Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 1:
Einführung in die Aussagenlogik

Elementare Aussagenlogik

Definition *Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist.* (Aristoteles)

Beispiele

- *A: Bonn ist eine Stadt.*
- *B: Köln ist ein Dorf.*
- *C: Köln ist größer als Bonn.*
- *D: Köln ist eine Stadt.*
- *E: Nachts ist es kälter als draußen. (?)*

Verknüpfungen von Aussagen
Elementarverknüpfungen

Elementar-
verknüpfungen

Durch Verknüpfung können neue Aussagen gebildet werden.

- 'NICHT': $\neg A$.

  Bonn ist nicht eine Stadt. (Bonn ist keine Stadt.)
- 'ODER': $A \vee B$.

  Bonn ist eine Stadt oder Köln ist ein Dorf.
- 'UND': $A \wedge B$:

  Bonn ist eine Stadt und Köln ist ein Dorf.

Formale Definition: *Wahrheitstabelle*

Für zwei Aussagen U und V definiert man

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
$\neg$ U	F	F	W	W
U $\vee$ V	W	W	W	F
U $\wedge$ V	W	F	F	F

Äquivalenzverknüpfung

Definition: Äquivalenz '$\Leftrightarrow$'

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
U $\Leftrightarrow$ V	W	F	F	W

Sprechweise: U ist *notwendig und hinreichend* für B.

Beispiele

- $A \Leftrightarrow \neg B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $\neg A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $A \Leftrightarrow B$. *(Wahrheitswert: F)*

Implikationsverknüpfung

Definition: Implikation '$\Rightarrow$'

U	W	W	F	F
V	W	F	W	F
U $\Rightarrow$ V	W	F	W	W

Sprechweise: U ist *hinreichend* für V.

Beispiele

- $A \Rightarrow \neg B$. *(Wahrheitswert: W)*
- $A \Rightarrow B$. *(Wahrheitswert: F)*
- $B \Rightarrow A$. *(Wahrheitswert: W)*

Tautologien

Aus *Aussagevariablen* enststehen durch Verknüpfung und Klammerbildung *Aussageformen* z.B.

$$\neg((U \wedge V) \Rightarrow \neg W).$$

Definition

Aussageformen mit Wahrheitswert W (für beliebige Wahrheitswerte der Variablen) heißen *Tautologien*.

Beispiele

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \vee \neg A$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
5. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
6. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Nachweis: Wahrheitstabelle

Beispiel 1

A	W	F
A $\Rightarrow$ A	W	W

Beispiel 2

A	W	F
$\neg A$	F	W
$A \vee \neg A$	W	W

Beispiel 4

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A \vee B$	W	F	W	W
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	W	W	W	W

Logisches Schliessen

Beispiel *Bonn ist eine Stadt und Köln größer als Bonn. Also ist Köln kein Dorf.*

Struktur

- Prämisse 1: A
- Pämisse 2: C
- Prämisse 3: $A \wedge C \Rightarrow D$
- Prämisse 4: $D \Rightarrow \neg B$
- Konklusion: $\neg B$.

A:	Bonn ist eine Stadt
B:	Köln ist ein Dorf
C:	Köln ist größer als Bonn
D:	Köln ist eine Stadt

Benutzt Tautologie

$$A \wedge C \wedge (A \wedge C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$$

Gültiges Schließen

Gegeben

Prämissen $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$
(Aussageformen)

Folgerung

Konklusion (C)
(Aussageform)

Schreibweise

$$(P_1), (P_2), \dots, (P_n) \models (C)$$

Definition

Ein Schluss heißt *gültig*, falls

$$(P_1) \wedge (P_2) \wedge \cdots \wedge (P_n) \Rightarrow (C) \quad \text{Tautologie}$$

Übung

(Theodizee). Wenn es Supermann gibt und er ein guter Held ist, verhindert er alles Übel. Da es Übel in dieser Welt gibt, gibt es Supermann nicht, oder er ist kein guter Held.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 2:
Mengenlehre und Zahlen

Naive Mengenlehre

Definition

'Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten wolhunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.' (G. Cantor, 1845-1918)

Schreibweisen

$a \in A$ 'a ist ein Element der Menge A'
$a \notin A$ 'a ist nicht ein Element der Menge A '

Beschreibung von Mengen

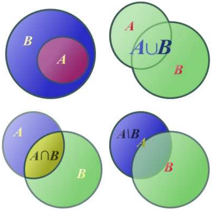
$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (Aufzählung)
$A = \{a \,|\, a \text{ hat Eigenschaft } \alpha\}$ (Eigenschaft)

Beispiele

- $M = \textit{Teilnehmer des Tutoriums} = \{\textit{Anna, Hans, ...}\}$
- $G = \{z \,|\, z \textit{ ist ein Vielfaches der Zahl } 7\}$.
- $X = \{x \,|\, x = x\}$ *(All-Menge)*
- $\emptyset := \{x \in X \,|\, x \neq x\}$ *(Leere Menge)*

Mengenalgebra - Grundoperationen

Teilmenge	$A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Gleichheit	$A = B :\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
Vereinigung	$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Durchschnitt	$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Komplement	$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Potenzmenge	$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subset A\}$



(Bel. Erweiterbar durch Verschachtelung)

Rechnen mit Mengen - Beispiele

$\emptyset \subset A$ für jede Menge A

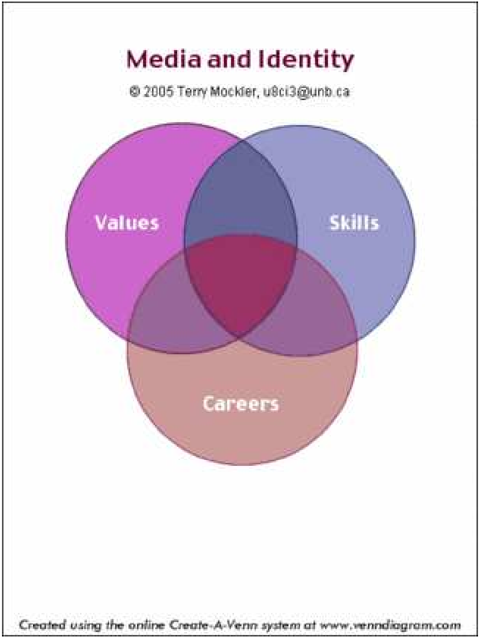
1. Distributivgesetz $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. De Morgan'sche Regel $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis:
$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A.$
Beweis:
$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in B)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
Beweis:
$(x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$

Übung: Anwendung von de Morgan
A = Weinliebhaber, B = Biertrinker, C = Milchbubis

Karriereplanung nach de Morgan ...



Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.' L. Kronecker (1823-91).

Definition Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ensteht durch sukzessives Hinzufügen ('Addition') von '1'.

Bemerkung $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$

Zulässige Operationen

Addition $m + n = m + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ (n Mal)

Multiplikation $m \cdot n = m + m + m + \cdots + m$ (n Mal)

Vergleich $m \geq n \Leftrightarrow$ (es ex. ein $l \in N$ mit $m = n + l$)

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Subtraktion in $\mathbb{N}_0$	wird definiert via $(m - n = l) \Leftrightarrow (m = n + l)$, falls $m \geq n$
Definition $\mathbb{Z}$ 1. Teil	$(z \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ (es ex. $m, n \in \mathbb{N}$ so dass 'z'='m-n')
Definition $\mathbb{Z}$ 2. Teil	$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow$ (es ex. ein $l \in \mathbb{N}_0$: $m_1 = m_2 + l$ und $n_1 = n_2 + l$)
Beispiel	'2-5'='1-4'='97-100'='0-3'= '-3'
Zulässige Operationen	Addition, Multiplikation, Vergleich, Subtraktion
Bemerkung	(-1)$*$(-1)= '0-1'$*$'0-1'= '$(0 * 0 + 1 * 1)$-$(0 * 1 + 1 * 0)$'='1-0'=1.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Division in $\mathbb{Z}$	wird definiert via $(p \div r = q) \Leftrightarrow (q = p * r)$, falls r Teiler von p
Definition $\mathbb{Q}$ 1. Teil	$(q \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow$ (es ex. $p, r \in \mathbb{Z}$ so dass 'q'='p÷r')
Definition $\mathbb{Q}$ 2. Teil	$(q_1 = q_2) \Leftrightarrow$ (es ex. ein $t \in \mathbb{Z}$: $p_1 = p_2 * t$ und $r_1 = r_2 * t$)
Beispiel	'12÷ 30='6 ÷ 15' = '2 ÷ 5'= '$\frac{2}{5}$'
Definition '$\geq$'	$(q = \frac{m}{n} > 0) \Leftrightarrow (m \cdot n > 0)$ $(q_1 > q_2) \Leftrightarrow (q_1 - q_2 > 0)$
Zulässige Operationen	Addition, Multiplikation, Vergleich, Subtraktion Division

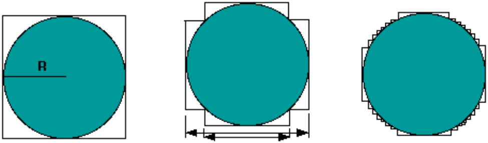
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Beobachtung Es gibt physikalische Größen (dh. Abstände, Flächeninhalte ...), die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Beispiele $\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge 1)
π (Flächeninhalt des Kreise mit Radius 1)

Ansatz Approximation durch rationale Zahlen.

Beispiel: π



Definition $\mathbb{R}$ Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist eindeutig als *größte untere Schranke* einer geeigneten Teilmenge $M \subset \mathbb{Q}$ definiert.

Bemerkung $\mathbb{R} \simeq$ 'Zahlengerade'

Rechenregeln

Brüche:

Kürzen	$\frac{l\cdot m}{l\cdot n} = \frac{m}{n}$
Summe	$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{m\cdot n' + m'\cdot n}{nn'}$
Doppelbruch	$\frac{m/n}{m'/n'} = \frac{m\cdot n'}{n\cdot m'}$

In $\mathbb{R}$:

Kommutativges.	$a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
Asssoziativges.	$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivges.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Potenzen	- später -

Organisatorisches

Tutorien

Termin	Ort	Tutor
Mo 10-11	AVZ, Raum 116	Marcus Rang
Mo 11-12	AVZ, Raum 116	Marcus Rang
Di 12-13	Wegelerstr. 6, Raum 501	Stephan Knauf
Di 13-14	Wegelerstr. 6, Raum 501	Stephan Knauf
Di 16-17	Wegelerstr. 6, Raum 501	Stephan Knauf
Di 17-18	Wegelerstr. 6, Raum 501	Stephan Knauf
Mi 8-9	AVZ, Raum 2	Tomas Kruse
Mi 9-10	AVZ, Raum2	Tomas Kruse
Mi 16-17	Wegelerstr. 6, Raum 610	Timo Geltinger
Mi 17-18	Wegelerstr. 6, Raum 610	Timo Geltinger
Fr 14-15	Wegelerstr. 6, Raum 610	Marcus Rang
Fr 15-16	Wegelerstr. 6, Raum 610	Marcus Rang

Organisatorisches

Anmeldung zu den Tutorien: Ab heute 15.00 Uhr online auf der Vorlesungs-Home Page

www.math.tu-berlin.de/$\sim$mrenesse/agromath
Sprechzeiten Max v. Renesse
Freitags, 10.30-12.00 Uhr
Poppelsdorfer Allee 82
Zimmer 3.007

Die Statistik-Vorlesung von Herrn Eberle findet statt. (S. Vorlesungsverzeichnis)

Gegen Ende dieses Semesters werden **3 (versch.) Klausuren** parallel angeboten: Angew. Math. und Stat (BSc), Angew. Math. (Diplom), Statistik (Diplom).

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 3: Ungleichungen

Vergleichsoperationen

Definition

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

$a \leq b \Leftrightarrow (b - a > 0) \vee (a = b)$

(Analog '$>$' bzw. '$\geq$')

Satz

1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $a \leq b, c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3. $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$
4. $0 \leq a \leq b, 0 \leq c \leq d$ $\Rightarrow ac \leq bd$
5. $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

Beweis $\boxed{2}$

$bc - ac$

$=(b - a)c \geq 0$

Beweis $\boxed{4}$

$bd - ac$

$= b(d - c) + c(b - a)$

≥ 0

Beispiel

Aufgabe Bestimmen Sie die Menge L aller $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5 \quad (x \neq 0).$$

Lösung $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5 \iff \frac{5}{2x} \geq 5 \iff \frac{1}{x} \geq 2$

Fallunterscheidung

Fall 1. $x > 0$: $\frac{1}{x} \geq 2 \iff \frac{1}{2} \geq x$
$\implies L_1 = \{x \,|\, 0 < x \leq \frac{1}{2}\} \subset L$.

Fall 2. $x < 0$: $\frac{1}{x} \geq 2 \iff \frac{1}{2} \leq x$
$\implies L_2 = \{x \,|\, x < 0 \wedge x \geq \frac{1}{2}\} = \emptyset$.

Antwort $L = L_1 \cup L_2 = \{x \,|\, 0 < x \leq \frac{1}{2}\} = \text{'}]0, \frac{1}{2}]\text{'}$.

(Skizze) – Graph von $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ –

Exkurs: Intervalle

Definition $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall* $\Leftrightarrow$ (Mit je zwei Punkten $s < t$ liegen auch alle Zwischenpunkte $s < u < t$ in I).

Beispiele

1. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \wedge x < b\} =$ '$]a, b[$'
2. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \wedge x \leq b\} =$ '$]a, b]$'
3. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} =$ '$]a, \infty[$'
4. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \wedge x \leq b\} =$ '$[a, b]$'
5. $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\} =$ '$]-\infty, b]$'
6. $I = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, bzw. $I = \emptyset$.

Definition I *abgeschlossen* $\Leftrightarrow$ (Alle *Randpunkte* von I liegen in I.)
I *offen* $\Leftrightarrow$ (Kein *Randpunkt* von I liegt in I.) Ansonsten I *halboffen*.

Beispiele 1) offen, 2) halboffen, 3) offen, 4) abgeschlossen, 5) abgeschlossen 6) offen *und* abgeschlossen (keine Randpunkte).

Der Absolutbetrag

Definition $|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Satz

- $|-a| = |a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
- $|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$
- $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Beweis:

$$\begin{aligned} &|a+b| \\ &\quad = \begin{cases} a+b \\ -(a+b) \end{cases} \\ &\quad = \begin{cases} a+b \\ (-a)+(-b) \end{cases} \\ &\quad \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Definition $|a - b|$ *'Abstand' (Distanz)* von a und b ($a, b \in \mathbb{R}$).

Beispiel

Aufgabe Bestimmen Sie die Menge L aller $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < \frac{3}{2} \quad (x \neq -1)$$

Lösung Vorzeichenwechsel bei $x = 1$ bzw. $x = -1$.

