsregel für die inf-sup-Bildung, die in ähnlicher Weise häufig bei Dualitätssätzen in der Optimierung auftritt.

Satz 5.26 (Min-Max-Lemma)**.** *Falls $H_t \in L^1(P)\ \forall\ P \in \mathfrak{P}$, so gilt*

$$\sup_\tau \inf_{P\in\mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_\tau] = \inf_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$$

Beweis von Satz 5.25. Seien $a := \inf_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$ und $b := \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$.
Dann gilt trivialer Weise $a \le b$. Im Fall $a < b$ sei $c \in (a,b)$: Wegen $c < \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$ existieren P,τ mit $c < \mathbb{E}_P[H_\tau]$, und wegen $c > \inf_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau] = \sup_\tau \inf_{P\in\mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_\tau]$ gilt $\forall\ \tau\ \exists\ P \in \mathfrak{P} : c > \mathbb{E}_P[H_\tau]$, d.h. $c \in \Pi(H_\bullet)$. Im Fall $a = b$ ist nichts zu zeigen, da $\Pi(H_\bullet) \subseteq [a,b] = \{b\}$. □

Satz 5.27.

1. *Die Menge* $\left\{U_0^P \mid P \in \mathfrak{P}\right\}$ *ist ein Intervall mit* $\inf\left\{U_0^P \mid P \in \mathfrak{P}\right\} = \pi_{\inf}(H)$ *und* $\sup\left\{U_0^P \mid P \in \mathfrak{P}\right\} = \pi_{\sup}(H)$.

2. *Es gilt* $\sup_\tau \sup_P \mathbb{E}_P[H_\tau] \in \Pi(H_\bullet) \Longleftrightarrow a = b \Longleftrightarrow \Pi(H_\bullet) = \left\{\sup_\tau \sup_P \mathbb{E}_P[H_\tau]\right\}$.

Beweis.

1. Sei $\mathcal{O} := \left\{U_0^P \mid P \in \mathfrak{P}\right\}$. Wie in Bemerkung 5.24 gesehen ist für $P \in \mathfrak{P}$ ist $U_0^P = \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau] \in \Pi(H_\bullet)$, so dass die Behauptung zum Supremum und Infimum der Menge $\mathcal{O}$ trivial ist. Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ zusammenhängend ist, seien $P_0, P_1 \in \mathfrak{P}$ und $P_\alpha = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_0$ für $\alpha \in [0,1]$. Dann ist P_α ein Martingalmaß und die Funktion
$$\alpha \mapsto \mathbb{E}_{P_\alpha}[H_\tau]$$
ist für fixes τ affin linear. Damit ist die Funktion
$$\alpha \mapsto \sup_\tau \mathbb{E}_{P_\alpha}[H_\tau] =: \psi(\alpha)$$
als punktweise gebildetes Supremum von affin-linearen Funktionen konvex und außerdem beschränkt. Demnach also stetig. Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen $\psi(0) = U_0^{P_0}$ und $\alpha(1) = U_0^{P_1}$ von ψ als Funktonswert von ψ angenommen. Somit ist $\mathcal{O}$ ein Intervall.

2. Mit den Bezeichnungen $a := \inf_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$ und $b := \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau]$ sei nun $a < b$. Wir wollen zeigen, dass dann $b \notin \Pi(H_\bullet)$. Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $b \in \Pi(H_\bullet)$. Dann existiert also eine Stopzzeit $\widehat{\tau}$ und ein Maß $\widehat{P} \in \mathfrak{P}$, so dass
$$b \le \pi' = \mathbb{E}_{\widehat{P}}(H_{\widehat{\tau}}).$$
Nach Definition von b gilt also
$$b = \max_{P\in\mathcal{P}} E_P(H_{\widehat{\tau}}) \in \Pi(H_{\widehat{\tau}}),$$
woraus wir mit Satz 3.34 schließen, dass $H_{\widehat{\tau}}$ erreichbar ist, d.h.
$$\Pi(H_{\widehat{\tau}}) = \{b\}$$

Insbesondere gilt dann

$$b = \mathbb{E}_{\widehat{P}}[H_{\widehat{\tau}}] = \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\widehat{\tau}}] \leq \sup_{\tau} \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_\tau] \leq \inf_{P \in \mathfrak{P}} \sup_{\tau} \mathbb{E}_P[H_\tau] = a \leq b,$$

das heißt $a = b$. Umgekehrt folgt aus $a = b$, dass $\Pi(H_\bullet)$ aus genau einem Element $\pi = U_0^P$ mit $P \in \mathfrak{P}$ beliebig besteht. Insbesondere ist dann $b = \pi = \sup_{P \in \mathfrak{P}} U_0^P \in \Pi(H_\bullet)$. □

Bemerkung. Bis auf die Randpunkte besteht die Menge der Arbitrage-freien Preise genau aus der Menge der optimalen mittleren Auszahlungen unter äquivalenten Martingalmaßen.

Beispiel 5.28 (Amerikanische Option im Mario Draghi-Beispiel, vergleiche Beispiel 2.25)**.** Sei $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, P_0)$ ein vollständiges diskretes Marktmodell, $T = 2$ und sei

$$\Omega = \Omega_0 \times \left\{\omega^\pm\right\}.$$

Das das eindeutige Martingalmaß P_0 für den Ursprungsmarkt werde auf Ω fortgesetzt durch

$$P(\left\{(\omega_0, \omega^+)\right\}) = P(\left\{(\omega_0, \omega^-)\right\}) = \frac{1}{2} \cdot P_0(\omega_0),$$

dann ist das erweiterte Modell $(\Omega, 2^\Omega, P), S)$ ein Arbitrage-freies unvollständiges Marktmodell. Sei nun H eine amerikanische Option

$$H_0 = 0\ ,\ H_1 = 1\ ,\ H_2 = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega = (\cdot, \omega^+) \\ 0 & \text{falls } \omega = (\cdot, \omega^-) \end{cases}$$

Zur Berechnung der Arbitragepreise von H betrachten wir die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\{P_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$$

auf Ω mit

$$P_\alpha(\left\{(\omega_0, \omega^+)\right\}) = \alpha \cdot P_0(\omega_0)$$
$$P_\alpha(\left\{(\omega_0, \omega^-)\right\}) = (1-\alpha) \cdot P_0(\omega_0)$$

Insbesondere ist P_α mit $P_\alpha(G \times \{\omega^+\}) = P(G) \cdot \alpha$ mit $\alpha \in (0,1)$ ein äquivalentes Martingalmaß zu P.