Fall 1. $x \geq 1$: $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{-(1-x)}{1+x} < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow x - 1 < \frac{3}{2}(x+1)$
$\Longleftrightarrow -\frac{5}{2} < \frac{1}{2}x \Longleftrightarrow x > -5 \quad \Longrightarrow \quad L_1 = [1, \infty[$

Fall 2. $-1 < x < 1$: $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{1-x}{1+x} < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 1 - x < \frac{3}{2}(x+1)$
$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{5}{2}x \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad L_2 =]-\frac{1}{5}, 1[$

Fall 3. $x < -1$: $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{1-x}{-(1+x)} < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 1 - x < -\frac{3}{2}(x+1)$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}x < -\frac{5}{2}x \Longleftrightarrow x < -5 \quad \Longrightarrow \quad L_3 =]-\infty, -5[$

Antwort $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, 5[\, \cup \, [-\frac{1}{5}, \infty[= \mathbb{R} \setminus [-5, -\frac{1}{5}]$.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
`mrenesse@math.tu-berlin.de`

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 4:
Potenz und Logarithmus

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Erinnerung

Für $r \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{r^m = r \cdot r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}$$

$$\boxed{r^{-m} = \frac{1}{r^m}}$$

Eigenschaften

1. $r^m \cdot r^l = r^{l+m}$
2. $(r^l)^k = r^{k \cdot l}$
3. $r_1^l \cdot r_2^l = (r_1 \cdot r_2)^l$
4. $(r > s) \Leftrightarrow (r^m > s^m)$
   (Strenge Monotonie bzgl. Basis)

Wurzeln

Definition

$$\boxed{\begin{array}{c}(\text{s } \textit{m-te Wurzel} \text{ von r})\\ \Leftrightarrow \\ (s^m = r).\end{array}}$$

Schreibweise $\quad$ s = '$r^{\frac{1}{m}}$'

Satz $\quad$ *Für alle $r > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine (positive) m-te Wurzel $s = r^{\frac{1}{m}}$.*

Beweis $\quad$ $s = \mathrm{GuS}\{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^m \geq r\}$
wobei 'GuS' = Größte untere Schranke *('Infimum')*

Bestimmung von Wurzeln durch Intervallschachtelung

Beispiel $s = 2^{\frac{1}{3}} =?$

1. Schritt

$$\left.\begin{array}{ll} 1^3 < 2 & \Rightarrow 1 < s \\ 2^3 = 8 > 2 & \Rightarrow s < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow s \in]1,2[=:]a_1, b_1[.$$

2. Schritt $m_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} = \frac{3}{2}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_1^3 = \frac{27}{8} > 2 \Rightarrow s < m_1 \Rightarrow s \in]a_1, m_1[=:]a_2, b_2[$$

3. Schritt $m_2 = \frac{b_2 + a_2}{2} = \frac{5}{4}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_2^3 = \frac{125}{64} < 2 \Rightarrow s > m_2 \Rightarrow s \in]m_2, b_2[=:]a_3, b_3[$$

4. Schritt $m_3 = \frac{b_3 + a_4}{2} = \frac{11}{8}$ (Intervallmittelpunkt)

$$m_3^3 = \frac{1331}{512} > 2 \Rightarrow s < m_3 \Rightarrow s \in]a_3, m_3[=:]a_4, b_4[$$

nach 4 Schritten

$$\boxed{s \in]\tfrac{5}{4}, \tfrac{11}{8}[=]1.25, 1.375[} \quad (s \simeq 1,26).$$

Anwendungsbeispiel

Frage Ein Kugelförmiger Körper habe ein Fassungsvermögen vom 8000 Litern. Wie groß ist der Radius.

Antwort Formel für das Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$V = 8 \cdot 10^3 (10cm)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad 8 \cdot 10^3 (10cm)^3 \frac{3}{4}\frac{1}{\pi} = r^3 \\
&\iff \quad r = \left(8 \cdot 10^3 (10cm)^3 \frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\iff \quad r = 2 \cdot 10 \cdot 10cm \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\iff \quad r = 2 \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} m \simeq 2.6m
\end{aligned}$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition

Für $r > 0$ und $k, m \in \mathbb{N}$

$$\text{'}\mathbf{r^{\frac{k}{m}}}\text{'} := (r^{\frac{1}{m}})^k$$

$$\text{'}\mathbf{r^{-\frac{k}{m}}}\text{'} := \frac{1}{r^{\frac{k}{m}}}$$

Satz

1 $r^{\frac{l}{l\cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$

2 $r^{\frac{l}{k}} = (r^l)^{\frac{1}{k}}$

3 $r^{\frac{m\cdot l}{k\cdot l}} = r^{\frac{m}{k}}$

4 $r^{\frac{k}{l}} \cdot r^{\frac{k'}{l'}} = r^{\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}}$

5 $r_1^{\frac{k}{l}} \cdot r_2^{\frac{k}{l}} = (r_1 \cdot r_2)^{\frac{k}{l}}$

Beispiel:
Beweis von $\boxed{1}$
$(r^{\frac{l}{l\cdot k}})^k = \left((r^{\frac{1}{l\cdot k}})^l\right)^k$
$= (r^{\frac{1}{l\cdot k}})^{l\cdot k} = r$
und $(r^{\frac{1}{k}})^k = r$
$\Rightarrow r^{\frac{l}{l\cdot k}} = r^{\frac{1}{k}}$

Beispiele

1. $9^{\frac{5}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^5 = 3^5 = 243$
2. $9^{\frac{5}{2}} = (9^5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{59049} = 243$
3. $(\frac{1}{5})^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5} \simeq 11.18$
4. $\sqrt{10^8 m^2} = (10^8 m^2)^{\frac{1}{2}} = 10^4 m$

Potenzen mit reellen Exponenten

Beispiel $2^\pi = ?$

Definition Für $r \geq 1$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{'}\mathbf{r^s}\text{'} := \text{GuS}\{r^{\frac{k}{m}} \mid \tfrac{k}{m} \geq s\}}$$

(Analog) Für $0 < r < 1$ und $s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{'}\mathbf{r^s}\text{'} := \text{GuS}\{r^{\frac{k}{m}} \mid \tfrac{k}{m} \leq s\},}$$

Eigenschaften

1. $r^{s_1} \cdot r^{s_2} = r^{s_1+s_2}$
2. $(r^{s_1})^{s_2} = r^{s_1 \cdot s_2}$
3. $r_1^s \cdot r_2^s = (r_1 \cdot r_2)^s$
4. $s_1 > s_2, r > 1 \Rightarrow r^{s_1} > r^{s_2}$
5. $r_1 > r_2, s > 0 \Rightarrow r_1^s > r_2^s$

Logarithmus

Definition

r *Logarithmus* von a zur Basis b

$$\Leftrightarrow$$

$$a = b^r$$

Schreibweise $r =$ '$\log_b a$'

Satz *Für alle $a, b > 0$ existiert genau Logarithmus r von a zur Basis b.*

Beweis (für $b \geq 1$)

$$r = \mathrm{GuS}\{q \in \mathbb{Q} \mid b^q \geq a\}$$

Anwendungsbeispiel: Halbwertszeit

Zerfallgesetz

Der Zerfall einer Zellkultur wird beschrieben durch das Gesetz

$$\boxed{M(t) = M_0\gamma^{-t}}$$

mit

$$\begin{aligned} M_0 &> 0 && \text{(Anfangsmenge)} \\ \gamma = \left[\tfrac{M(1)-M_0}{M_0}\right]^{-1} &> 1 && \text{(Zerfallskonstante)} \end{aligned}$$

Frage

Zu welchem Zeitpunkt t_* ist nur noch die Hälfe der Anfangssmenge vorhanden?

Antwort

$$\begin{aligned} & M(t_*) = \tfrac{1}{2}M_0 \\ \Leftrightarrow \quad & M_0\gamma^{-t_*} = \tfrac{1}{2}M_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2} = \gamma^{-t_*} \\ \Leftrightarrow \quad & \log_\gamma(\tfrac{1}{2}) = -t_* \\ \Leftrightarrow \quad & t_* = -\log_\gamma(\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Logarithmusgesetze

1. $$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_b a}$$

2. $$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

3. $$\log_b(\tfrac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$$

4. $$\log_b(a^r) = r \log_b a$$

5. $$a^b = c^{b \cdot \log_c a}$$

Beispiel. Beweis von 1:
$c^{\log_c a} = a$
$c^{\log_c b \cdot \log_b a} = (c^{\log_c b})^{\log_b a} = (b)^{\log_b a} = a$
$\Rightarrow \log_c a = \log_c b \cdot \log_b a$

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 5: Funktionen

Der Funktionsbegriff

Definition

Eine *Funktion* besteht aus einem

'Definitionsbereich' $D \subset R$

und einer

'Funktionsvorschrift',

die jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Schreibweisen

- $f : D \to \mathbb{R}$
- $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
- $D \ni x \to y = f(x) \in \mathbb{R}$

Definition

$W(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ *'Wertebereich von f'*.

Beispiele

1. $D = \mathbb{R},\ f(x) = mx + b$
2. $D = \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
3. $D = [0, \infty[,\ f(x) = \sqrt{x}$
4. $D = \{1, 2, \pi, 4\}$,

x	1	2	π	4
y=f(x)	2	1	15	$\sqrt{2}$

5. $D = [0, 1] \cup \{2\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{falls } x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 1 & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

6. Pegelmessung an der Elbe:

t (in Stunden)	0	2	4	6	8
h (in cm)	319	330	360	372	365

Darstellung durch Funktionsgraphen

Definition

Die Menge aller Punktepaare

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, y) \mid x \in D, y = f(x)\}$$

heißt Funktionsgraph von $f : D \to \mathbb{R}$.

Der Graph kann als Punktmenge im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Beispiele

- Skizzen -

Elementare Eigenschaften von Funktionen

- f *'gerade'* $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
  Beispiel $y = x^2$
- f *'ungerade'* $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$
  Beispiel $y = x^3$
- f *'monotonon wachsend'*
  $\Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
  Beispiel $y = mx + b$ mit $m \geq 0$.
- f *'monoton fallend'*
  $\Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
  Beispiel $y = mx + b$ mit ≤ 0.
- f *'periodisch mit Periode T'*
  $\Leftrightarrow f(x + T) = f(x)$
  Beispiel: f(x)=Iodidkonzentration zum Zeitpunkt x bei der Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr) ...

Die Briggs-Rauscher-Reaktion (Ioduhr)

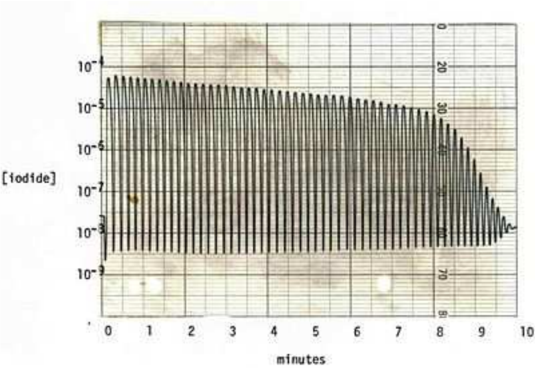


Figure . Oscillations produced by a solution of 0.050M potassium iodate, 0.038M malonic acid, 0.0050M manganese II sulfate, 0.88M hydrogen peroxide, 0.035M perchloric acid and 0.01% starch.

: (Quelle: Wikipedia)

Standard-Funktionen

Lineare Fkt.	$f(x) = mx + b$, $D(f) = \mathbb{R}$
Polynom	$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_Nx^N$, $D(f) = \mathbb{R}$ (Bezeichung $a_0, a_1, \ldots, a_N$ *'Koeffizienten'*, N *'Grad'*.)
Rationale Fkt.	$f = \frac{g}{h}$ mit g, h Polynom. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\}$.
Betrag	$f(x) = \lvert x\rvert$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Potenzfkt.	$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $D(f) =]0, \infty[$ bzw. $[0, \infty[$.
Exponentialfkt.	$f(x) = a^x$, $(a \geq 0)$, $D(f) = \mathbb{R}$.
Logarithmusfkt.	$f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$, $D(f) =]0, \infty[$

Operationen mit Funktionen

Summe f+g: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$.

Differenz $f - g$

Produkt $f \cdot g$: - analog -

Quotient: $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $x \in D(f) \cap D(g)$ und $g(x) \neq 0$.

Beispiel: $f(x) = x^2, g(x) = x \Rightarrow \frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \frac{f}{g}(x) = x$.

Verkettung $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, falls $g(x) \in D(f)$.

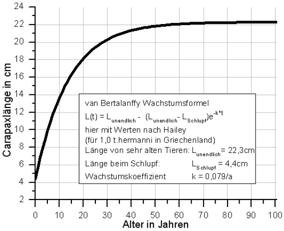
Beispiel 1: $D(g) = [1, \infty[, g(x) = x - 1$, $D(f) = [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$
$\Rightarrow f \circ g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-1}$.

Beispiel 2: Gewichtszunahme bei Schildkröten ...

Beispiel: Schildkrötenwachstum

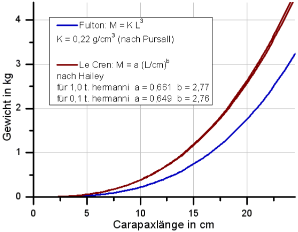
Bertalannfy Wachstumsgesetz:

Alter $\longrightarrow$ Länge

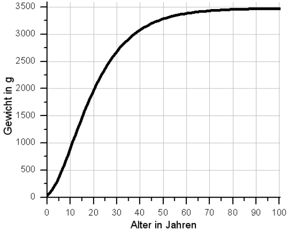


Fulton'sches Gewichtsgesetz

Länge $\longrightarrow$ Gewicht



Alter $\longrightarrow$ Gewicht



Umkehrfunktion

Definition Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt umkehrbar, wenn der Graph jede Parallele zur x-Achse höchstens einmal trifft.

Beispiele

- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ umkehrbar
- $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nicht umkehrbar
- $D = [0, \infty[$, $f(x) = x^2$ umkehrbar

Defintion Falls $f : D \to \mathbb{R}$ umkehrbar und $y \in W(f)$, dann ex. genau ein $x = x(y)$, so dass $(x, y) \in \mathrm{graph}(f)$. Die Zuordnung $W(f) \ni y \to x(y) \in \mathbb{R}$ defniert die *Umkehrfunktion von f*.

Schreibweise $f^{-1} : W(f) \to \mathbb{R}$

Grafisch $\mathrm{graph}(f^{-1}) = \{(y, x) \,|\, y \in W(f), f(x) = y\}$
(Spiegelung von graph(f) an der Diagonalen)

Berechnung der Umkehrfunktion - Beispiel

Zerfallgesetz

$f(x) = M_0\gamma^{-x}$, $D(f) = [0, \infty[$.
mit $M_0 > 0, \gamma > 1$

Monotonie

Wegen $\gamma > 1$ ist $x \to \gamma^{-x} = (\frac{1}{\gamma})^x$ strikt monoton fallend $\Rightarrow f$ umkehrbar.

Wertebereich

$W(f) =]0, M_0]$

Umkehrfunktion

Sei $y \in]0, M_0]$, gesucht: $x \in D(f)$ so dass $f(x) = y$.

$$\begin{gathered} y = f(x) = M_0\gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{M_0} = \gamma^{-x} \\ \Leftrightarrow -x = \log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \\ \Leftrightarrow x = -\log_\gamma(\frac{y}{M_0}) \end{gathered}$$

Also $f^{-1}(y) = -\log_\gamma(\frac{y}{M_0})$, $D(f^{-1}) =]0, M_0]$.

Bedeutung

$f^{-1}(y) =$ Zeitpunkt x, wenn $f(x) = y$.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 6:
Polynome und Winkelfunktionen

Quadratische Funktionen

Definition $f(x) = ax^2 + bx + c$ *'Quadratische Funktion'*

Scheitelform

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$
$$= a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2))$$
$$= a\big((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\big) =: A\big((x - B)^2 + C\big)$$

Scheitelpunkt $S = \big(-\frac{b}{2a}, \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\big) = (B, C)$

Öffnung nach oben: $A > 0$, nach unten: $A < 0$.

Nullstellen $x_{1/2} = B \pm \sqrt{-C} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}$ (*'p-q-Formel'*), falls $C \leq 0$, ansonsten keine.

Linear-Zerlegung

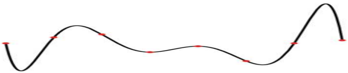
$$A(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$
$$= A\big((x - B) - \sqrt{-C}\big) \cdot \big((x - B) + \sqrt{-C}\big)$$
$$= A((x - B)^2 + C) = f(x)$$

Polynome

Definition $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_N x^N$ *'Polynom'*

Beispiel $p(x) = 3(x-1)(x-5)(x+2) = 3(x-1)(x^2-3x-10)$
$= 3x^2 - 12x^2 - 21x + 30$

Satz **(Interpolation)** Für $N+1$ Punktepaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{N+1}, y_{N+1})$ (mit $x_i \neq x_j$ falls $i \neq j$) ex. Polynom $x \to p(x)$ mit Grad N, so dass $p(x_i) = y_i,\ i = 1, \ldots N+1$



Beweis (Induktiv) $p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$

Polynomdivision

Satz. $p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ mit grad(r) < grad(q).

Beispiel 1.

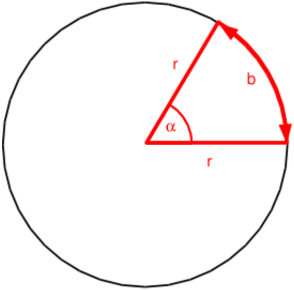
$$
\begin{array}{l}
\quad (x^4 \; +3x^3 \; -5x^2 \; +3x \; -5) : (2x+1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{8}x + \frac{49}{16} - \frac{129}{16}\frac{1}{2x+1} \\
-\underline{(x^4 + \frac{1}{2}x^3)} \\
\qquad\quad \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 \\
\qquad -\underline{(\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2)} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{25}{4}x^2 + 3x \\
\qquad\qquad\quad -\underline{(-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{8}x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{49}{8}x - 5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\underline{(\frac{49}{8}x + \frac{49}{16})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{129}{16} = \text{Rest}
\end{array}
$$

Beispiel 2.

$(3x^5 + 6x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 + 2x - 1) = 3x^2 + 3x - 3 + \frac{9x-1}{x^2+2x-1}$

Die Winkelfunktionen

Winkel- u. Bogenmaß



Eine Ameise läuft auf einem Kreisbogen mit Radius r, wobei der Winkelbereich $[0, \alpha]$ überstrichen wird. Welche Wegstrecke hat sie zurückgelegt?

Fall r=1

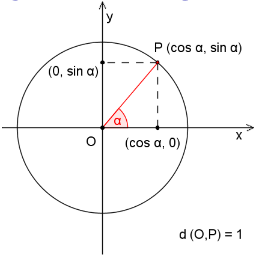
b ist proportional zu α.Falls $\alpha = 360° \Rightarrow b = 2\pi$ (Kreisumfang), d.h.

$$\boxed{b(\alpha) = \frac{2\pi}{360}\alpha}$$

r beliebig

$b = \frac{2\pi}{360}\alpha \cdot r$

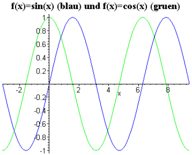
Sinus und Cosinus



Definition

$$\left.\begin{array}{l}\text{sinus} = \text{y-Koordinate}\\ \text{cosinus} = \text{x-Koordinate}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{vom Schnittpunkt}\\ \text{zum Winkel } \alpha\end{array}$$

Graphen

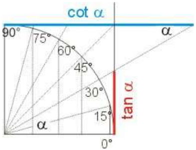


2π periodisch,
sin ungerade, cos gerade
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Pythagoras

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Tangens und Cotangens

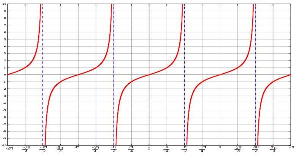


Definition

tangens $=$ Steigung $= m = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ zum Winkel α

cotangens $= m' = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ Steigung zum Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$

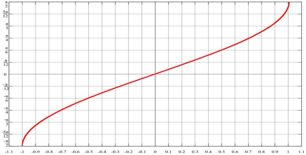
Graph



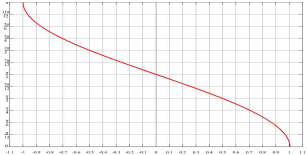
π periodisch,
ungerade

Arkusfunktionen

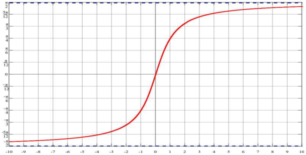
$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$



$$\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$



$$\arctan = \tan^{-1} :]-\infty, \infty[\longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

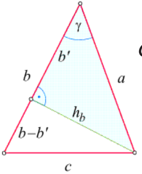


Trigonometrische Identitäten

'Additionstheoreme'

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos x + \sin y \cos x\end{array}}$$

'Cosinussatz'



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
h_b &= a\sin\gamma \\
b' &= a\cos\gamma \Rightarrow b - b' = b - a\cos\gamma \\
\Rightarrow c^2 &= h_b^2 + (b - b')^2 \\
&= a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma \\
&= a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}$$

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 7:
Folgen

Folgen

Definition

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *'Zahlenfolge'*.

Schreibweise

$(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beispiele

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \notin \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \\ 1 & \text{falls } n \in \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \end{cases}$
- $c_n = (-1)^n$
- $d_n = q^n$ mit $q \in \mathbb{R}$
- $e_n = \sin(\frac{1}{n})$
- $f_n = \cos(\frac{1}{n})$
- $g_1 = 2,\ g_{n+1} = \frac{3}{4g_n} + 1$
- $h_1 = 2,\ h_2 = 2,\ h_{n+1} = h_n + h_{n-1}$

Folgengrenzwert

Definiton

$$a \ \text{'}\textit{Grenzwert}\text{'} \text{ von } (a_n)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gilt } \textit{für schließlich alle } n\text{:}$$
$$|a - a_n| < \epsilon.$$

Schreibweise $a = \text{'}\lim\limits_{n\to\infty} a_n\text{'}, \ \text{'}a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\text{'}$

Sprechweisen '(a_n) *konvergiert/geht gegen a*'

andernfalls '(a_n) *divergent*', '$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *ex. nicht*'

Beispiel $\lim \frac{1}{n} = 0$

Zu $\epsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n_0 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$

$$\Rightarrow |a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ falls } n \geq n_0.$$

Beispiele

- $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \notin \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \\ 1 & \text{falls } n \in \{10^k, k = 1, 2, \dots\} \end{cases}$
  $\Rightarrow \lim b_n$ ex. nicht.
- $\lim q^n \begin{cases} = 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ = 1 & \text{falls } q = 1 \\ \text{ex. nicht} & \text{falls } |q| > 1 \text{ oder } q = -1 \end{cases}$
- $\lim \sin(\frac{1}{n}) = 0, \lim \cos(\frac{1}{n}) = 1$

Grenzwertsatz

> Falls $\lim a_n$ und $\lim b_n$ existieren, dann
>
> $$\lim(a_n \otimes b_n) = (\lim a_n) \otimes (\lim b_n)$$
>
> wobei $\otimes =$ '$+$', '$-$' bzw. '$*$';
> auch $\otimes =$ '$\div$', sofern $\lim b_n \neq 0$.

Beispiel

$$\frac{5}{4} = \frac{5+0}{4+0+0} = \frac{\lim(5+\frac{3}{n^2})}{\lim(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}$$

$$= \lim \frac{(5+\frac{3}{n^2})}{(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim \frac{5n^2+3}{4n^2+2n+1}$$

Summen

Beispiel Bob (der B-Meister) will einen Wolkenkratzer bauen. Am 1. Tag schafft er einem Meter, am Tag darauf die Hälfte, dh. $\frac{1}{2}$ m, danach wieder die Hälfte, dh. $\frac{1}{4}$ m.

Frage Wie hoch wird das Haus werden (B sei unsterblich)?

In Formeln Haushöhe nach n Tagen

$$h_n = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{2})^{i-1}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \tfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

$q = \frac{1}{2}$

$$h_n = 1 + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=0}^{n-2} (\tfrac{1}{2})^i$$

$$\Rightarrow h_n = 1 + \tfrac{1}{2} \tfrac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + (1 - (\tfrac{1}{2})^{n-1}) \xrightarrow{n \to \infty} 2.$$

Antwort Bobs Wolkenkratzer wird 2m hoch.

Reihen

Sprechweise Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann heißt

$$S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

'n-te Partialsumme der Reihe $\sum a_i$.'

Definition Falls $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ existiert, so heißt die *'Reihe $\sum a_i$ konvergent.'*

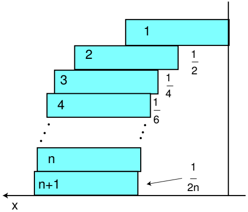
Schreibweise $S = \lim S_n =$ '$\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$'.

Quotientenkrit. Falls $\lim_{i\to\infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < 1$, so ist $\sum a_i$ konvergent.

Beispiel $\sum \frac{n}{2^n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \ldots$ konvergent nach Quot. Krit.

Beispiel $\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ Quot-Krit. hilft nicht.
Stattdessen ('*Teleskopsumme*')
$(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{n^2}) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$
$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) =$
$1 + 1 - \frac{1}{n} \le 2 \Rightarrow \sum \frac{1}{k^2} < 2$ existiert.

Die Harmonische Reihe (Inkabrücke)



Setze den jeweils den fertigen Turm auf einen neuen Stein, so dass der Schwerpunkt genau auf der Kante des unteren Steins liegt:
S_n: x-Koordinate des Schwerpunktes bei n Steinen

$$S_n = \frac{1}{n}((n-1)S_{n-1} + S_{n-1} + \frac{1}{2})$$
$$= S_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Harm. Reihe
$\sum \frac{1}{n} = \infty$

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{8} + \dots)$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots \Rightarrow \text{divergent}$$

$\Rightarrow$ Die Brücke kann beliebig weit gebaut werden.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 8:
Stetigkeit und Ableitung

Stetigkeit

Definition

$f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt *'stetig'* in $a \in D$, falls $\lim f(a_n) = f(a)$ *für jede* Folge (a_n) mit $a_n \xrightarrow{n} a$.
f heißt *'stetig auf D'*, falls f stetig in allen $a \in D$.

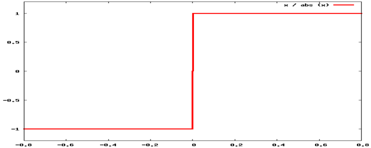
Beispiele

- $f(x) = x^2$, stetig

  Beweis: Es sei $a_n \longrightarrow a$, dann

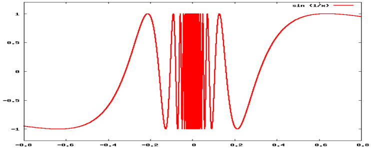
  $$\begin{aligned} |f(a_n) - f(a)| &= |(a_n)^2 - a^2| \\ &= |a - a_n| \cdot |a + a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot 2|a| = 0 \end{aligned}$$

- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \leq 0 \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$, unstetig in $a = 0$.

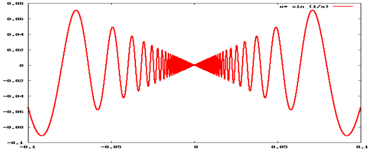


Beispiele - Oszillation

- $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ unstetig



- $f(x) = \begin{cases} 2 + x\sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x > 0 \\ 2 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$, stetig



Beweis (für $a = 0$): Sei $a_n \to a = 0$, dann

$$|f(a_n) - f(0)| = |2 + a_n \sin(\tfrac{1}{a_n}) - 2| = |a_n \sin(\tfrac{1}{a_n})| \leq |a_n| \to 0$$

Sätze über Stetige Funktionen

Zwischenwertsatz

Es sei $f : [l, r] \mapsto \mathbb{R}$ stetig, dann ex. zu jedem

$$\boxed{\begin{array}{c} y \in [f(l), f(r)] \text{ ein } \xi \in [l, r], \\ \text{so dass } f(\xi) = y. \end{array}}$$

Beispiel

$t \to x(t)$ (Abstand von x z. Zt. t) mit $x(0) = 0$ und $x(1h) = 30km \Rightarrow$ ex. $t_* \in [0, 1h]$ mit $x(t_*) = 17.34km$.

Satz vom Max./Min.

Es sei $f : [l, r] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ex. x_m und x_M, so dass

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \text{ für} \\ \text{alle } x \in [l, r]. \end{array}}$$

Sprechweise

x_m *'Minimal<u>stelle</u>'*, $f(x_m)$ *'Mini<u>mum</u>'*.
x_M *'Maximal<u>stelle</u>'*, $f(x_M)$ *'Maxi<u>mum</u>'*.

Bemerkung

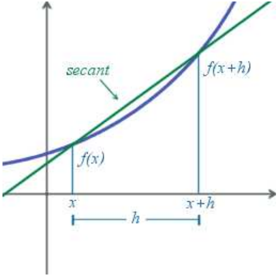
Die Stetigkeit von f, g überträgt sich auf $f \otimes g$ mit $\otimes \in \{+, -, \cdot, \div, \circ\}$. (Achtung bei $\div$: $g \neq 0$?)

Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \subset\rightarrow \mathbb{R}$ heißt *'differenzierbar im Punkt $a \in D$'*, falls eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{für } \textit{jede Folge } a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \\ \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a_0)}{a_n-a} = m.\end{array}}$$



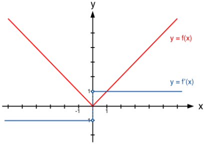
Schreibweisen $'m = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)'$

Sprechweise m = *'Ableitung von f im Punkte a'*

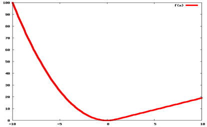
Beispiele

- $f(x) = mx + C$ differenzierbar und $f'(x) = m$

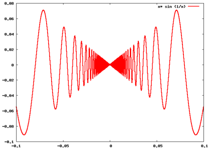
- $f(x) = |x|$
  nicht differenzierbar in 0



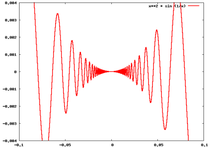
- $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$
  differenzierbar



- $$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
  nicht differenzierbar in 0



- $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
  differenzierbar



Geometrische Bedeutung

Tangente Falls f in a differenzierbar mit Ableitung m, so ist

$$\boxed{t_a(x) = mx + (f(a) - ma)}$$

die *'Tangente'* an f in a.

Praktische Bedeutung

- $x \to f(x)$, $f'(x)$ Steigung
- $t \to p(t)$, $p'(t)$ Geschwindigkeit
- $t \to q(t)$, $q'(t)$ Stromstärke
- $t \to v(t)$, $v'(t)$ Beschleunigung
- $p \to m(p)$, $m'(p)$ Preiselastizität ...

Satz Falls f diffbar in a, so gibt es zu jedem ϵ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - t_a(x)| \leq \epsilon|a - x|$ für alle x mit $|a - x| < \delta$.

Bemerkung Das ist äquivalent zur Definition von Differenzierbarkeit.

Korollar f differenzierbar bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 9:
Der Ableitungskalkül

Berechnung der Ableitung: Beispiele

$f(x) = x^2$

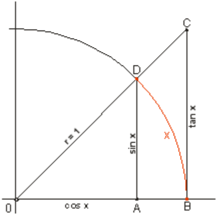
$$\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^2-a^2}{a_n-a} = \frac{(a_n-a)(a_n+a)}{a_n-a} = a_n + a$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \lim_n (a_n + a) = 2a = f'(a).$$

$f(x) = x^k$

$$\frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} = \frac{a_n^k-a^k}{a_n-a} = a_n^{k-1} + a \cdot a_n^{k-2} + \cdots + a^{k-2} a_n + a^{k-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a} =$$
$$\lim_n (a_n^{k-1} + a_n^{k-2} + \cdots + a_n a^{k-2} + a^{k-1}) = k a^{k-1} = f'(a).$$

$f(x) = \sin(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$$



Vergleich der Flächeninhalte
(Eingeschlossene Fläche: A$= \frac{x}{2}$.)

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$
$$\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$
$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) \leq 1.$$

Übung

$$\overset{\textit{Additionstheoreme}}{\Longrightarrow} \sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x).$$

Beispiele (II) - Der natürliche Logarithmus

$f(x) = C^x$ $\quad \frac{f(a)-f(a_n)}{a-a_n} = C^a \cdot \frac{C^{a_n-a}-1}{a_n-a} = C^a \cdot \frac{C^{\delta_n}-1}{\delta_n}$, $\delta_n = a_n - a$.