Offensichtlich gilt für jede P-optimale Stoppzeit für ein $P \in \mathfrak{P}$

$$\tau \geq 1 \text{ fast sicher.}$$

Wegen $\{\tau \leq 1\} \in \mathfrak{F}_1$ und dass $P_\alpha|_{|\mathfrak{F}_1} = P_0|_{\mathfrak{F}_1}$ ergibt sich

$$\mathbb{E}_{P_\alpha}[H_\tau] = P_0(\tau = 1) + P_0(\tau = 2) \cdot 2 \cdot \alpha < 1,$$

falls $P_0(\tau = 2) > 0$ und $\alpha < \frac{1}{2}$. Das heißt, für $\alpha < \frac{1}{2}$, so ist $\tau \equiv 1$ optimal für P_α. Umgekehrt, falls $\alpha > \frac{1}{2}$, so ist $\tau \equiv 2$ optimal für P_α.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 &\geq \sup_{Q \in \mathfrak{P}} \sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[H_\tau] \\ &\geq \sup_{\alpha \in (0,1)} \sup_{\tau} \mathbb{E}_{P_\alpha}[H_\tau] \\ &\geq \sup_{\alpha \in (1/2,1)} \alpha \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_{\sup}(H) = 2$$

Andererseits gilt $1 = \Pi_{\inf}(H) \in \Pi(H)$ und somit insgesamt

$$\Pi(H) = [1, 2)$$

In demselben Modell sei $(\widetilde{H_t})$ definiert durch

$$\widetilde{H_0} \equiv 0\ ,\ \widetilde{H_1} \equiv 0\ ,\ \widetilde{H_2} = H_2$$

$\Rightarrow \tau \equiv 2$ ist optimal für alle $Q \in \mathfrak{P}$.

$$\Rightarrow \inf_{Q \in \mathfrak{P}} \sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[\widetilde{H_\tau}] = \inf_{Q \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_Q[\widetilde{H_2}] \geq 0$$

und $\mathbb{E}_{P_\alpha}[\widetilde{H_2}] = 2 \cdot \alpha \to 0$ für $\alpha \to 0$.

$$\Rightarrow \inf_{Q \in \mathfrak{P}} \sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[\widetilde{H_\tau}] = 0$$

aber $\forall\ Q \in \mathfrak{P}$ ist

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}_Q[\widetilde{H}_\tau] = \mathbb{E}_Q[\widetilde{H}_2] > 0$$

weil Q zu P äquivalent ist. Es folgt

$$(0, 2) = \Pi(\widetilde{H})$$

Definition 5.29. Eine amerikanische Option heißt *erreichbar*, falls eine Stoppzeit τ und eine selbstfinanzierende Strategie $\xi_\bullet$ mit zugehörigen diskontierten Wertprozess (V_t) existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $V_t \geq H_t$ fast sicher $\forall\ t$
2. $V_\tau = H_\tau$

Satz 5.30. *Sei H eine erreichbare amerikanische Option. Dann gilt*

$$\Pi(H) = \{\pi\}$$

Beweis. (V_t) ist ein P-Martingal für alle $P \in \mathfrak{P}$. Da V_0 deterministisch ist, ist

$$\mathbb{E}_P[H_\tau] = \mathbb{E}_P[V_\tau] = V_0$$

unabhängig von P. Außerdem ist τ optimal für P, denn es gilt

$$H_t \leq V_t \text{ fast sicher } \ \forall\ t \Rightarrow \mathbb{E}_P[H_\tau] \leq \mathbb{E}_P[V_\tau] = V_0$$

$\Rightarrow \Pi_{\inf}(H) = V_0 = \Pi_{\sup}(H)$.

$$\Rightarrow [\Pi_{\inf}(H), \Pi_{\sup}(H)] = \{V_0\} = \{\pi\}$$

π ist zudem ein arbitrage-freier Preis (einfach Definition überprüfen). □

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung (sieh Föllmer/Schied, Kap. 7)

$$\Pi(H) = \{\pi\} \Rightarrow H \text{ ist erreichbar.}$$

5.2.2 Beweis des Min-Max-Lemmas

Im diesem Abschnitt wollen wir den Beweis von Satz 5.26 führen, indem wir die entsprechende Aussage für alle $t \in \mathcal{T}$ beweisen (Satz 5.36). Für dessen Formulierung benötigen wir aber zunächst noch einige Begriffe.

Snell'sche Einhüllende als Wesentliches Supremum

Satz 5.31. *Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und Φ eine Familie von Zufallsvariablen*

$$\Phi = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}\}$$

Dann existiert φ^* mit

1. *$\varphi^* \geq \varphi$ P-fast sicher für alle $\varphi \in \Phi$*
2. *Falls $\psi \geq \varphi$ P-fast sicher $\forall\ \varphi \in \Phi$, so gilt*

$$\psi \geq \varphi^* \text{ P-fast sicher}$$

φ^* ist fast sicher eindeutig.

Definition 5.32. φ^* aus dem vorigen Satz heißt *wesentliches Supremum* von Φ. Notation:

$$\varphi^* = \operatorname{ess\,sup} \Phi$$

Analog definieren wir $\operatorname{ess\,inf} \Phi$, bzw. $\operatorname{ess\,inf} \Phi := -\operatorname{ess\,sup}(-\Phi)$.

Beweis von Satz 5.31. O.B.d.A. sei $\varphi \in [0,1]\ \forall\ \varphi \in \Phi$, andernfalls betrachte $h \circ \varphi$ mit

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sei $\Psi \subseteq \Phi$ abzählbar. Definiere

$$\varphi_\Psi(\omega) = \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(\omega)$$

$\Rightarrow \varphi_\Psi$ ist messbar. Sei $c := \sup\{\mathbb{E}[\varphi_\Psi] \mid \Psi \subseteq \Phi \text{ abzählbar}\}$. c wird angenommen, denn falls (Ψ_n) eine Folge von abzählbaren Teilmengen von Φ mit

$$\mathbb{E}[\varphi_{\Psi_n}] \to c$$

Sei $\Psi^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Psi_n$. Dann gilt

$$c = \mathbb{E}[\varphi_{\Psi^*}]$$

und Ψ^* ist abzählbar. $\varphi^* := \varphi_{\Psi^*}$ erfüllt nun die geforderten Eigenschaften. $\square$

Satz 5.33. *Sei H_0 eine amerikanische Option und Q ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$. Sei $H_t \in L^1(Q)$ $\forall\ t = 0, \ldots, T$. Dann gilt:*

$$U_t^Q = \mathbb{E}_Q[H_{\tau_{\min}} | \mathfrak{F}_t] = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q[H_\tau | \mathfrak{F}_t],$$

mit

$$\tau_{\min}(t) := \inf\left\{s \geq t \mid U_s^Q = H_s\right\}$$

$$\mathcal{T}^{(t)} := \{\tau \text{ Stoppzeit} \mid \tau \in \{t, \ldots, T\}\}$$