Satz Für $C > 0$ und $\delta_n \to 0$ existiert

$$\boxed{\lim_{n\to 0} \frac{C^{\delta_n}-1}{\delta_n} =: \ln(C)}$$

und es gilt die *'Funktionalgleichung des Logarithmus'*

$$\boxed{\ln(C_1 \cdot C_2) = \ln(C_1) + \ln(C_2)}$$

Definition Die *'Euler'sche Zahl'* e is definiert durch $\ln(e) = 1$, d.h.

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}(1 + \tfrac{1}{n})^n \simeq 2,7182}$$

L. Euler (1707-1783)

Korollar 1 Für $f(x) = C^x$ mit $C > 0$ ist $f'(x) = \ln(C) \cdot C^x$.

Korollar 2 $\ln C = \log_e(C)$

e-Funktion

$$\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f(x).}$$

Ableitungsregeln

Summenregel

Falls $f'(a)$ und $g'(a)$ ex. in $a \in D_f \cap D_g$ so ex.

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

Leibniz-Regel

G.W. Leibniz (1646-1716)

Falls $f'(a)$ und $g'(a)$ ex. in $a \in D_f \cap D_g$ so ex.

$$\boxed{(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}$$

Beispiel

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
$(f \cdot g)(x) = x^5$, $(f \cdot g)'(x) = 5x^4 = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$

Konsequenzen aus der Leibniz-Regel

Kettenregel Falls $g'(a)$ ex. und $f'(A)$ ex. in $A = g(a)$, dann ex.

$$\boxed{(f \circ g)'(a) = f'(A) \cdot g'(a)}$$

Beispiel $h(x) = e^{3x^2}$, $h = f \circ g$ mit $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x^2$
$h'(x) = (f \circ g)'(x) = e^{3x^2} \cdot 3 \cdot 2x = 6xe^{3x^2}$.

Quotientenregel Falls $f'(a)$ ex. und $g'(a) \neq 0$ ex. dann ex.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}}$$

Beispiel

$$h(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), \qquad (x \neq \tfrac{2k+1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Konsequenzen aus der Leibniz-Regel (II)

Umkehrfunktion

Falls $0 \neq f'(a)$ ex. in $a = f^{-1}(x)$, dann ex.

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(a)}}$$

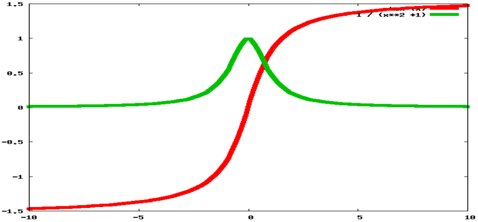
Beispiel 1

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \tan x,\ f^{-1}(x) = \arctan x$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{1+\tan^2(a)} \text{ mit } a = \arctan x, \text{ d.h.}$$

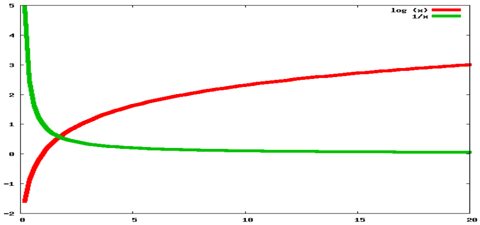
$$= \frac{1}{1+\tan(\arctan x)\cdot\tan(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$



Konsequenzen aus der Leibniz-Regel (III)

Beispiel 2
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = e^x,\ f^{-1}(x) = \ln(x),\ (x > 0)$$
$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(a)|_{a=\ln(x)}} = \frac{1}{e^a_{|a=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$



Beispiel 3
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$h(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$
$$\Rightarrow h = f \circ g \text{ mit } f(x) = e^x,\ g(x) = \alpha \ln x$$
$$\Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 10: Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben

Kurvendiskussion von $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ (I)

Maximaler Definitionsbereich

$D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie

f weder gerade ($f(x) \stackrel{?}{=} f(-x)$)
noch ungerade ($f(x) \stackrel{?}{=} -f(-x)$).

Asymptotik

$$f(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } x \to +\infty \\ +\infty & \text{für } x \to -\infty \end{cases}$$

Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, i.e. $x_N = 0$.
(D.h. es ex. genau eine Nullstelle $x_N = 0$)

Wachstumsverhalten

$f'(x) = 2xe^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} = (2x - \frac{1}{2}x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x - \frac{1}{2}x^2)e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow (2x - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x \cdot (4 - x) > 0$
$\Rightarrow f$ monoton wachsend auf $[0, 4]$
f monton fallend auf $]-\infty, 0[$ und $[4, \infty[$

Kurvendiskussion von $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ (II)

Lokale Extremstellen

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Notwendiges Kriterium:}\\ f'(x_e) = 0.\end{array}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x_e \in \{0, 4\}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Hinreichendes Kriterium:}\\ f'(x_e) = 0 \text{ und } f''(x_e) \neq 0\end{array}}$$

$f''(x) = ((2-x) - \frac{1}{4}x \cdot (4-x))e^{-\frac{1}{2}x}$
$f''(0) = 2e^0 = 2 > 0 \Rightarrow x_e = 0$ *lok. Minimalstelle*
$f''(4) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow x_e = 4$ *lok. Maximalstelle*

Globale Extremstellen

$f(x) \stackrel{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow$ glob. Maximum ex. nicht
$f(0) = 0,\ f(x) \geq 0 \Rightarrow x = 0$ *globale Minimalstelle*
und $0 = f(0)$ *globales Minimum*

Wertebereich

$W_f = [0, \infty[$

Kurvendiskussion von $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$ (III)

Wendestellen

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Notwendiges Kriterium:}\\ f''(x_w) = 0\end{array}}$$

$$f''(x) = ((2-x) - \tfrac{1}{4}x \cdot (4-x))e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$
$$\Leftrightarrow ((2-x) - \tfrac{1}{4}x \cdot (4-x)) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_w = 4 \pm 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ auf }]-\infty, 4-2\sqrt{2}] \text{ und } [4+2\sqrt{2}, +\infty[$$
$$\Rightarrow f''(x) \leq 0 \text{ auf }]4-2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2}]$$
$$\Rightarrow x_{w,1} = 4 - 2\sqrt{2} \text{ und } x_{w,2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

konkav/konvex

f *konvex* auf $]-\infty, 4-2\sqrt{2}]$ und $[4+2\sqrt{2}, +\infty[$
f *konkav* auf $[4-2\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2}]$

Graph

– Skizze –

Zusammenfassung

Satz: Falls $f'(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$: f motonon wachsend.
Falls $f'(x) \leq 0$ für $x \in [a, b]$: f motonon fallend.

Satz: Falls x_e lokale Extremstelle, dann $f'(x_e) = 0$

Satz: Falls $f'(x_e) = 0$ und $f''(x_e) \neq 0$: x_e lokale Extremstelle.
($f''(x_e) > 0$: lok. Min.; $f''(x_e) < 0$: lok. Max.)

Bemerkung: Globale Extremstellen? Vergleiche mit anderen lok. Extremstellen und mit '$f(+\infty)$' bzw. '$f(-\infty)$'

Satz: Falls $f''(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$: f n.o.gekrümmt/ *'konvex'*
Falls $f''(x) \leq 0$ für $x \in [a, b]$: f n.u. gekrümmt/ *'konkav'*

Satz: Falls x_w Wendestelle, dann $f''(x_w) = 0$

Satz: Falls $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$: x_w Wendestelle.
($f'''(x_w) > 0$: Übergang konkav $\rightarrow$ konvex ;
$f'''(x_w) < 0$: Übergang konvex $\rightarrow$ konkav)

Hintergrund:

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Definition $f :]l, r[\to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf $]l, r[$, falls f differenzierbar in allen Punkten $a \in]l, r[$.

Bemerkung Evtl. f *'einseitig differenzierbar'* in l bzw. r.

Mittelwertsatz Falls $f : [l, r] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]l, r[$, dann ex. ein $\xi \in]l, r[$, so dass

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(r) - f(l)}{r - l}.}$$

Beispiel Streckenprofil bei der Tour der France:
$[0, 150km] \ni x \to h(x)$
(Höhe (über N.N.) bei Wegepunkt x.)
Durschnittliche Steigung
$d = \frac{h(150km) - h(0)}{150km} = \frac{5km}{150km} = 3.3\%.$
$\Rightarrow$ Es ex. x_*, so dass $h'(x_*) = 3.3\%.$

Extremwertaufgaben - Beispiel

Aufgabe Wie sind Höhe und Radius einer zylindrischen Dose zu wählen, so dass (bei vorgegebenem Volumen) der Materialverbrauch minimal ist?

Lösung Volumen $V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{\pi r^2}$
Oberfläche $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$.
$\Rightarrow O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2V\frac{1}{r}$
$\Rightarrow$ Minimierungsaufgabe:
Finde r_m, so dass $O(r_m)$ minimal.
Notw. Bedingung: $O'(r_m) = 0$.
$O'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = h}$$

Da $O(r) \to \infty$ für $r \to 0$ oder $r \to \infty$ ist r_m tatsächlich optimal.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 11:

Der Satz von Taylor
Elementare Differentialgleichungen

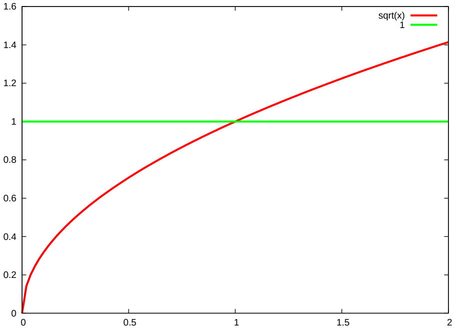
Der Satz von Taylor – Beispiel

Aufgabe

Berechne $\sqrt{1.3}$ möglichst genau
ohne Taschenrechner! (TR: 1.1401754)

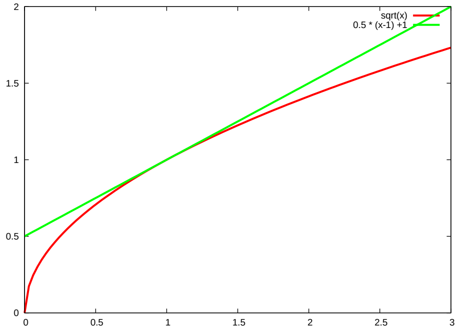
0. Idee: Konstante

$f(x) = \sqrt{x}$, gesucht $f(1.3)$.



$f(1.3) \simeq C$ mit $C = f(1) = 1$.
Approximationsfehler: $\Delta_0 = 0.1401$

1. Idee: Tangente

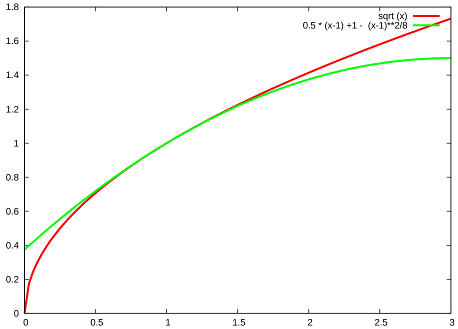


$t_a(x) = m \cdot (x - a) + C$
mit $m = f'(a)$ und $C = f(a)$ und $a = 1$.
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow t_1(x) = \frac{1}{2}(x-1) + 1}$$

$\Rightarrow t_1(1.3) = 0.15 + 1 = 1.15$
Approximationsfehler: $\Delta_1 = -0.0099$

2. Idee: Parabel



$p = p_a(x) = t_a(x) + \alpha(x-a)^2$,wobei α so gewählt, dass

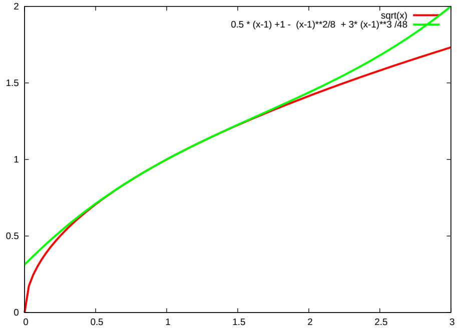
$$\boxed{p''(a) = f''(a) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} f''(a)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(x^{-1/2})' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\Rightarrow p_a(x) = t_a(x) - \frac{1}{8}(x-a)^2}$$

i.e $p_a(1.3) = 1.15 - 0.09/8 = 1.13875$
Approximationsfehler: $\Delta_2 = +0.002$

3. Idee: Polynom 3. Ordnung



$q_a(x) = p_a(x) + \beta(x-a)^3$,wobei β so gewählt, dass

$$\boxed{q'''(a) = f'''(a) \Rightarrow \beta = \frac{1}{6} f'''(a)}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}(x^{-3/2})' = \frac{3}{8}(x^{-5/2}), \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\Rightarrow q_a(x) = p_a(x) + \frac{3}{48}(x-a)^3}$$

i.e $q_a(1.3) = 1.13875 + \frac{3}{48} \cdot 0.3^3 = 1.1404375$
Approximationsfehler: $\Delta_3 = +0.00028$

Satz von Taylor - Die Aussage

Voraussetzung $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ mit Ableitungen f', f'', $\dots$, $f^{(k)}$

Definition *'Taylorpolynom k-ten Grades von f zum Enwicklungspunkt a'*

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 \\ &\qquad + \cdots + \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \\ &= \sum_{m=0}^{k} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m \end{aligned}}$$

Satz v. Taylor Falls $f^{(k+1)}$ ex. und $|f^{(k+1)}(x)| \leq C$ für $x \in]l,r[$,dann

$$\boxed{|\Delta_k|(x) := |f(x) - p(x)| \leq \frac{C}{(k+1)!}|x-a|^{k+1}.}$$

Beispiel

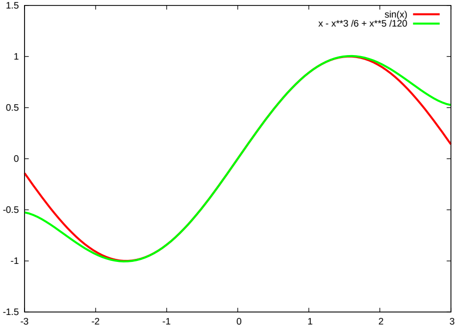
$f(x) = \sin(x)$
$a = 0$

$\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$,$\sin''(0) = -\sin(0) = 0$,
$\sin'''(0) = -\cos(0) = -1$, $\sin^{(iv)}(0) = \sin(0) = 0$, ...

m	0	1	2	3	4	5	6	...
$\sin^{(m)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	...

Taylorpolynom

$p(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \qquad (k = 6)$



Anwendung: Fortsetzung von Messfehlern

Aufgabe Sie peilen das Dach eines Hauses in 100m Entfernung unter einem Horizontalwinkel von $10 \pm 1^\circ$. Wie genau können Sie die Haushöhe damit bestimmen?

Antwort

$$h_* = h(\alpha_*) = 100 \sin(\alpha_*),$$
$$\alpha_* \in [10-1, 10+1]$$
$$\Rightarrow |\Delta h| = |h(\alpha_*) - h(\alpha)| \le 100 \cdot C|\alpha - \alpha_*| = 100 \cdot C \cdot \tfrac{0.1}{360} \cdot 2\pi,$$

wobei

$$\begin{aligned} C &= \max\{\sin'(x) \,\big|\, x \in [10^\circ - 1^\circ, 10^\circ + 1^\circ]\} \\ &= \max\{\cos(x) \,\big|\, x \in [10^\circ - 1^\circ, 10^\circ + 1^\circ]\} \\ &\simeq 0.98 \end{aligned}$$

$$\boxed{|\Delta h| \le 0.172m = 17.2cm}$$

Ausblick: Differentialgleichungen

Beispiel Ein Bakterienstamm reproduziert sich mit einer kontiniuierlichen Rate von $\rho = \frac{13\%}{min}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat die Kultur eine Größe von $2g$. Wie groß ist die Kultur nach einer Stunde?