Beweis. U_t^Q ist ein Q-Supermartingal, $\tau \in \mathcal{T}^{(t)}$.

$$U_t^Q \geq \mathbb{E}[U_\tau^Q|\mathfrak{F}_t] \geq \mathbb{E}[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

$\Rightarrow U_t^Q \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$. Sei $U_s^{(t)} := U_s^{\tau_{\min}^{(t)}}$ und $A := \left\{\tau_{\min}^{(t)} > s\right\}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{1}_A U_s^{(t)} &= \mathbb{1}_A U_s = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{E}_Q[U_{s+1}|\mathfrak{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[U_{s+1} \cdot \mathbb{1}_A|\mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A \cdot U_{(s+1)\wedge\tau^{(t)}}|\mathfrak{F}_s] \\
&= \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A \cdot U_{s+1}^{(t)}|\mathfrak{F}_s] = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{E}_Q[U_{s+1}^{(t)}|\mathfrak{F}_s]
\end{aligned}$$

Analog auf $\left\{\tau_{\min}^{(t)} \leq s\right\}$:

$$U_s^{(t)} = U_{\tau_{\min}^{(t)}} = U_{s+1}^{(t)}$$

d.h. auf $\left\{\tau_{\min}^{(t)} \leq s\right\}$ gilt

$$U_s^{(t)} = \mathbb{E}_Q[U_{s+1}^{(t)}|\mathfrak{F}_s] = U_{s+1}^{(t)}$$

d.h. $U_\bullet^{(t)}$ ist ein Q-Martingal.
$\Rightarrow \mathbb{E}_Q[U_{\tau_{\min}^{(t)}}|\mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}_Q[U_T^{(t)}|\mathfrak{F}_t] = U_t^{(t)} = U_t^Q$. Also gilt

$$U_t^Q = \mathbb{E}_Q[U_{\tau_{\min}^{(t)}}|\mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}_Q[H_{\tau_{\min}^{(t)}}|\mathfrak{F}_t]$$

$\Rightarrow U_t^Q = \min_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$ $\square$

Bemerkung 5.34. Die Aussage des vorigen Satzes lässt sich leicht auf Stoppzeiten verallgemeinert, d.h. für eine $\mathfrak{F}_\bullet$-Stopppzeit τ gilt

$$U_\tau^Q = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma \text{ Stoppzeit}, \sigma \geq \tau} \mathbb{E}_Q[H_\sigma|\mathfrak{F}_\tau].$$

(Beweis durch Einschränkung auf die disjunkten Ereignisse $\{\tau = t\}_{t \in \mathcal{T}}$).

Definition 5.35. [Universelle Snell'sche Einhüllenden] Sei $\mathcal{R}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ und H eine amerikanische Option mit $H_t \in L^1(Q)\ \forall\, t,\ \forall\, Q \in \mathcal{R}$. Dann heißen

$$U_t^{\downarrow} := \operatorname*{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{R}} U_t^Q = \operatorname*{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

$$U_t^{\uparrow} := \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}} U_t^Q = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

die (universelle) *untere* bzw. *obere Snell'sche Einhüllende bzgl.* $\mathcal{R}$.

Satz 5.36. *Mit $\mathcal{R} = \mathfrak{P}$ gilt für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$:*

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

Das Min-Max-Lemma (Satz 5.26) ergibt sich aus Satz 5.36 im Fall $t = 0$. Satz 5.36 fußt auf der wichtigen Beobachtung, dass man sich bei der Berechnung von $U_t^{\downarrow}$ auf eine spezielle Stoppzeit τ_t beschränken kann

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_t}|\mathfrak{F}_t],$$

siehe Satz 5.42. Der Beweis hiervon erfordert jedoch weitere Vorbereitungen.

Bedingte Verknüpfung von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition 5.37. Seien Q_1 und Q_2 zwei äquivalente Maße auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t=0,\dots,T})$ und σ eine $(\mathfrak{F}_t)$-Stoppzeit. Dann ist ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{Q}$ auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t))$ definiert durch

$$\widetilde{Q}(A) = \mathbb{E}_{Q_1}[Q_2(A|\mathfrak{F}_\sigma)]$$

Wir nennen $\widetilde{Q}$ die *bedingte Verknüpfung von Q_1 und Q_2 gegeben σ* und schreiben

$$\widetilde{Q} = Q_1 \odot_\sigma Q_2.$$

Bemerkung. Anschaulich ist diese Operation einem wiederholten Münzwurf vergleichbar, bei dem nach einer festgelegten Regel zur Spielzeit die Münze ausgetauscht wird.

Lemma 5.38. *In der Situation von Lemma 5.37 sei τ eine weitere $(\mathfrak{F}_t)$-Stoppzeit und $Y : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathfrak{F}_T$-messbar. Dann gilt*

$$\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[Y|\mathfrak{F}_\tau] = \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_{\sigma\vee\tau}]|\mathfrak{F}_\sigma]$$

Beweis.

1. $\widetilde{Q} \restriction \mathfrak{F}_\sigma = Q_1$, denn für $X \geq 0$, X $\mathfrak{F}_\sigma$-messbar gilt
$$\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[X] = \mathbb{E}_{Q_1}[\underbrace{\mathbb{E}_{Q_2}[X|\mathfrak{F}_\sigma]}_{=X}] = \mathbb{E}_{Q_1}[X]$$

2. Sei $\varphi \geq 0$ $\mathfrak{F}_\tau$-messbar. Dann ist
$$\varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau\leq\sigma} = \begin{cases} \varphi & , \ \tau \leq \sigma \\ 0 & , \ \tau > \sigma \end{cases}$$
Sowohl $\mathfrak{F}_\sigma$- wie auch $\mathfrak{F}_\tau$-messbar. Die $\mathfrak{F}_\tau$-Messbarkeit ist klar, für die $\mathfrak{F}_\sigma$-Messbarkeit beachte man, dass ϕ nur wegen des Indikators nur auf $\tau \leq \sigma$ ausgewertet werden muss.

3. Benutzt man nun nacheinander die Definition von $\widetilde{Q}$, die $\mathfrak{F}_\sigma$- und die $\mathfrak{F}_\tau$-Messbarkeit von $\mathbb{1}_{\tau\leq\sigma}$ erhält man
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[Y \cdot \varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau\leq\sigma}] &= \mathbb{E}_{Q_1}\left[\mathbb{E}_{Q_2}[Y \cdot \varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau\leq\sigma}|\mathfrak{F}_\sigma]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Q_1}\left[\varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau\leq\sigma}\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\sigma]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Q_1}\left[\mathbb{1}_{\tau\leq\sigma} \cdot (\varphi \cdot \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\sigma]|\mathfrak{F}_\tau])\right], \\
&= \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}\left[\mathbb{1}_{\tau\leq\sigma} \cdot (\varphi \cdot \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\sigma]|\mathfrak{F}_\tau])\right],
\end{aligned}$$
wobei wir im letzten Schritt die Aussage aus 2. oben benutzt haben.

4. Mit $Z = \varphi \cdot Y$ gilt
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[\varphi \cdot Y \cdot \mathbb{1}_{\tau>\sigma}] &= E_{Q_1}[E_{Q_2}[\varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau>\sigma} \cdot Y|\mathfrak{F}_\sigma]] \\
&= \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[\mathbb{1}_{\tau>\sigma} \cdot Z|\mathfrak{F}_\sigma] \\
&= \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[\mathbb{E}_{Q_2}[\mathbb{1}_{\tau>\sigma} \cdot Z|\mathfrak{F}_\tau]|\mathfrak{F}_\sigma] \\
&= \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \varphi|\mathfrak{F}_\sigma] \cdot \mathbb{1}_{\tau>\sigma}] \\
&= \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau>\sigma}]
\end{aligned}$$

Nehmen wir 3. und 4. zusammen erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[Y \cdot \varphi] = \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}\left[\mathbb{1}_{\tau \leq \sigma} \cdot \varphi \cdot \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\sigma]|\mathfrak{F}_\tau]\right] + \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \varphi \cdot \mathbb{1}_{\tau > \sigma}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[Y|\mathfrak{F}_\tau] &= \mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_{\tau > \sigma} + \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_\sigma]|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_{\tau \leq \sigma} \\ &= \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{E}_{Q_2}[Y|\mathfrak{F}_{\sigma \vee \tau}]|\mathfrak{F}_\tau] \end{aligned}$$

□

Korollar 5.39. *[Stabilität der Martingalmaße unter bedingter Verknüpfung] Falls* $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{P}$*,* σ *Stoppzeit, so ist* $\widetilde{Q} \in \mathfrak{P}$*.*

Beweis. $0 \leq s \leq t$. Nach Lemma 5.38 gilt mit $\tau = s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\widetilde{Q}}[X_t|\mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}_1[\mathbb{E}_2[X_t|\mathfrak{F}_{s \vee \sigma}]|\mathfrak{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_1[X_{t \wedge (s \vee \sigma)}|\mathfrak{F}_s] \\ &= X_{(t \wedge (s \vee \sigma)) \wedge s} \\ &= X_s \end{aligned}$$

□

Lemma 5.40. *Seien* $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$*,* τ *eine Stoppzeit,* $B \in \mathfrak{F}_\tau$*. Weiter seien*

$$\sigma := \tau \cdot \mathbb{1}_B + T \cdot \mathbb{1}_{B^C}$$

und $\widetilde{P} := P_1 \odot_\sigma P_2$*. Dann gilt:*

$$U_\tau^{\widetilde{P}} = U_\tau^{P_2} \cdot \mathbb{1}_B + U_\tau^{P_1} \cdot \mathbb{1}_{B^C}$$

Beweis. Wir wissen $U_\tau^{\widetilde{P}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho \in \mathcal{T}^{(\tau)}} \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau]$ nach Satz 5.33 bzw. Bemerkung 5.34. Ferner gilt für $\rho \geq \tau$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_{\sigma \vee \tau}] &= \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_T] \cdot \mathbb{1}_{B^C} \\ &= \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_B + H_\rho \cdot \mathbb{1}_{B^C} \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.38 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] &= \mathbb{E}_{P_1}[\mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_{\tau \vee \sigma}]|\mathfrak{F}_\tau] \\ &= \mathbb{E}_{P_1}[\mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_B + H_\rho \cdot \mathbb{1}_{B^C}|\mathfrak{F}_\tau] \\ &= \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{E}_{P_1}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_{B^C} \end{aligned}$$

Durch Übergang zum ess sup folgt hieraus

$$\mathbb{E}_{\widetilde{P}}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho \in \mathcal{T}^{(\tau)}} \mathbb{E}_{P_2}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_B + \operatorname*{ess\,sup}_{\rho \in \mathcal{T}^{(\tau)}} \mathbb{E}_{P_1}[H_\rho|\mathfrak{F}_\tau] \cdot \mathbb{1}_{B^C}$$

$$\Rightarrow U_\tau^{\widetilde{P}} \leq U_\tau^{P_2} \cdot \mathbb{1}_B + U_\tau^{P_1} \cdot \mathbb{1}_{B^C}$$

Seien nun $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{T}^{(\tau)}$, dann ist

$$\widetilde{\rho} := \rho_2 \cdot \mathbb{1}_B + \rho_1 \cdot \mathbb{1}_{B^C} \in \mathcal{T}^{(\tau)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[H_{\widetilde{\rho}}|\mathfrak{F}_\tau] &= \mathbb{E}_{P_2}[H_{\widetilde{\rho}}|\mathfrak{F}_\tau]\cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{E}_{P_1}[H_{\widetilde{\rho}}|\mathfrak{F}_\tau]\cdot \mathbb{1}_{B^C}\\ &= \mathbb{E}_{P_2}[H_{\rho_2}|\mathfrak{F}_\tau]\cdot \mathbb{1}_B + \mathbb{E}_{P_1}[H_{\rho_1}|\mathfrak{F}_\tau]\cdot \mathbb{1}_{B^C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow U_\tau^{\widetilde{P}} &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\widetilde{\rho}=\rho_2\mathbb{1}_B+\rho_1\mathbb{1}_{B^C}\\ \rho_1,\rho_2\in\mathcal{T}^{(\tau)}}} \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[H_{\widetilde{\rho}}|\mathfrak{F}_\tau]\\ &= \underbrace{\operatorname*{ess\,sup}_{\rho_2\in\mathcal{T}^{(\tau)}} \mathbb{E}_{P_2}[H_{\rho_2}|\mathfrak{F}_\tau]}_{=U_\tau^{P_2}}\cdot\mathbb{1}_B + \underbrace{\operatorname*{ess\,sup}_{\rho_1\in\mathcal{T}^{(\tau)}} \mathbb{E}_{P_1}[H_{\rho_1}|\mathfrak{F}_\tau]}_{=U_\tau^{P_1}}\cdot\mathbb{1}_{B^C}\end{aligned}$$ □