Bemerkung Bedeutung kontin. Reproduktionsrate:

$$\rho = \lim_{\Delta \to 0} \frac{Menge(t+\Delta) - Menge(t)}{Menge(t)} \Big/ \Delta$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{M(t+\Delta) - M(t)}{\Delta} \frac{1}{M(t)} = M'(t) \frac{1}{M(t)}$$

$\Rightarrow$ Finde $M(.)$

$$\boxed{\text{mit } M'(t) = \frac{0.13}{min} M(t) \text{ und } M(0) = 2g.}$$

Lösung $M(t) = 2g \cdot e^{\frac{0.13}{min} \cdot t}$

Antwort $M(1h) = 2g \cdot e^{\frac{0.13}{min} \cdot 1h} = 2g \cdot e^{\frac{0.13}{min} 60min} = 2e^{7.8} \cdot g \simeq 4881$

$$\boxed{\Rightarrow M(1h) = 4.88kg}$$

Die Logistische Differentialgleichung

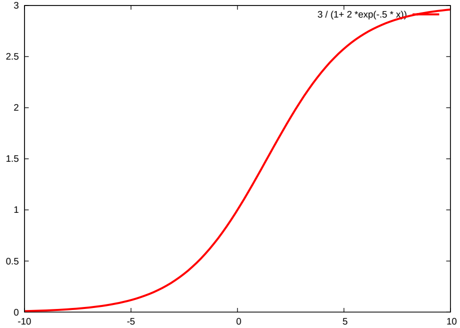
Verhulst Modell

$$\boxed{M'(t) = \rho \cdot M(t) \cdot (1 - \frac{M(t)}{K})}$$

K : Kapazität (eines Ökotops etc.)

Lösung

$$M(t) = K \frac{M_0}{M_0 + (K - M_0)e^{-\rho t}}$$



Anwendungen

Populationen, Tumorwachstum, Schildkröten ...

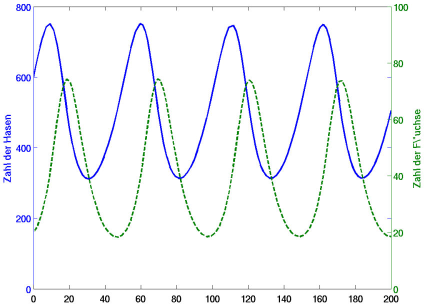
Räuber-Beute Systeme

Lotka-Volterra Differentialgl.

$$B'(t) = B(t)(\alpha - \beta \cdot R(t))$$

$$R'(t) = R(t)(\gamma B(t) - \delta)$$

Lösung nicht explizit bestimmbar. Verstehbar mit anderen mathematischen Methoden.



Anwendungen

Theoret. Ökologie, Chemie, Sozialwissenschaften ...

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 12: Integration

Beispiel

Frage Eine Kugel wird zum Zeitpunkt $t = 0$ von einer gewissen Anfangshöhe fallengelassen. Wie gross ist die im Zeitintervall $[2\,\text{sec}, 5\,\text{sec}]$ zurückgelegte Wegstrecke?

Bemerkung Beschleunigungsgesetz im Schwerefeld der Erde: $v(t) = g \cdot t$ mit $g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$

Antwort $t \to x(t)$ (Position bei t sec); gefragt $x(5) - x(2) \stackrel{?}{=}$

Approximativ

$$x(3)-x(2) \simeq v(2)\cdot 1\,\text{sec} = 9,81\frac{m}{\text{sec}^2}\cdot 2\,\text{sec}\cdot 1\,\text{sec} = 19,6m$$
$$x(4)-x(3) \simeq v(3)\cdot 1\,\text{sec} = 9,81\frac{m}{\text{sec}^2}\cdot 3\,\text{sec}\cdot 1\,\text{sec} \simeq 29,4m$$
$$x(5)-x(4) \simeq v(4)\cdot 1\,\text{sec} = 9,81\frac{m}{\text{sec}^2}\cdot 4\,\text{sec}\cdot 1\,\text{sec} \simeq 39,2m$$

$$\boxed{\Rightarrow x(5) - x(2) \simeq 88,2m}$$

Verfeinerung

Schrittweite $\Delta t = 0.5\,\text{sec}$

$x(2.5) - x(2) \simeq v(2) \cdot 0.5\,\text{sec} = 9.81m$

$x(3) - x(2.5) \simeq v(2.5) \cdot 0.5\,\text{sec} \simeq 12.5m$

$x(3.5) - x(3) \simeq v(3) \cdot 0.5\,\text{sec} \simeq 15m$

$x(4) - x(3.5) \simeq v(3.5) \cdot 0.5\,\text{sec} \simeq 17.5m$

$x(4.5) - x(4) \simeq v(4) \cdot 0.5\,\text{sec} \simeq 20m$

$x(5) - x(4.5) \simeq v(4.5) \cdot 0.5\,\text{sec} \simeq 22.5m$

$$\boxed{\Rightarrow x(5) - x(2) \simeq 97,5m}$$

Geometrische Bedeutung

$$x(5) - x(2) \simeq \sum_{i_{min}}^{i_{max}} v(t_i) \cdot (\Delta t)_i$$

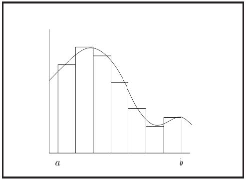
Flächeninhalt unter dem Graphen von $v(.)$

Exakte Lösung

$$\boxed{x'(t) = v(t) \text{ und } x(0) = 0 \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{x(5) - x(2) = \frac{1}{2} 9.81 (25 - 4) m \simeq 102.4m}$$

Integral - Definition via Treppenfunktionen



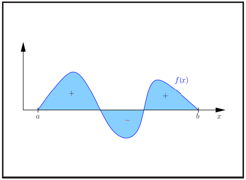
Definition

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i_{min}}^{i_{max}} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Bemerkung

Limes existiert für z.B. (stückweise) stetiges f.

Bemerkung



Integraleigenschaften

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx, \text{ falls } f \le g,$$
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \text{für } a < b < c.$$

Der Hauptsatz der Differentialrechnung

Erinnerung $\boxed{x'(t) = v(t) \Longrightarrow \int_2^5 v(t)dt = x(5\,\text{sec}) - x(2\,\text{sec})}$

Satz Falls $F'(x) = f(x)$, so ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

Beispiel Fläche unter einem Sinus-Bogen:

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$$

Beispiel Fläche unter der Standard-Parabel:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$$

Sprechweise F '*Stammfunktion*' von f, falls $F' = f$.

Integrationstechniken: Partielle Integration

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g'(x)dx}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx &= x\cdot(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot(-e^{-x})dx \\
&= -e^{-1} - 0 + \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{e} - (e^{-1} - 1) \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Integrationstechniken: Substitution

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x))g'(x)dx}$$

falls g auf $[a, b]$ streng monoton!

Beispiel

Fächeininhalt des Viertelkreises:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\arcsin 0}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cdot\cos(x)dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)dx \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2x)+x)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}(0+\frac{\pi}{2}-(0+0)) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Integrationstechniken: Partialbruchzerlegung

Beispiel

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(1-x)\cdot(1+x)}\,dx \stackrel{?}{=}$$

PBZ

$$\frac{1}{(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(1-x)\cdot(1+x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\Big(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x)+\ln(1+x)\big)\big|_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\big(\frac{1+x}{1-x}\big)\big|_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln(\frac{1}{3})\right) = \ln(3)
\end{aligned}$$

Bemerkung Funktioniert 'analog' für bel. rationale Funktionen f.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 13:
Zinsrechnung und Abschreibung

Zinsen: Bezeichnungen

Symbole	Bedeutung	Beispiel
K_0	Anfangskapital	100 €
K_n	Endkapital	105 €
n	ganzzahlige Laufzeit	1 Jahr
Z	Zins	5 €
p	(nominaler) Prozentzinssatz	5%
$i = \frac{p}{100}$	(nominaler) Zinssatz	0,05
$q = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor	1+0,05=1,05
$\frac{1}{q}$	Abzinsungsfaktor	$\frac{1}{1,05} = 0,9524$
f	gebrochene Laufzeit= $\frac{\text{Zinstage der Laufzeit}}{\text{Zinstage pro Jahr}}$	$\frac{180}{360}$ für ein halbes Jahr Anlagedauer

Einfacher Zins

Funktionsweise

Bei der einfachen Verzinsung werden die Zinsen bei längerer Anlagedauer nicht wieder mitverzinst, sondern ausgezahlt.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i && = K_0 \cdot (1+i) \\
K_2 &= K_0 + K_0 \cdot 2i && = K_0 \cdot (1+2i) \\
K_3 &= K_0 + K_0 \cdot 3i && = K_0 \cdot (1+3i) \\
K_4 &= K_0 + K_0 \cdot 4i && = K_0 \cdot (1+4i)
\end{aligned}
}
$$

Endkapital

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Beispiel

Ein Betrag von 100 Euro wird bei einer einfachen Verzinsung von 6% genau zehn Jahre lang ausgeliehen. Die Zinszahlung soll am Ende der Laufzeit erfolgen. Wie groß ist die am Ende der Laufzeit angesammelte Summe aus Kapital und Zinsen?

$$K_{10} = 100 \cdot (1 + 0,06 \cdot 10) = 100 \cdot (1.60) = 160.$$

Zinseszins

Funktiosnweise

Die Zinsen werden sofort wieder angelegt und zum Kapital dazu addiert, so dass ab dem Zeitpunkt der Wiederanlage auch die Zinsen mitverzinst werden.

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i &&= K_0 \cdot (1+i) && \\
K_2 &= K_1 + K_1 \cdot i &&= K_1 \cdot (1+i) &&= K_0 \cdot (1+i)^2 \\
K_3 &= K_2 + K_2 \cdot i &&= K_2 \cdot (1+i) &&= K_0 \cdot (1+i)^3 \\
K_4 &= K_3 + K_3 \cdot i &&= K_3 \cdot (1+i) &&= K_0 \cdot (1+i)^4 \\
K_n &= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i &&= K_{n-1} \cdot (1+i) &&= K_0 \cdot (1+i)^n
\end{aligned}
$$

Endkapital

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n}$$

Beispiel

Ein Betrag von 100 Euro wird bei einer zinseszinzlichen Verzinsung von 6% genau zehn Jahre lang angelegt. Wie groß ist die am Ende der Laufzeit angesammelte Summe aus Kapital und Zinsen?

$$K_{10} = 100 \cdot (1 + 0,06)^{10} \simeq 179.$$

Laufzeitberechnung

Frage	Wie lange dauert es, bis sich ein mit 5% zinseszinslich angelegter Betrag verdreifacht hat?
Rechnung	$K_n = (1+5\%)^n K_0 \stackrel{!}{=} 3K_0$ $\Rightarrow n = \log_{1.05} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 1.05} = 22.5$
Antwort	Es dauert 23 Jahre, bis sich das eingesetzte Kapital verdreifacht hat.

Unterjährige Verzinsung

Formel

$$K_{gemischt} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i \cdot f)$$

Beispiel

Das Kapital von Viola Knete in Höhe von 100.000 wird zwei Jahre, 4 Monate und 17 Tage lang zu 8% Jahreszinsen angelegt. Zinseszinsen werden erst bei einer Anlagedauer ab einem Jahr gezahlt.

K_0=100.000, Anlagedauer: $n = 2$ und $f = \frac{4}{12} + \frac{17}{360} = 0{,}3806$

$K_{gemischt} = 100.000 \cdot (1+0{,}08)^2 \cdot (1+0{,}08 \cdot 0{,}3806)$ =120.191,45

Monatliche vs. Jährliche Verzinsung

Beispiel

100 Euro werden bei jährlicher Verzinsung zu 6% angelegt.
Alternativ wird eine monatliche zinseszinsliche Verzinsung zu $0.5\% = 6\%/12$ angeboten.

Das Kapital beträgt bei der jährlichen Verzinsung nach einem Jahr 106 Euro.

Bei monatlicher Verzinsung beträgt das Kapital nach einem Jahr $100 \cdot (1 + 0.005)^{12} = 106.17$ Euro.

Effektiver Zinssatz im Fall 1) 6%.
Effektiver Zinssatz im Fall 2) 6.17%.

Abschreibung

Frage

Eine Maschine zum Preis von 50.000 Euro soll nach 10 Jahren auf einen Restwert von 10.000 Euro abgeschrieben werden. Wie sieht der Abschreibungsplan aus?

Lineare Abschreibung

Funktionsweise

Jedes Jahr wird derselbe Betrag abgeschrieben.

m	K_m	A_m=d	p_m^N	p_m
0	50.000		-	-
1	46.000	4.000	8,00	8,00
2	42.000	4.000	8,00	8,70
3	38.000	4.000	8,00	9,52
4	34.000	4.000	8,00	10,53
5	30.000	4.000	8,00	11,76
6	26.000	4.000	8,00	13,33
7	22.000	4.000	8,00	15,38
8	18.000	4.000	8,00	18,18
9	14.000	4.000	8,00	22,22
10	10.000	4.000	8,00	28,57

Bezeichnungen

K_m = Restwert; A_m= Abschreibungsbetrag;
$p_m = \frac{A_m}{K_{m-1}} \cdot 100$ rel. Abschreibung bzgl. Restwert;
$p_m^N = \frac{A_m}{K_0} \cdot 100$ rel. Abschreibung bzgl. Neuwert

Arithmetisch-Degressive Abschreibung

Funktionsweise

Der Abschreibungsbetrag wird jedes Jahr um einen Wert d vermindert.

m	K_m	A_m	p_m^N	p_m
0	50.000		-	-
1	44.875	5.125	10,25	10,25
2	40.000	4.875	9,75	10,86
3	35.375	4.625	9,25	11,56
4	31.000	4.375	8,75	12,37
5	26.875	4.125	8,25	13,31
6	23.000	3.875	7,75	14,42
7	19.375	3.625	7,25	15,76
8	16.000	3.375	6,75	17,42
9	12.875	3.125	6,25	19,53
10	10.000	2.875	5,75	22,33

(d=250 Euro, $A_1 = 5125$.)

Geometrisch-Degressive Abschreibung

Funktionsweise

Der Abschreibungsbetrag ist ein fixer Prozentsatz des verbliebenen Restwertes.

m	K_m	A_m	p_m^N	p_m
0	50.000		-	-
1	42.567	7.433	14,87	14,87
2	36.239	6.328	12,66	14,87
3	30.852	5.387	10,77	14,87
4	26.265	4.586	9,17	14,87
5	22.361	3.905	7,81	14,87
6	19.037	3.324	6,65	14,87
7	16.207	2.830	5,66	14,87
8	13.797	2.409	4,82	14,87
9	11.746	2.051	4,10	14,87
10	10.000	1.746	3,49	14,87

Berechnung der Abschreibungsplans aus K_0, n, K_n

Lineare Abschreibung

Jährlicher Abschreibungsbetrag $A_m = \frac{K_0 - K_n}{n}$, $m = 1, \ldots, n$.

Arithmetische Abschreibung

$A_m = A_1 - (m-1) \cdot d$, mit $d = 2\frac{nA_1 - (K_0 - K_n)}{n(n-1)}$

Geometrische Abschreibung

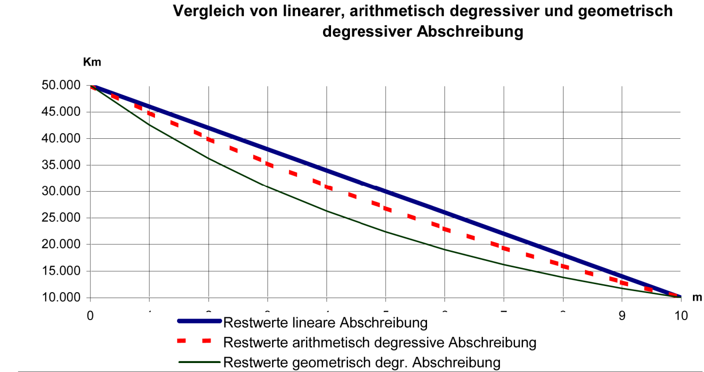
$A_m = K_0(1-p)^{m-1} p$ mit $p = 1 - \sqrt[n]{\frac{K_0}{K_n}}$.