Lemma 5.41. *Für alle $P \in \mathfrak{P}$ und Stoppzeiten τ gilt:*

1. *Es existiert eine Folge $(P^k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $P^k \in \mathfrak{P}$ mit*
   i) $P^k_{|\mathfrak{F}_\tau} = P_{|\mathfrak{F}_\tau}$
   ii) $U_\tau^{P^k} \searrow \operatorname*{ess\,inf}_{P'\in\mathfrak{P}} U_\tau^{P'} = U_\tau^{\downarrow}$
2. *Analog zu 1. existiert eine Folge (P^k), $P^k \in \mathfrak{P}$ mit*
   i) $P^k_{|\mathfrak{F}_\tau} = P_{|\mathfrak{F}_\tau}$
   ii) $U_\tau^{P^k} \nearrow \operatorname*{ess\,sup}_{P'\in\mathfrak{P}} = U_\tau^{\uparrow}$

Beweis. Wir zeigen 1. (2. verläuft analog). – Seien $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, $B := \left\{U_\tau^{P_1} > U_\tau^{P_2}\right\} \in \mathfrak{F}_\tau$, $\sigma := \tau\cdot\mathbb{1}_B + T\cdot\mathbb{1}_{B^C}$ und

$$\widetilde{P} := P_1 \odot_\sigma P_2.$$

Dann folgt aus Lemma 5.40

$$U_\tau^{\widetilde{P}} = U_\tau^{P_1}\cdot\mathbb{1}_{B^C} + U_\tau^{P_2}\cdot\mathbb{1}_B = \min\left(U_\tau^{P_1}, U_\tau^{P_2}\right)$$

D.h. mit $\Phi := \left\{\varphi = U_\tau^P \mid P\in\mathfrak{P}\right\}$ gilt

$$\varphi_1,\varphi_2\in\Phi \Rightarrow \varphi_1\wedge\varphi_2\in\Phi$$

$$\Rightarrow U_\tau^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{\varphi\in\Phi}\varphi = \inf_{\varphi\in\Phi^*}\varphi$$

mit $\Phi^*\subseteq\Phi$ abzählbar und so, dass O.B.d.A. für $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi^*$ auch $\varphi_1\wedge\varphi_2\in\Phi^*$ gilt.

$$\Rightarrow \inf_{\varphi\in\Phi^*}\varphi = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\min\{\varphi_j \mid j=1,\ldots,k\}}_{=:\widehat{\varphi}_k\in\Phi}$$

$\Rightarrow \widehat{\varphi}_k := U_\tau^{P^k}$ erfüllt Bedingung *ii)*.

Angenommen, es gilt $P_{1|\mathbb{F}_\tau} = P$, so ist nach Konstruktion zunächst $\widetilde{P} = P_1\odot_\sigma P_2$ auf $\mathfrak{F}_\sigma$ identisch mit P, d.h.

$$\widetilde{P}_{|\mathfrak{F}_\sigma} = P_{1|\mathfrak{F}_\sigma} = P_{|\mathfrak{F}_\sigma}$$

Weiter gilt $\tau\leq\sigma$, d.h. $\mathfrak{F}_\tau\subseteq\mathfrak{F}_\sigma$. Damit folgt also

$$\widetilde{P}_{\mathfrak{F}_\tau} = P_{|\mathfrak{F}_\tau}$$ □

Satz 5.42. *Für $t \in \{0, \dots, T\}$ sei*

$$\tau_t := \min\left\{u \geq t \mid U_u^{\downarrow} = H_u\right\}$$

Dann gilt P-fast sicher

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_t} | \mathfrak{F}_t].$$

Insbesondere ist

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_\tau] = \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_0}].$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass

$$U_t^P \geq \mathbb{E}_P[U_{\tau_t}^P | \mathfrak{F}_t] \geq \mathbb{E}_P[H_{\tau_t} | \mathfrak{F}_t],$$

so dass

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} U_t^P \geq \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_t} | \mathfrak{F}_t] \tag{+}$$

Andererseits gilt

$$\tau_t \leq \min\left\{u \geq t \mid U_u^P = H_u\right\} = \tau_t^P$$

da $H_u \leq U_u^{\downarrow} \leq U_u^P \ \forall\ u = 0, \dots, T$. Zudem ist $(U^P)_{u=t,t+1,\dots,T}^{\tau_t^P}$ ein P-Martingal (siehe Beweis von Satz 5.33). Also gilt mit dem Optional Sampling Theorem

$$U_t^P = (U^P)_t^{\tau_t^P} = \mathbb{E}_P[(U^P)_T^{\tau_t^P} | \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}_P[(U^P)_{\tau_t}^{\tau_t^P} | \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}_P[U_{\tau_t}^P | \mathfrak{F}_t]. \tag{$*$}$$

Fixiere ein $P \in \mathfrak{P}$. Nach Lemma 5.41 existiert eine Folge $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$U_{\tau_t}^{P^k} \searrow \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} U_{\tau_t}^P$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}_P[H_{\tau_t} | \mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}_P[U_{\tau_t}^{\downarrow} | \mathfrak{F}_t] = \mathbb{E}_P[\lim_k U_{\tau_t}^{P^k} | \mathfrak{F}_t] \\
&\overset{(**)}{=} \lim_k \mathbb{E}_P[U_{\tau_t}^{P^k} | \mathfrak{F}_t] = \lim_k \mathbb{E}_{P^k}[U_{\tau_t}^{P^k} | \mathfrak{F}_t] \\
&\overset{(*)}{\geq} \limsup_k U_t^{P^k} \geq U_t^{\downarrow}.
\end{aligned}$$

(Bei $(**)$ benuzen wir dominierte Konvergenz und

$$H_{\tau_t} \leq U_{\tau_t}^{P^k} \leq U_{\tau_t}^{P^1} \ \forall\ k \in \mathbb{N}$$

und

$$U_l^P \leq (T + 1 - l) \cdot \max_{k=0,\dots,T} H_k,$$

wobei stets vorausgesetzt war, dass $H_k \in L^1(P)\ \forall\ k$.) Daraus folgt also

$$\operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_t} | \mathfrak{F}_t] \geq U_t^{\downarrow},$$

was zusammen mit (+) die gewünschte Identität liefert. Die Zusatzbehauptung ergibt sich schließlich aus

$$\begin{aligned}
U_0^{\downarrow} &= \inf_{P \in \mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau] = \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_{\tau_0}] \\
&\leq \sup_\tau \inf_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P[H_\tau] \leq \inf_{P \in \mathfrak{P}} \sup_\tau \mathbb{E}_P[H_\tau] = U_0^{\downarrow}.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 5.36. Zu zeigen ist

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P \left[H_\tau | \mathfrak{F}_t \right].$$

Gemäß Definition und Satz 5.42 gilt

$$\begin{aligned} U_t^{\downarrow} &= \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_P \left[H_\tau | \mathfrak{F}_t \right] \\ &= \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P \left[H_{\tau_t} \mathfrak{F}_t \right] \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P [H_\tau | \mathfrak{F}_t] \\ &\leq \operatorname*{ess\,inf}_{P \in \mathfrak{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_P [H_\tau | \mathfrak{F}_t] = U_t^{\downarrow} \end{aligned}$$

□

5.3 Nachtrag: Superhedging in unvollständigen Märkten

Im Folgenden werden wir stets davon ausgehen, dass

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} E_P(H_t) < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}. \tag{I}$$

Diese Voraussetzung erlaubt es uns insbesondere eine integrierbare Majorante für die Snell'sche Einhüllende zu konstruieren, um den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden zu können.

5.3.1 Minimalität der uniformen Snell'schen Einhüllenden

Satz 5.43. *Die obere Snell-Einhüllende einer amerikanischen Option*

$$U_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}x} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q [H_\tau | \mathfrak{F}_t]$$

genügt dem folgenden rekursiven Gesetz

$$U_T^{\uparrow} = H_T \ \textit{und} \ U_t^{\uparrow} = \max\bigl(H_t, \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} \mathbb{E}_P [U_{t+1}^{\uparrow} | \mathfrak{F}_t]\bigr).$$

Beweis. Gemäß Definition von $U_t^{\uparrow}$ und U_t^P gilt

$$U_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} U_t^P = \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} (H_t \vee E_P[U_{t+1}^P | \mathfrak{F}_t]) = H_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{P} E_P[U_{t+1}^P | \mathfrak{F}_t] \tag{$*$}$$

Sei $P \in \mathfrak{P}$ fix und $\mathfrak{P}_{t+1}(P)$ die Menge aller $P \in \mathfrak{P}$, die auf $\mathfrak{F}_{t+1}$ mit P übereinstimmen. Nach Lemma 5.41 existiert eine Folge P_k von Maßen aus $\mathfrak{P}_{t+1}(P)$, so dass $U_{t+1}^{P_k} \nearrow U_{t+1}^{\uparrow}$. Mit monotoner Konvergenz erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} E_P[U_{t+1}^{\uparrow} | \mathfrak{F}_t] &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} E_P[U_{t+1}^P | \mathfrak{F}_t] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} \operatorname*{ess\,sup}_{\widehat{P} \in \mathfrak{P}_{t+1}(P)} E_P[U_{t+1}^{\widehat{P}} | \mathfrak{F}_t] \\ &\geq \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} \lim_k E_P[U_{t+1}^{P_k} | \mathfrak{F}_t] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{P \in \mathfrak{P}} [U_{t+1}^{\uparrow} | \mathfrak{F}_t] \end{aligned}$$

Folglich gilt Gleichheit überall, was eingesetzt in $(*)$ die Behauptung ergibt. □

Definition 5.44. Es sei $\mathfrak{Q}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathcal{T}})$. Dann heißt ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathfrak{Q}$-supermartingal, falls er ein Q-supermartingal ist für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Analog definieren wir ein $\mathfrak{Q}$-submartingal bzw. $\mathfrak{Q}$-martingal.

Satz 5.45. *Die obere Snell-Einhüllende*

$$U_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

ist das kleinste $\mathfrak{P}$-Supermartingal, das H dominiert.

Beweis. Gemäs Satz 5.43 gilt für $P \in P \in \mathfrak{P}$, dass

$$U_t^{\uparrow} \geq H_t \vee E_P[U_{t+1}^{\uparrow}|\mathfrak{F}_t] \geq E_P[U_{t+1}^{\uparrow}|\mathfrak{F}_t].$$

Da $U_0^{\uparrow}$ eine endliche Konstante ist, folgt aus der Integrierbarkeitsbedingung (I) durch Induktion, dass $U_t^{\uparrow}$ integrierbar ist bzgl. jedem $P \in \mathfrak{P}$. Insbesondere ist $U_\bullet^{\uparrow}$ ein $\mathfrak{P}$-supermartingal, welches $H_\bullet$ dominiert.

Falls $\widetilde{U}_\bullet$ ein anderes $H_\bullet$-dominierendes $\mathfrak{P}$-supermartingal ist, so folgt zum einen, dass $\widetilde{U}_T \geq U_T^{\uparrow} = H_T$ und dann induktiv falls $\widetilde{U}_{t+1} \geq U_{t+1}^{\uparrow}$ mit der $\mathfrak{P}$-Supermartingaleigenschaft von $\widetilde{U}$, auch dass

$$\widetilde{U}_t \geq H_t \vee E_P[\widetilde{U}_{t+1}|\mathfrak{F}_t] \geq H_t \vee E_P[U_{t+1}^{\uparrow}|\mathfrak{F}_t] \quad \forall P \in \mathfrak{P}.$$

Durch Übergang zum ess sup erhalten wir

$$\widetilde{U}_t \geq H_t \vee \operatorname*{ess\,sup}_{P\in\mathfrak{P}} E_P[U_{t+1}^{\uparrow}|\mathfrak{F}_t] = U_t^{\uparrow},$$

letzteres wieder nach Satz 5.43. □

Bemerkung 5.46. Analog zeigt man, dass die untere Snell-Einhüllende

$$U_t^{\downarrow} = \operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{R}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}^{(t)}} \mathbb{E}_Q[H_\tau|\mathfrak{F}_t]$$

das kleinste $\mathfrak{P}$-Submartingal ist, das von H dominiert wird.

Korollar 5.47. *Für eine europäische Option H^E ist*

$$U_t^{\uparrow} = \operatorname*{ess\,sup}_{P\in\mathfrak{P}} \mathbb{E}_Q[H^E|\mathfrak{F}_t]$$

das kleinste $\mathfrak{P}$-Supermartingal mit $U_T^{\uparrow} \geq H^E$.

5.3.2 Uniforme Doob-Zerlegung

Satz 5.48 (Uniforme Doob-Zerlegung). *Für einen adaptierten nichtnegativen Prozess $U_\bullet$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*
1) U ist ein $\mathfrak{P}$-supermartingal.
2) Es existiert ein adaptierter wachsender Prozess $B_\bullet$ mit $B_0 = 0$ und ein vorhersagbarer Prozess $\xi_\bullet$, so dass

$$U_t = U_0 + (\xi \bullet X)_t - B_t \quad P\text{-fast sicher für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Beweis. 2) ⇒ 1): Wegen $U_0 + (\xi \bullet X)_t \geq U_t \geq 0$ ist der Prozess nach $(U_0 + (\xi \bullet X)_t)_t$ nach Satz 3.22 ein P-Martingal für alle $P \in \mathfrak{P}$, und es folgt 1).