Bemerkung: Math. Hintergrund

Arithmetische Reihe $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Geometrische Reihe $1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$

Vergleich der Abschreibungspläne



Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 14:
Renten-, Tilgungs- und Investitionsrechnung

Rentenendwert

Beispiel Theo Knapp bringt 5 Jahre lang einmal jährlich am Jahresende 100 Euro zur Bank, die diese Einzahlungen bei 5% Zinseszinsen ansammelt. Welcher Betrag wird Theo nach Ablauf von 5 Jahren zur Verfgung stehen (Rentenendwert)?

Antwort Nach Ablauf des 5. Jahres hat Theo

$$R_5 = (1+5\%)^4 \cdot 100 + (1+5\%)^3 \cdot 100 + \cdots + 100 \simeq 525$$

Geometrische Reihe

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} rq^i = r\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wobei
r jährlicher Neu-Analagebetrage
$q = 1 + i$ Zinsfaktor (i Zinsssatz)
n Laufzeit

Bemerkung '*Nachschüssige*' Rente

Rentenbarwert

Beispiel Aus einem Lottogewinn stehen Berta G. für die nächsten 10 Jahre jährliche Zahlungen in Höhe von je 10.000 Euro zu. Welchen Wert hat dieser Lottogewinn heute, wenn von 6% Zinseszinsen ausgegangen wird, d.h. mit welchem Betrag könnte Berta heute ihre Rente kapitalisieren lassen (Rentenbarwert)?

Antwort Der Endwert von Berta G.s Lottogewinn beträgt $10000\frac{(1+6\%)^{10}-1}{6\%} = 131807,95$
Der Barwert Bertas Lottogewinns betrg̈t
$131807,95/(1+6\%)^{10} = 73.600,87$.
Sie könnte sich also genauso Euro sofort auszahlen lassen.

Prinzip Barwert = Diskontierter Rentenendwert

$$R_0 = \frac{R_n}{(1+i)^n} = r\frac{q^n-1}{q-1}\frac{1}{q^n}$$

'Ewige Rente' Falls $n = \infty$ $R_0 = \frac{r}{i}$.

Beispiel - Rentendauer

Herr X legt 100000 zu 6% an und entnimmt am Ende eines jeden Jahres aus dem Guthaben 10000 Euro. Wann ist das Guthaben aufgebraucht?

Rechnung gefragt ist nach n, so dass

$$R_0 = \frac{R_n}{(1+i)^n} = r\frac{q^n-1}{q-1}\frac{1}{q^n}$$

mit $R_0 = 100.000$, $r = 10.000$ und $i = 6\%$.
Auflösen nach n ergibt

$$n = \frac{\ln(\frac{r}{r-R_0 i})}{\ln q},$$

also hier $n = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.06} = 15.73$

Antwort Nach gut 15 Jahren ist das Kapital von Herrn X aufgebraucht.

Tilgungsrechnung

Beispiel

Anton Mobil nimmt einen Kredit von 36.000 Euro bei 10% Zinsen p.a. auf. Er will den Kredit in 3 Jahren abbezahlen. Wie sieht ein Tilgungsplan aus?

Konstante Tilgungsraten

Prinzip

Tilgungsbetrag $T_1 = T_2 = \cdots = T_n$ konstant.

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	36.000	3.600	12.000	15.600	24.000
2	24.000	2.400	12.000	14.400	12.000
3	12.000	1.200	12.000	13.200	0
4	0	Σ=7.200			

Bezeichnungen

RS_k Restschuld im Jahr k
Zinsen für das Jahr k (nachschüssig)
T_k Tilgung (am Ende von Jahr) k. $A_k = T_k + Z_k$
Annuität (am Ende von) Jahr k,
S_k Restschuld am Ende des Jahres k.

Annutitätendarlehen

Prinzip

Konstante Annuität $A_0 = A_1 = \cdots = A_n$,
Barwert(Annutitäten) = Darlehensbetrag.

Beispiel

Bei einem Zinssatz von 7% ($i = 0{,}07$) und einer Kreditlaufzeit von 5 Jahren muss der Schuldner 5 Jahre lang das 0,2439-fache der Schuld zurückzahlen. Bei einer Schuld von 10.000 € zahlt er fünf Jahre lang jeweils 2.439 € zurück.

Probe: Insgesamt werden $5 \cdot 2.439\,€ = 12.195\,€$ gezahlt. Der Barwert dieses Betrags (abgezinst über 5 Jahre bei 7% Zinsen ist:

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}, \text{ d.h. } 2.439 \cdot \frac{1{,}07^5 - 1}{1{,}07 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}07^5} = 2.439 \cdot 4{,}1 = 10.000.$$

Der Barwert entspricht also exakt der ursprünglich ausgeliehenen Summe.

'Annuitätenfaktoren'

Annuitätenfaktoren bei verschiedenen Kreditlaufzeiten und Zinssätzen

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i									
0,01	0,5075	0,3400	0,2563	0,2060	0,1725	0,1486	0,1307	0,1167	0,1056
0,02	0,5150	0,3468	0,2626	0,2122	0,1785	0,1545	0,1365	0,1225	0,1113
0,03	0,5226	0,3535	0,2690	0,2184	0,1846	0,1605	0,1425	0,1284	0,1172
0,04	0,5302	0,3603	0,2755	0,2246	0,1908	0,1666	0,1485	0,1345	0,1233
0,05	0,5378	0,3672	0,2820	0,2310	0,1970	0,1728	0,1547	0,1407	0,1295
0,06	0,5454	0,3741	0,2886	0,2374	0,2034	0,1791	0,1610	0,1470	0,1359
0,07	0,5531	0,3811	0,2952	0,2439	0,2098	0,1856	0,1675	0,1535	0,1424
0,08	0,5608	0,3880	0,3019	0,2505	0,2163	0,1921	0,1740	0,1601	0,1490
0,09	0,5685	0,3951	0,3087	0,2571	0,2229	0,1987	0,1807	0,1668	0,1558
0,1	0,5762	0,4021	0,3155	0,2638	0,2296	0,2054	0,1874	0,1736	0,1627

Formel

$$f(n,i) = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \frac{1}{(1+i)^n} \right)^{-1}$$

Beispiel Baukredit

$i = 8,5\%$ und $n = 16$

Jahr k (1)	RS_k (2)	Z_k (3)	T_k (4)	A_k (5)	S_k (6)
		$(3) = (2) \cdot 0{,}085$	$(4) = (5) - (3)$		$(6) = (2) - (4)$
1	100.000	8.500	3.161	11.661,35	96.839
2	96839	8.231	3.430	11.661,35	93.409
3	93409	7.940	3.722	11.661,35	89.687
4	89687	7.623	4.038	11.661,35	85.649
5	85649	7.280	4.381	11.661,35	81.268
6	81268	6.908	4.754	11.661,35	76.514
7	76514	6.504	5.158	11.661,35	71.357
8	71357	6.065	5.596	11.661,35	65.761
9	65761	5.590	6.072	11.661,35	59.689
10	59689	5.074	6.588	11.661,35	53.101
11	53101	4.514	7.148	11.661,35	45.953
12	45953	3.906	7.755	11.661,35	38.198
13	38198	3.247	8.415	11.661,35	29.783
14	29783	2.532	9.130	11.661,35	20.654
15	20654	1.756	9.906	11.661,35	10.748
16	10748	914	10.748	11.661,35	0

Bemerkung

Restschuld S_k = Barwert zum Zeitpunkt k der noch ausstehenden Annuitäten, bzw. $S_k = S_0 \frac{q^n - q^k}{q^n - 1}$.

Investitionsrechnung

Beispiel

Zur Auswahl stehen zwei Geldanlagen/Strategien

Anlage 1:

Jahr	0	1	2	3
Einnahmen/Ausgaben	-3000	1200	1200	1200

Anlage 2:

Jahr	0	1	2	3
Einnahmen/Ausgaben	-2000	-1000	1200	2450

Rechnung

Endwert Strategie 1 nach Ablauf des 3. Jahres:
$-3000(1+5\%)^3+1200(1+5\%)^2+1200(1+5\%)^1+1200$
$= 310,25$
Endwert Strategie 2 nach Ablauf des 3. Jahres:
$-2000(1+5\%)^3-1100(1+5\%)^2+1200(1+5\%)^1+2450$
$= 292,25$

Ergebnis

Bei einem Kalkulationszinssatz von 5% ist die Anlage 1 die bessere.

Bemerkung

Bei einem Zinssatz von 0% ist Anlage 2 besser.

Kapitalwertmethode

Kapitalwert Strategie 1:
$$-3000 + \frac{1200}{(1+5\%)} + \frac{1200}{(1+5\%)^2} + \frac{1200}{(1+5\%)^3} = 267,78$$

Kapitalwert Strategie 2:
$$-2000 - \frac{1000}{(1+5\%)} + \frac{1200}{(1+5\%)^2} + \frac{2450}{(1+5\%)^3} = 252,45$$

Ergebnis Bei einem Kalkulationsszins von 5% ist der Kapitalwert der Strategie 1 höher als der von Strategie 2, dh. Strategie 1 ist vorzuziehen.

Allgemein Anlage

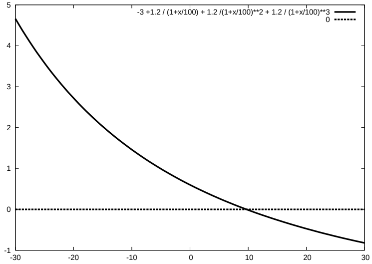
= '*Cash flow*' aus pos. und neg. Zahlungen.

Kapitalwert

= Barwert(Einnahmen) - Barwert(Ausgaben)

Interner Zinssatz

Kapitalwertfunktion Strategie 1:



Int. Zinssatz	ca. $\simeq 9.5\%$ (Nullstelle der Kapitalwertfunktion).
Investitionsregel	Falls Bankzinsen $>$ Interner Zinssatz $\Rightarrow$ Lege Geld bei der Bank an. Falls Bankzinsen $<$ Interner Zinssatz $\Rightarrow$ Investiere in die Anlage.
Allgemein	Bei der Wahl zw. verschiedenden Anlagen ist diejenige mit höchstem internen Zinssatz vorzuziehen.
Bemerkung	'*Effektiver Zins*' eines Darlehens = Interner Zinssatz

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 14:
Renten-, Tilgungs- und Investitionsrechnung

Rentenendwert

Beispiel

Theo Knapp bringt 5 Jahre lang einmal jährlich am Jahresende 100 Euro zur Bank, die diese Einzahlungen bei 5% Zinseszinsen ansammelt. Welcher Betrag wird Theo nach Ablauf von 5 Jahren zur Verfgung stehen (Rentenendwert)?

Antwort

Nach Ablauf des 5. Jahres hat Theo

$$R_5 = (1+5\%)^4 \cdot 100 + (1+5\%)^3 \cdot 100 + \cdots + 100 \simeq 525$$

Geometrische Reihe

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} rq^i = r\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

wobei
r jährlicher Neu-Analagebetrage
$q = 1 + i$ Zinsfaktor (i Zinsssatz)
n Laufzeit

Bemerkung

'*Nachschüssige*' Rente

Rentenbarwert

Beispiel Aus einem Lottogewinn stehen Berta G. für die nächsten 10 Jahre jährliche Zahlungen in Höhe von je 10.000 Euro zu. Welchen Wert hat dieser Lottogewinn heute, wenn von 6% Zinseszinsen ausgegangen wird, d.h. mit welchem Betrag könnte Berta heute ihre Rente kapitalisieren lassen (Rentenbarwert)?

Antwort Der Endwert von Berta G.s Lottogewinn beträgt
$10000\frac{(1+6\%)^{10}-1}{6\%} = 131807,95$
Der Barwert Bertas Lottogewinns betrgẗ
$131807,95/(1+6\%)^{10} = 73.600,87.$
Sie könnte sich also genauso Euro sofort auszahlen lassen.

Prinzip Barwert = Diskontierter Rentenendwert

$$R_0 = \frac{R_n}{(1+i)^n} = r\frac{q^n-1}{q-1}\frac{1}{q^n}$$

'Ewige Rente' Falls $n = \infty$ $R_0 = \frac{r}{i}$.

Beispiel - Rentendauer

Herr X legt 100000 zu 6% an und entnimmt am Ende eines jeden Jahres aus dem Guthaben 10000 Euro. Wann ist das Guthaben aufgebraucht?

Rechnung gefragt ist nach n, so dass

$$R_0 = \frac{R_n}{(1+i)^n} = r\frac{q^n-1}{q-1}\frac{1}{q^n}$$

mit $R_0 = 100.000$, $r = 10.000$ und $i = 6\%$.
Auflösen nach n ergibt

$$n = \frac{\ln(\frac{r}{r-R_0 i})}{\ln q},$$

also hier $n = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.06} = 15.73$

Antwort Nach gut 15 Jahren ist das Kapital von Herrn X aufgebraucht.

Tilgungsrechnung

Beispiel

Anton Mobil nimmt einen Kredit von 36.000 Euro bei 10% Zinsen p.a. auf. Er will den Kredit in 3 Jahren abbezahlen. Wie sieht ein Tilgungsplan aus?

Konstante Tilgungsraten

Prinzip

Tilgungsbetrag $T_1 = T_2 = \cdots = T_n$ konstant.

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	36.000	3.600	12.000	15.600	24.000
2	24.000	2.400	12.000	14.400	12.000
3	12.000	1.200	12.000	13.200	0
4	0	Σ=7.200			

Bezeichnungen

RS_k Restschuld im Jahr k
Zinsen für das Jahr k (nachschüssig)
T_k Tilgung (am Ende von Jahr) k. $A_k = T_k + Z_k$
Annuität (am Ende von) Jahr k,
S_k Restschuld am Ende des Jahres k.

Annutitätendarlehen

Prinzip

Konstante Annuität $A_0 = A_1 = \cdots = A_n$,
Barwert(Annutitäten) = Darlehensbetrag.

Beispiel

Bei einem Zinssatz von 7% ($i = 0{,}07$) und einer Kreditlaufzeit von 5 Jahren muss der Schuldner 5 Jahre lang das 0,2439-fache der Schuld zurückzahlen. Bei einer Schuld von 10.000 € zahlt er fünf Jahre lang jeweils 2.439 € zurück.

Probe: Insgesamt werden $5 \cdot 2.439\,€ = 12.195\,€$ gezahlt. Der Barwert dieses Betrags (abgezinst über 5 Jahre bei 7% Zinsen ist:

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}, \text{ d.h. } 2.439 \cdot \frac{1{,}07^5 - 1}{1{,}07 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}07^5} = 2.439 \cdot 4{,}1 = 10.000.$$

Der Barwert entspricht also exakt der ursprünglich ausgeliehenen Summe.