1) ⇒ 2) (im Spezialfall, dass Ω endlich ist, für den allgemeinen Fall siehe [Föllmer/Schied]): Sei $P \in \mathfrak{P}$, dann ist $U_t - U_{t-1} \in L^1((\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$. Wir behaupten, dass es ξ messbar bzgl. $\mathfrak{F}_{t-1}$ und $B \geq 0$ messbar bzgl. $\mathfrak{F}_t$ gibt, so dass

$$U_t - U_{t-1} = \xi(X_t - X_{t-1}) - B \quad P\text{-fast sicher.}$$

Angenommen, das ist nicht der Fall, dann liegt $U_t - U_{t-1}$ also nicht in der Menge

$$C := K_t - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P) = \{k - l \,|\, k \in K_t, l \in L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)\}$$

wobei

$$K_t = \{\xi(X_t - X_{t-1}) \,|\, \xi \in L^0(\Omega, \mathfrak{F}_{t-1}, P)\}.$$

Die Spezielle Struktur der Menge C als konvexe abgeschlossene Teilmenge des endlich-dimensionalen Vektorraums $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ liefert die Existenz eines Vektors $Z \in L^1(\Omega, F_t, P)$ mit $Z(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, so das

$$0 = \sup_{W \in C} \mathbb{E}[ZW] < \mathbb{E}[Z(U_t - U_{t-1})] =: \delta. \tag{+}$$

und

$$0 = \mathbb{E}[Zk] \quad \forall\, k \in K_t,$$

s. Lemma 5.49 unten. Führen wir nun das neue Maß ein $\widetilde{P} = \frac{Z}{Z_{t-1}} dP$ mit $Z_{t-1} = E_P[Z|\mathfrak{F}_{t-1}]$ so ist $\widetilde{P}$ ein Martingalmaß (vergl. Beweis von Satz 3.34). Mit diesem $\widetilde{P} \in \mathfrak{P}$ gilt dann laut Voraussetzung aber wieder, dass $E_{\widetilde{P}}[U_t - U_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}] \leq 0$, also auch

$$0 \geq E_{\widetilde{P}}[E_{\widetilde{P}}[U_t - U_{t-1}|\mathfrak{F}_{t-1}]Z_{t-1}] = E_{\widetilde{P}}[(U_t - U_{t-1})Z_{t-1}] = E_P[(U_t - U_{t-1})Z] = \delta,$$

im Widerspruch zu (+). □

Lemma 5.49. *1) In einem arbitragefreien Marktmodell auf einem endlichen Warscheinlichkeitsraum Ω ist die Menge $C := K_t - L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ abgeschlossen in $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$.*
2) Falls $U \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P) \setminus C$, so existiert ein $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$, $Z > 0$ mit

$$0 = \sup_{W \in C} \mathbb{E}[ZW] < \mathbb{E}[Z(U_t - U_{t-1})] =: \delta. \tag{+}$$

Beweis. Wir können o.b.d.A. davon ausgehen, dass $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Aufgrund der Endlichkeit von Ω ist die Konvergenz von $w_n \to w$ in $L^p(\Omega, P)$ identisch zur punktweisen Konvergenz $w_n(\omega) \to w(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei nun $w_n = k_n - l_n \to w$ in $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$, dann haben wir die Darstellung $w = k - l$ für ein geeignetes Paar $(k, l) \in K \times L^0_+$ zu zeigen. Falls die Folge ξ_n in $k_n = \xi_n(X_t - X_{t-1})$ beschränkt bleibt, so gibt es nach Auswahl einer Teilfolge $\xi_{n'}$ ein $\mathfrak{F}_{t-1}$-messbares ξ, so dass $\xi_{n'}(\omega) \to \xi(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, und somit auch, dass $k_{n'} \to k := \xi(X_t - X_{t-1})$ in $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$. Folglich gilt auch $l_{n'} \to l := w - k$ in L^1, und daher auch $l \geq 0$, da diese Eigenschaft unter punktweiser Konvergenz erhalten bleibt. Damit ist die gewünschte Darstellung im Fall, dass $\liminf_n |\xi_n|_\infty < K$ gefunden. – Im Fall, dass $\liminf_n |\xi_n|_\infty = \infty$ betrachten wir die Zerlegung

$$\xi_n = \xi_n^\perp + \xi_n^{||},$$

mit

$$\xi_n^\perp \in (X_t - X_{t-1})^\perp = \{\eta \in L^0(\mathfrak{F}_{t-1})\ , |\, \eta(X_t - X_{t-1}) = 0\}$$

und

$$\xi_n^\perp \in (X_t - X_{t-1})^{||} = \{\zeta \in L^0(\mathfrak{F}_{t-1})\ , |\, \eta\zeta = 0 \quad \forall \zeta \in (X_t - X_{t-1})^\perp\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\xi_n(X_t - X_{t-1}) = \xi_n^{||}(X_t - X_{t-1}),$$

so dass wir im Falle $\liminf_n |\xi_n^{||}|_\infty < \infty$ schließen können wir zuvor.

Wir zeigen nun, dass $\liminf_n |\xi_n^{||}|_\infty = \infty$ nicht auftreten kann. Wegen $\xi_n(X_t - X_{t-1}) = \xi_n^{||}(X_t - X_{t-1})$ können wir o.b.d.A. davon ausgehen, dass $\xi^\perp = 0$, d.h. $\xi_n \in (X_t - X_{t-1})^{||}$. Man beachte, dass $(X_t - X_{t-1})^{||}$ ein linearer Teilraum von $L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ und somit abgeschlossen ist. Setzen wir $\widetilde{\xi}_n = \xi_n / |\xi_n|_\infty$, so gilt nach Übergang zu einer Teilfolge, dass $\widetilde{\xi}_{n'} \to \widetilde{\xi}$ für ein gewisses $\widetilde{\xi} \in (X_t - X_{t-1})^{||}$ mit $|\widetilde{\xi}|_\infty = 1$. Zudem erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n‘} \frac{1}{|\xi_n'|} w_{n'} &= \lim_{n‘} \frac{1}{|\xi_n'|}\big(\xi_{n'}(X_t - X_{t-1}) - l_n\big) = \lim_{n‘}\Big(\widetilde{\xi}_{n'}(X_t - X_{t-1})\widetilde{l}_{n'}\Big) \\ &= \widetilde{\xi}(X_t - X_{t-1}) - \lim_{n‘} \widetilde{l}_{n'} = \widetilde{\xi}(X_t - X_{t-1}) - \widetilde{l}, \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{l} \in L^0_+$ der Grenzwert der Folge $\widetilde{l}_{n'} = l_{n'}/|\xi_n{}'|_\infty$ ist. Folglich

$$\widetilde{l} = \widetilde{\xi}(X_t - X_{t-1}) \in L^0_+(\Omega, \mathfrak{F}_t, P),$$

d.h. (durch Erwartungswertbildung bzgl. einem $\pi \in \mathfrak{P}$), dass $\widetilde{l} = 0$. Somit ist $\widetilde{\xi} \in (X_t - X_{t-1})^\perp \cap (X_t - X_{t-1})^{||} = \{0\}$, also $\widetilde{\xi} = 0$ im Widerspruch zu $|\widetilde{\xi}|_\infty = 1$.

2) O.B.d.A. gilt $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Die Erwartungsbildung

$$E_P[XY] = \sum_{i=1}^{|\Omega|} X(\omega)Y(\omega)P(\Omega) =: \langle X, Y\rangle_P$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{|\Omega|}$, dessen induzierte Norm $|.|_P$ äquivalent zur Standardnorm auf $R^{|\Omega|}$ ist. Die Menge $C \subset \mathbb{R}^{|\Omega|}$ ist konvex und abgeschlossen mit $0 \in C$. Zu $U \in \mathbb{R}^{|\Omega|} \setminus C$ sei κ die $|.|_P$-Projektion von U auf die Menge C, d.h.

$$\kappa = \operatorname*{argmin}_{w \in C} |U - w|^2_P,$$

dann gilt mit $Z = U - \kappa$, dass $\langle Z, w - \kappa\rangle_P \leq 0$ für alle $x \in C$. Ferner ist $\langle Z, U - \kappa\rangle_P = |U - \kappa|_P^2 > 0$, d.h.

$$\sup_{w\in C}\langle Z, w - \kappa\rangle_P < \langle Z, U - \kappa\rangle_P$$

bzw.

$$\sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P < \langle Z, U\rangle_P.$$

Die Menge C ist ein konvexer Kegel in $\mathbb{R}^{|\Omega|}$, d.h. mit $u, v \in C$ und $\mu, \lambda \geq 0$ ist auch $\lambda u + \mu v \in C$. Die Funktion

$$C \ni w \mapsto \langle Z, w - \kappa\rangle_P$$

ist linear und nach oben beschränkt, somit gilt

$$\sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P \leq 0,$$

denn andernfalls würde für eine Folge $w_n \in C$ mit $\langle Z, w_n\rangle_P \to \sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P > 0$ gelten, dass $\sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P \geq \lim\langle Z, 2w_n\rangle_P = 2\sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P > \sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P$. Wegen $0 \in C$ ist schließlich $\sup_{w\in C}\langle Z, w\rangle_P \geq 0$.

Die Nichtnegativität von Z ergibt sich nun daraus, dass insbesondere

$$\langle Z, -l\rangle \leq 0 \quad \forall l \in L^0_+,$$

d.h. falls nun $Z(\omega_0) < 0$ für ein $\omega_0 \in \Omega$, wähle man $l : \Omega \to \mathbb{R}$, $l(\omega) = \mathbb{1}_{\omega_0}(\omega)$, so führt das auf einen Widerspruch. Falls Z nicht strikt positiv ist, ersetzen wir Z durch $Z_\epsilon = Z + \epsilon$, d.h. $Z_\epsilon(\omega) = Z(\omega) + \epsilon$, wobei $\epsilon > 0$ klein genug gewählt ist, dass weiterhin $\langle Z_\epsilon, w\rangle_P > 0$. Ferner ist für $w = \xi(X_t - X_{t-1}) - l$

$$\langle Z_\epsilon, w\rangle_P = \langle Z, w\rangle_P - \epsilon E_P[l] \leq \langle Z_\epsilon, w\rangle_P \leq 0,$$

so dass weiterhin

$$\sup_{w\in C}\langle Z_\epsilon, w\rangle_P = 0.$$

Da die Menge $K_t \subset C$ ist ebenfalls ein konvexer Kegel ist mit $0 \in K_t$, schließen wir mit denselben Argumenten wie oben, dass

$$\sup_{k\in K_t}\langle Z, k\rangle_P = 0.$$

K_t ist sogar ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{|\Omega|}$, daher folgt hieraus sogar, dass

$$\langle Z, k\rangle_P = 0 \quad \forall k \in K_t.$$

□

5.3.3 Minimales Superhedging

Definition 5.50. Eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\xi}_\bullet$ heißt Superhedging-Strategie für die amerikanische Option, falls für den zugehörigen Wertprozess gilt

$$V_t \geq H_t \quad P\text{-fast sicher für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Mit dieser Sprechweise nennen wir laut Definition 5.29 eine amerikanische Option erreichbar, falls es eine Superhedging-Strategie für H gibt mit $H_\tau = V_\tau$ für eine gewisse Stoppzeit τ.

Satz 5.51. *Es gibt eine Superhedging-Strategie mit der minimale Anfangsinvestition* $\pi_{\sup}(H)$ *unter allen Superhedging-Strategien.*

Beweis. Es sei $(\xi_\bullet, B_\bullet)$ das Paar von Prozessen in der uniformen Doob-Zerlegung des $\mathfrak{P}$-Supermartingals $U^\uparrow_\bullet$, d.h.

$$U^\uparrow_t = U^\uparrow_0 + (\xi \bullet X)_t - B_t \geq H_t.$$

Sei $\overline{\xi}_\bullet$ die selbstfinanzierende Strategie, die durch $\xi_\bullet$ und die Anfangsinvestition

$$U^\uparrow_0 = \pi_{\sup}(H)$$

definiert ist. Dann gilt für den zugehörigen Wertprozess

$$V_t = U^\uparrow_0 + (\xi \bullet X)_t \geq H_t,$$

d.h. $\overline{\xi}$ definiert eine Superhedging-Strategie für H mit Anfangsinvestition $\pi_{\sup}(H)$.

Falls es nun eine andere Superhedging-Strategie $\overline{\xi}$‘ gibt mit $V'_0 = \pi' < \pi_{\sup}(H)$, so wäre

$$\widetilde{V}_t := \min(V_t, V'_t)$$

ebenfalls ein dominierendes $\mathfrak{P}$-Supermartingal mit $\widetilde{V}_0 < V_0 = U^\uparrow_\bullet$, im Widerspruch zur Minmimaleigenschaft von $U^\uparrow_0$ gemäß Satz 5.45. $\square$