'Annuitätenfaktoren'

Annuitätenfaktoren bei verschiedenen Kreditlaufzeiten und Zinssätzen

n / i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	0,5075	0,3400	0,2563	0,2060	0,1725	0,1486	0,1307	0,1167	0,1056
0,02	0,5150	0,3468	0,2626	0,2122	0,1785	0,1545	0,1365	0,1225	0,1113
0,03	0,5226	0,3535	0,2690	0,2184	0,1846	0,1605	0,1425	0,1284	0,1172
0,04	0,5302	0,3603	0,2755	0,2246	0,1908	0,1666	0,1485	0,1345	0,1233
0,05	0,5378	0,3672	0,2820	0,2310	0,1970	0,1728	0,1547	0,1407	0,1295
0,06	0,5454	0,3741	0,2886	0,2374	0,2034	0,1791	0,1610	0,1470	0,1359
0,07	0,5531	0,3811	0,2952	0,2439	0,2098	0,1856	0,1675	0,1535	0,1424
0,08	0,5608	0,3880	0,3019	0,2505	0,2163	0,1921	0,1740	0,1601	0,1490
0,09	0,5685	0,3951	0,3087	0,2571	0,2229	0,1987	0,1807	0,1668	0,1558
0,1	0,5762	0,4021	0,3155	0,2638	0,2296	0,2054	0,1874	0,1736	0,1627

Formel

$$f(n,i) = \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \frac{1}{(1+i)^n} \right)^{-1}$$

Beispiel Baukredit

$i = 8,5\%$ und $n = 16$

Jahr k (1)	RS_k (2)	Z_k (3)	T_k (4)	A_k (5)	S_k (6)
		$(3)=(2)\cdot 0{,}085$	$(4)=(5)-(3)$		$(6)=(2)-(4)$
1	100.000	8.500	3.161	11.661,35	96.839
2	96839	8.231	3.430	11.661,35	93.409
3	93409	7.940	3.722	11.661,35	89.687
4	89687	7.623	4.038	11.661,35	85.649
5	85649	7.280	4.381	11.661,35	81.268
6	81268	6.908	4.754	11.661,35	76.514
7	76514	6.504	5.158	11.661,35	71.357
8	71357	6.065	5.596	11.661,35	65.761
9	65761	5.590	6.072	11.661,35	59.689
10	59689	5.074	6.588	11.661,35	53.101
11	53101	4.514	7.148	11.661,35	45.953
12	45953	3.906	7.755	11.661,35	38.198
13	38198	3.247	8.415	11.661,35	29.783
14	29783	2.532	9.130	11.661,35	20.654
15	20654	1.756	9.906	11.661,35	10.748
16	10748	914	10.748	11.661,35	0

Bemerkung

Restschuld S_k = Barwert zum Zeitpunkt k der noch ausstehenden Annuitäten, bzw.
$S_k = S_0 \frac{q^n - q^k}{q^n - 1}$.

Investitionsrechnung

Beispiel

Zur Auswahl stehen zwei Geldanlagen/Strategien

Anlage 1:

Jahr	0	1	2	3
Einnahmen/Ausgaben	-3000	1200	1200	1200

Anlage 2:

Jahr	0	1	2	3
Einnahmen/Ausgaben	-2000	-1000	1200	2450

Rechnung

Endwert Strategie 1 nach Ablauf des 3. Jahres:

$-3000(1+5\%)^3+1200(1+5\%)^2+1200(1+5\%)^1+1200$
$=310,25$

Endwert Strategie 2 nach Ablauf des 3. Jahres:

$-2000(1+5\%)^3-1100(1+5\%)^2+1200(1+5\%)^1+2450$
$=292,25$

Ergebnis

Bei einem Kalkulationszinssatz von 5% ist die Anlage 1 die bessere.

Bemerkung

Bei einem Zinssatz von 0% ist Anlage 2 besser.

Kapitalwertmethode

Kapitalwert Strategie 1:
$$-3000 + \frac{1200}{(1+5\%)} + \frac{1200}{(1+5\%)^2} + \frac{1200}{(1+5\%)^3} = 267,78$$

Kapitalwert Strategie 2:
$$-2000 - \frac{1000}{(1+5\%)} + \frac{1200}{(1+5\%)^2} + \frac{2450}{(1+5\%)^3} = 252,45$$

Ergebnis Bei einem Kalkulationsszins von 5% ist der Kapitalwert der Strategie 1 höher als der von Strategie 2, dh. Strategie 1 ist vorzuziehen.

Allgemein Anlage

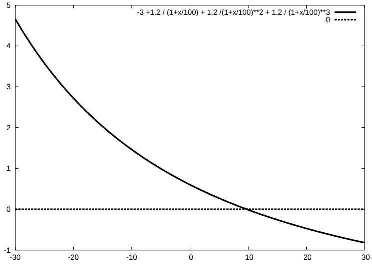
$=$ '*Cash flow*' aus pos. und neg. Zahlungen.

Kapitalwert

$=$ Barwert(Einnahmen) - Barwert(Ausgaben)

Interner Zinssatz

Kapitalwertfunktion Strategie 1:



Int. Zinssatz	ca. $\simeq 9.5\%$ (Nullstelle der Kapitalwertfunktion).
Investitionsregel	Falls Bankzinsen $>$ Interner Zinssatz $\Rightarrow$ Lege Geld bei der Bank an. Falls Bankzinsen $<$ Interner Zinssatz $\Rightarrow$ Investiere in die Anlage.
Allgemein	Bei der Wahl zw. verschiedenden Anlagen ist diejenige mit höchstem internen Zinssatz vorzuziehen.
Bemerkung	'*Effektiver Zins*' eines Darlehens = Interner Zinssatz

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 15:
Analytische Geometrie in der Ebene

Punkte in der Ebene

Beispiel 1-Megapixel-Kamera: Qaudratisches Bildfeld von 1000×1000 Bildpunkten.

Adressierung Abzählen in horizontaler und vertikaler Richtung, d.h. Pixel $p = (251, 899) \simeq$ *'rot'*.

Definition $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ *'2D Euklidischer Raum/Ebene'*

Schreibweise $\vec{p} = (x, y) = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ *'Punkt'*

Geradlinige Bewegung Starte bei $t = 0$ in $(0, 0)$ und gehe mit konstanter Geschwindigkeit auf direktem Wege zum Punkt $(2, 3)$, so dass Du bei $t = 1$ in $(2, 3)$ bist.

$$\boxed{[0, 1] \to p(t) = \binom{t \cdot 2}{t \cdot 3} = t \cdot \binom{2}{3} \in \mathbb{R}^2}$$

Strahl $S = \{t \cdot \vec{p} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{p}$ *'Richtungsvektor'*

$\Rightarrow$ Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ ist Richtungsvektor eines Strahls.

Punkte als Vektoren

Aufgabe

Beschreibe die gleichf. Bewegung

$$[0,1] \ni t \to \vec{p}(t) \in \mathbb{R}^2,$$

so dass

$$\vec{p}(0) = \binom{2}{3} \text{ und } \vec{p}(1) = \binom{6}{11}.$$

Lösung

$$\begin{aligned} [0,1] \ni t \to \vec{p}(t) &= \begin{pmatrix} 2 + t \cdot (6-2) \\ 3 + t \cdot (11-8) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \vec{p}(0) + t \cdot (\vec{p}(1) - \vec{p}(0)) \end{aligned}$$

Definition

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{p} = \binom{x}{y}, \vec{q} = \binom{x'}{y'} \Rightarrow \vec{p} + \vec{q} := \binom{x+x'}{y+y'} \\ \lambda \cdot \vec{p} := \binom{\lambda \cdot x}{\lambda \cdot y} \end{gathered}}$$

Interpretation

$\vec{p} + \vec{q}$ Verschiebung von $\vec{p}$ in Richtung $\vec{q}$

$\lambda \cdot \vec{p}$ Streckung/Stauchung von $\vec{p}$ um Faktor λ

Länge und Abstand von Vektoren

Beispiel Wie weit ist der Punkt $\vec{p} = \binom{2}{3}$ vom Koordinatenursprung $\vec{0} = \binom{0}{0}$ entfernt?

Antwort Satz v. Pythagoras im Dreieck $\Delta = (A, B, C)$ mit $A = \binom{0}{0}, B = \binom{2}{0}$ und $C = \binom{2}{3}$

$$l^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow l = d(\vec{p}, \vec{0}) = \sqrt{13}.$$

Satz Länge von $\vec{p} = \binom{x}{y}$

$$\boxed{l(\vec{p}) := \sqrt{x^2 + y^2} =: |\vec{p}|}$$

Satz Abstand von $\vec{p} = \binom{x}{y}$ und $q = \binom{x'}{y'}$

$$\boxed{d(\vec{p}, \vec{q}) = l(\vec{p} - \vec{q}) := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

Beispiel $d(\binom{1}{4}, \binom{5}{1}) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Winkel und Skalarprodukt

Beispiel Unter welchem Zwischenwinkel sieht ein Beobachter in $\vec{0}$ die Punkte $\vec{p} = \binom{1}{4}$ und $\vec{q} = \binom{5}{1}$?

Antwort Cosinussatz im Dreieck $\Delta(\vec{0}, \vec{p}, \vec{q})$

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - |\vec{p} - \vec{q}|^2}{2|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{17 + 26 - 25}{2\sqrt{17}\sqrt{26}}\right) \simeq 64,65^\circ$$

Bemerkung Für $\vec{p} = \binom{x}{y}$ und $\vec{q} = \binom{x'}{y'}$ ist

$$\frac{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - |\vec{p} - \vec{q}|^2}{2} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

Definition Skalarprodukt

$$\boxed{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = x \cdot x' + y \cdot y'}$$

Satz

$$\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos(\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle / |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|)$$

Orthogonalität und Abstandsbestimmung

Definition $\vec{p} \perp \vec{q}$ *'orthogonal'*
$:\Leftrightarrow \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Beispiel $\vec{p} = \binom{1}{1}$, $\vec{q} = \binom{-1}{1} \Rightarrow \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{q}$.

Satz $\binom{x}{y} \perp \binom{x'}{y'} \Leftrightarrow \binom{x'}{y'} = \lambda \binom{y}{-x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

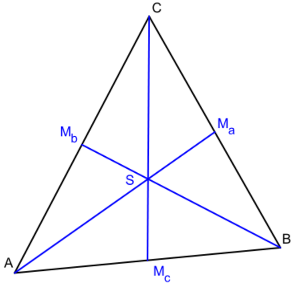
Beispiel Welcher Punkt auf dem Strahl $S = \{t \cdot \vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v} = \binom{1}{-2}$ hat vom Punkt $\vec{p} = \binom{2}{3}$ den kleinsten Abstand und wie groß ist dieser?

Antwort Für den optimalen Punkt $\vec{s} = t \cdot v \in S$ gilt $(\vec{s} - \vec{p}) \perp v$.
$\Rightarrow t\langle v, v \rangle - \langle \vec{p}, \vec{v} \rangle = 0$, d.h.
$t = \langle \vec{p}, \vec{v} \rangle / |v|^2 = \frac{2-6}{5} = -\frac{4}{5}$.
$\Rightarrow \vec{s} = \frac{1}{5}\binom{-4}{8}$ und $\vec{s} - \vec{p} = \frac{1}{5}\binom{-14}{-7}$
$\Rightarrow d(\vec{s}, \vec{p}) = \frac{1}{5}\left|\binom{-14}{-7}\right| = \frac{1}{5}\sqrt{245}$.

Anwendung in der Dreiecksgeometrie: Beispiel

Satz Die Mittelhalbierdenden im Dreieck treffen sich im Schwerpunkt der Ecken. Dieser zerteilt alle Mittelhalbierenden im Verhältnis 1:2.

Beweis



$\vec{M}_a = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$, $\vec{M}_b = \frac{\vec{A}+\vec{C}}{2}$
gesucht $\mu, \lambda \in [0,1]$ so dass
$\lambda\vec{A} + (1-\lambda)\vec{M}_a \stackrel{!}{=} \mu\vec{B} + (1-\mu)\vec{M}_b$
Wähle $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}\vec{A} + (1-\frac{1}{3})\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$
$= \frac{1}{3}\vec{B} + (1-\frac{1}{3})\frac{\vec{A}+\vec{C}}{2} = \vec{S}$

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 16:
Analytische Geometrie im Raum

Analytische Geometrie in 3D

Definition

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$ *'3-D-Euklidischer Raum'*

Schreibweise

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Vektor-operationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}; \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Länge/Abstand

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \quad d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = \left| \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix} \right|$$

Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

Winkel

$$\angle \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle / \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right| \right)$$

Beispiele

Aufgabe

Sie wollen ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 1m auf einen quadratischen Tierkäfig mit Kantenlänge 2m errichten. Wie müssen Sie die vier dreieckigen Dachseiten zuschneiden?

Rechnung

Lege das Dach so in das Koordinatensystem, dass die Grundfläche mit den Eckpunkten auf den Koordinatenachsen der x-y-Ebene liegt, d.h. $\vec{e}_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$, $\vec{e}_3 = (-\sqrt{2}, 0, 0)$ und $\vec{e}_4(0, -\sqrt{2}, 0)$.
Die Dachspitze hat dann die Koordinaten $\vec{s} = (0, 0, 1)$.

Gefragt ist nach den Winkeln im Dreieck $\Delta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{s})$.

Für den Winkel in $\vec{e}_1$ ergibt sich $\alpha = \angle(\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{s} - \vec{e}_1)$ mit $\vec{e}_2 - \vec{e}_1 = \sqrt{2}(-1, 1, 0)$ und $\vec{s} - \vec{e}_1 = (-\sqrt{2}, 0, 1)$, also

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \simeq 54,73^\circ.$$

Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Beispiel (x-y-Ebene)

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} = (\lambda, \mu, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

('Parametrische Form')

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle \vec{x}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle = 0\}$$

('Normalenform', 'Flächennormale' $\vec{\nu} = (0,0,1)$)

Beispiel

Bestimme die Normalendarstellung von
$E = \{\vec{x} = (1,2,3) + \lambda \cdot (1,2,2) + \mu \cdot (-2,3,3) \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Normalenvektor

$\vec{\nu} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$:
$\langle \vec{\nu}, (1,2,2) \rangle = 0 \Rightarrow n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 0$ und
$\langle \vec{\nu}, (-2,3,3) \rangle \Rightarrow -2n_1 + 3n_2 + 3n_3 = 0$
also z.B. $\nu = (0, 1, -1)$

Ergebnis

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\langle \vec{x} - (1,2,3), (0,1,-1) \rangle = 0\}$$
$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\langle \vec{x}, (0,1,-1) \rangle = -1\}$$

Lotfusspunkt (Orthogonale Projektion)

Beispiel Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{p} = (1,1,2)$ von der Ebene
$E = \{\vec{x} = \lambda \cdot (1,2,2) + \mu \cdot (-2,3,3) \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Lotfusspunkt Gesucht: $\vec{e} \in E$, so dass $(\vec{p} - \vec{e}) \perp E$
$\Rightarrow (\vec{p} - \vec{e}) = \lambda \cdot \vec{\nu}$ mit $\nu = (0,1,-1)$, d.h.

$$\boxed{\vec{e} = \vec{p} - \frac{\langle \vec{p}, \vec{\nu} \rangle}{|\nu|^2} \vec{\nu}.}$$

(Probe) $\langle \vec{e}, \vec{\nu} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{\nu} \rangle - \frac{\langle \vec{p}, \vec{\nu} \rangle}{|\nu|^2} \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \vec{e} \in E$

Antwort Abstand von $\vec{p}$ zu E: $|\vec{e} - \vec{p}| = \frac{|\langle \vec{p}, \vec{\nu} \rangle|}{|\nu|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Der n-dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Definition $\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Vektorop. $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$, $\lambda\vec{x} = (\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n)$

Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

Länge $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Winkel $\angle \vec{x}, \vec{y} = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Beispiel Winkel zwischen $\vec{x} = (1, 3, 0, 2)$ und $\vec{y} = (1, 0, 2, 2)$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7$

$|\vec{x}| = \sqrt{1 + 9 + 0 + 4} = \sqrt{14}$

$|\vec{y}| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$\Rightarrow \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos(\frac{7}{3 \cdot \sqrt{14}}) \simeq 51,42^\circ$

Unterräume

Definition

Ein *'Unterraum'* $E \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$\boxed{E = \{\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots \lambda_k \cdot \vec{v}_k, \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}}$$

Sprechweisen

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_k$ *'Richtungsvektoren'*

$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ *'Erzeugendensystem'* (EZS)

Schreibweise

$E = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$

Beispiel

$E = \{\vec{x} = \lambda \cdot (1, 2, 2) + \mu \cdot (-2, 3, 3) \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Praktisches Beispiel: Produktionssteuerung

Aufgabe

Fabrik f_1 produziert pro Tag
5t Milch, 1t Schlagsahne, 1t Jogurt und 2t Milchpulver.
Fabrik $\vec{f}_2 = (4, 1, 3, 2)$ und Fabrik $\vec{f}_3 = (2, 3, 3, 1)$.

Können Sie durch geeignete Laufzeiten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genau (100,20,10,40) Tonnen (Milch, Schlagsahne, Jogurt, Milchpulver) erzeugen?

Mathematisch

Existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Antwort

Nein, weil

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \notin E = \text{span}\left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

Bemerkung

E = Menge der exakt produzierbaren Güterverteilungen.

Minimales Erzeugendensystem und Dimension

Beispiel $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

EZS $\{\vec{v}_1 = (1,1,0), \vec{v}_2 = (2,2,0)\}$

Minimales EZS $\{\vec{v}_1 = (1,1,0)\}$ bzw. $\{\vec{v}_2 = (2,2,0)\}$,
denn $\vec{x} \in E \Leftrightarrow x = \lambda \cdot v_1$,
i.e. $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{span}\{\vec{v}_1\} = E$

Definition Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit EZS $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ dann heißt

$$\boxed{\mathcal{V} \ \text{'minimales EZS'}}$$

falls $\text{span}(\mathcal{W}) \neq E$ für jede echte Teilmenge $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$

Sprechweise $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k\}$ min. EZS von $E \Rightarrow \mathcal{V}$ *'Basis'* von E.

Definition Falls $E \subset \mathbb{R}^n$ mit Basis $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k\}$, dann heißt

$$\boxed{k = \dim(E) \ \text{'Dimension' von } E.}$$

Beispiel

Aufgabe

Welche Dimension hat
$E = \text{span}\{(1,1,2,3),(1,1,3,2),(1,1,1,4)\}$

Beobachtung

$(1,1,1,4) = 2 \cdot (1,1,2,3) - 1 \cdot (1,1,3,2)$

$$\Rightarrow E = \text{span}\{(1,1,2,3),(1,1,3,2),(1,1,1,4)\}$$
$$= \text{span}\{(1,1,2,3),(1,1,3,2)\}$$

und es ex. kein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass
$(1,1,2,3) = \lambda \cdot (1,1,3,2)$

$\Rightarrow \{(1,1,2,3),(1,1,3,2)\}$ min. EZS von E

Antwort

$\dim(E) = 2$

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 17:
Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Erinnerung: Produktionssteuerung

Gegeben

3 Fabriken: Produktionsvektoren $\vec{f}_1 = (5, 1, 1, 2)$ Tonnen (Milch, Schlagsahne, Jogurt,Milchpulver) pro Tag, $\vec{f}_2 = (4, 1, 3, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, 3, 3, 1)$.

Kann man mit geeigneten Laufzeiten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genau (100,20,10,40) Tonnen (M, S, J, MP) erzeugen?

Mathematisch

Existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Antwort

Nein, weil

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \notin E = \text{span}\left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

Bemerkung

E = Menge der exakt produzierbaren Güterverteilungen.

Produktionssteuereung als Lineares Gleichungssystem

Gleichungs-system

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5 \cdot \lambda_1 & + & 4 \cdot \lambda_2 & + & 2 \cdot \lambda_3 & = & 100 \\ 1 \cdot \lambda_1 & + & 1 \cdot \lambda_2 & + & 3 \cdot \lambda_3 & = & 10 \\ 1 \cdot \lambda_1 & + & 3 \cdot \lambda_2 & + & 3 \cdot \lambda_3 & = & 10 \\ 2 \cdot \lambda_1 & + & 2 \cdot \lambda_2 & + & 1 \cdot \lambda_3 & = & 40 \end{array}$$

'Koeffizienten-matrix'

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3) \in \ \mathbb{R}^{4\times 3},$$

Defintion $n \times m$-Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n\times m} :\Leftrightarrow$ Koeffizientenschema aus m 'Spaltenverktoren' $\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_m \in \mathbb{R}^n$

Kurzschreibweise Lin. Gl.-System

$A\vec{\lambda} = \vec{z}$ mit $A \in R^{n\times m}$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

Rang einer Matrix

Definition

Für $M = (\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \dots \quad \vec{f}_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

$$\boxed{\mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{span}\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_m\})}$$

Beispiele

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2,\ \mathrm{rang}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3$$

Bemerkung

Matrix in *'Oberer Zeilenstufenform'* falls z.B.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{oder} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Konsekutive Nullstellen von links wachsen von Zeile zu Zeile oder füllen schließlich die gesamte Zeile aus.

Satz

Matrix M in OZS-Form $\Rightarrow$ $\mathrm{rang}(M)$ = Zeilenindex der letzten Zeile $\neq (0, 0, 0, \cdots, 0)$.

Zulässige Zeilenoperationen

Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.\mathrm{Z.}\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Addition einer Zeile auf eine andere

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.\mathrm{Z.}+2.Z\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 6 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

Vertauschen zweier Zeilen

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 6 & 12 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.Z \leftrightarrow 3.Z} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 6 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Satz Zulässige Zeilenoperationen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Rangbestimmung mit dem Gauss-Verfahren

Beispiel Bestimme rang $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{3\times Z_2 - Z_1 \to Z_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 + Z_3 \to Z_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 + Z_3 \to Z_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(obere Zeilenstufenform)

Ergebnis rang $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix} = 3$

Lösbarkeit von Lin. Gleichungssystemen

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{n\times m} = (\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \dots \quad \vec{f}_m)$ und $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

Gesucht $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, so dass $A\vec{\lambda} = \vec{z}$.

Definition *'Erweiterte Koefizientenmatrix'*

$$\boxed{\overline{A} = (\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \dots \quad \vec{f}_m \quad \vec{z}) \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}}$$

Satz $A\vec{\lambda} = \vec{z}$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(\overline{A}) = \mathrm{rang}(A)$.
In diesem Fall ist $A\vec{\lambda} = \vec{z}$ sogar eindeutig lösbar falls ferner rang (A) $= m$, ansonten gibt es unendlich viele Lösungen $\vec{\lambda}$.

Bemerkung Falls rang(A)=rang($\overline{A}$)=l<m, so ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m \,|A\vec{\lambda} = \vec{z}\}$ (m-l)-dimensional.

Beispiel

Gl. System

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 2\ \lambda_3 & = & 7 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 8\ \lambda_3 & = & -28 \end{array}$$

Matrixschreibw. $A\vec{\lambda} = \vec{z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},\ \vec{z} = (7, 0, -28),\ m = n = 3$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right)$$

Gauss-Verf.

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -3 & 12 & -42 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ rang(A)= rang($\overline{A}$) $= 2 < 3 =$m.

$\Rightarrow A\vec{\lambda} = \vec{z}$ ist lösbar mit einer 1-dim Lösungsmenge.

Ablesen

3. Zeile: $\lambda_3 \cdot 0 = 0$, d.h. λ_3 beliebig wählbar.

2. Zeile: $-\lambda_2 + 4\lambda_3 = -14$, d.h. $\lambda_2 = 4\lambda_3 + 14$

1. Zeile: $\lambda_1 = 7 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -21 - 6\lambda_3$

Ergebnis

$$\mathbb{L} = \{\vec{\lambda} = (-21, 14, 0) + \lambda_3(-6, 4, 1)\,|\,\lambda_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Zurück zum Produktionsbeispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Gauss

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 100 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 40 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 13 & -50 \\ 0 & 11 & 13 & -50 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 13 & -50 \\ 0 & 0 & -130 & -500 \\ 0 & 0 & -25 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 13 & -50 \\ 0 & 0 & -13 & -50 \\ 0 & 0 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 13 & -50 \\ 0 & 0 & -13 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) \neq \text{rang}(\overline{A}).$$

Ergebnis

$A\vec{\lambda} = \vec{z}$ nicht lösbar.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

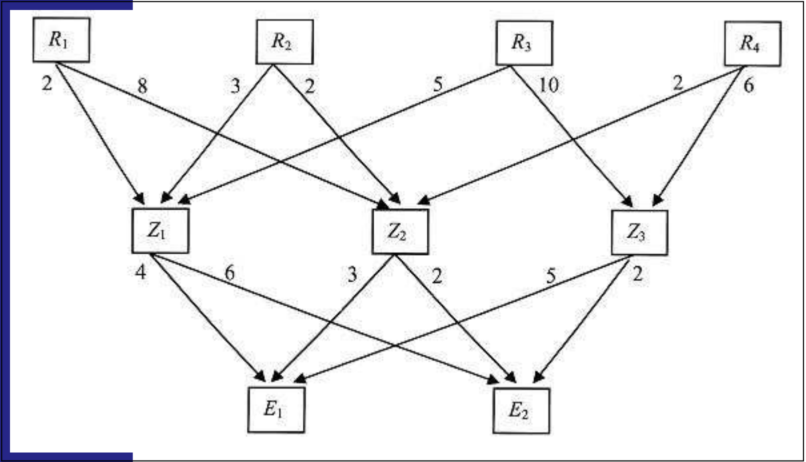
Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 18:
Lineare Abbldungen und Matrizen

Beispiel - Produktionsplanung



4 Rohstoffarten R_1, R_2, R_3, R_4.

3 Zwischenprodukte Z_1; Z_2, Z_3.

2 Endprodukte E_1, E_2.

Beschriftete Pfeile geben Eingansmengen pro produzierter Einheit an.

Matrix für Zwischenprodukte

Frage

Welche Menge an Rohstoff R_1, R_2, R_3, und R_4 sind nötig, um den $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, z_3) = (2,3,4)$ zu erzeugen?

Antwort

Für eine Einheit Z_1 benötigt man $2R_1, 3R_2, 5R_3$ und $0R_4$

$\Rightarrow$ für 2 Einheiten Z_1 brauche $2 \cdot \vec{R}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für 3 Mengeneinheiten Z_2 brauche $3 \cdot \vec{R}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Für 4 Mengeneinheiten Z_3 brauche $4 \cdot \vec{R}_4 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Gesamtverbrauch

$$\vec{R} = 2 \cdot \vec{R}_2 + 3 \cdot \vec{R}_2 + 4 \cdot R_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zuordnung

$\vec{Z} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{R} \in \mathbb{R}^4$,

Matrix-Schreibweise

$\vec{R} = M \cdot \vec{Z}$ mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$

Multiplikation: Matrix · Vektor

Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3},\ \vec{Z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 8\cdot 3 + 0\cdot 4 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 0\cdot 4 \\ 5\cdot 2 + 0\cdot 3 + 10\cdot 4 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 3 + 6\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \vec{m}_1, \vec{Z} \rangle \\ \langle \vec{m}_2, \vec{Z} \rangle \\ \langle \vec{m}_3, \vec{Z} \rangle \\ \langle \vec{m}_4, \vec{Z} \rangle \end{pmatrix},\ \text{wobei}$$

Zeilenvektoren

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vec{m}_3 \\ \vec{m}_4 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$\vec{m}_1 = (1, 8, 0),\ \vec{m}_2 = (3, 2, 0),$
$\vec{m}_3 = (5, 0, 10)\ \vec{m}_4 = (0, 2, 6),$
$\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_4 \in \mathbb{R}^3$

Multiplikation: Matrix · Vektor

Definition

Das Produkt $M \cdot \vec{Z}$ für $M \in \mathbb{R}^{k \times l}$ und $\vec{Z} \in \mathbb{R}^{l}$ ist definiert durch

$$M \cdot \vec{Z} = \begin{pmatrix} \langle \vec{m}_1, \vec{Z} \rangle \\ \langle \vec{m}_1, \vec{Z} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{m}_k, \vec{Z} \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k}$$

Eigenschaften

Die Zuordnung $\vec{Z} \rightarrow \vec{R} = M \cdot \vec{Z}$ ist *'linear'*, d.h.

$$M \cdot (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2) = M \cdot \vec{Z}_1 + M \cdot \vec{Z}_2$$

$$M \cdot (\lambda \vec{Z}) = \lambda (M \cdot \vec{Z})$$

Beispiel

Verbrauch von Zwischenprodukten $\vec{Z}$ für die Fertigung von Endprodukten $\vec{E}$:

$\vec{Z} = N \cdot \vec{E}$ mit $E \in \mathbb{R}^2$ und $N = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Multiplikation: Matrix · Matrix (Motivation)

Frage Welche Mengen $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ an Rohstoffen wird für die Produktion von $\vec{E} = (2, 1)$ Einheiten der Endprodukte (E_1, E_2) benötigt?

Rechnung 1. Benötigte Zwischenprodukte:

$$\vec{Z} = N \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Hierfür benötigte Rohstoffe

$$\begin{aligned} \vec{R} = M \cdot \vec{Z} &= \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 14 + 8 \cdot 8 + 0 \cdot 12 \\ 3 \cdot 14 + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 12 \\ 5 \cdot 14 + 0 \cdot 8 + 10 \cdot 12 \\ 0 \cdot 14 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 58 \\ 190 \\ 88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ergebnis $\vec{R} = M \cdot (N \cdot \vec{E}) = (78, 58, 190, 88)$

Frage $M \cdot (N \cdot \vec{E}) \stackrel{?}{=} (M \cdot N) \cdot \vec{E}$

Multiplikation: Matrix · Matrix (Beispiel)

$$
\begin{aligned}
M\cdot(N\cdot\vec{E}) &= M\cdot\left(\begin{pmatrix}4&6\\3&2\\5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E_1\\E_2\end{pmatrix}\right)\\
&= M\cdot\left[E_1\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+E_2\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}\right]\\
&= E_1\,M\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+E_2\,M\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}\\
&= E_1\begin{pmatrix}1&8&0\\3&2&0\\5&0&10\\0&2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+E_2\begin{pmatrix}1&8&0\\3&2&0\\5&0&10\\0&2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}\\
&= E_1\begin{pmatrix}28\\18\\70\\36\end{pmatrix}+E_2\begin{pmatrix}22\\22\\50\\16\end{pmatrix}=O\cdot\vec{E}
\end{aligned}
$$

wobei

$$O=\begin{pmatrix}28&22\\18&22\\70&50\\36&16\end{pmatrix}=M\cdot N\in\mathbb{R}^{4\times 2}$$

Test $\vec{E}=(2,1)\Rightarrow O\cdot\vec{E}=(78,58,190,88)=\vec{R}\,\surd$

Multiplikation: Matrix · Matrix

Definition

Für $M \in \mathbb{R}^{k\times l}$ und $N \in \mathbb{R}^{l\times n}$ ist das Produkt $O = M \cdot N \in \mathbb{R}^{k\times n}$ definiert durch

$$O = M \cdot N = \begin{pmatrix} \langle\vec{M}_1,\vec{N}_1\rangle & \langle\vec{M}_1,\vec{N}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{M}_1,\vec{N}_n\rangle \\ \langle\vec{M}_2,\vec{N}_1\rangle & \langle\vec{M}_2,\vec{N}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{M}_2,\vec{N}_n\rangle \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \langle\vec{M}_k,\vec{N}_1\rangle & \langle\vec{M}_k,\vec{N}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{M}_k,\vec{N}_n\rangle \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{M}_1, \cdots, \vec{M}_k \in \mathbb{R}^l$ die Zeilenvektoren von M und $\vec{N}_1, \cdots, \vec{N}_n \in \mathbb{R}^l$ die Spaltenvektoren von N bezeichnen gemäß

$$M = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \\ \vdots \\ \vec{M}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times l}, \quad N = \begin{pmatrix} \vec{N}_1 & \vec{N}_2 & \cdots & \vec{N}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times n}$$

Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3},\ N = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

$$\Rightarrow M \cdot N = \begin{pmatrix} 28 & 22 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$$

Zusammenfassung
Lineare Abbildungen und Matrizen

- Matrizen beschreiben lineare Zuordnungen $\vec{E} \to \vec{Z}$ von Vektoren $\vec{E} \in \mathbb{R}^n$ auf Vektoren $\vec{Z} \in \mathbb{R}^m$. (Lineare Abbildung). Die beschreibende Matrix N einer solchen Zuordnung hat m Zeilen und n Spalten, bzw. $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Die Hintereinanderausführung einer zweier Zuordnungen $\vec{E} \xrightarrow{N} \vec{Z} \xrightarrow{M} \vec{R}$ zu einer linearen Zuordnung $\vec{Z} \xrightarrow{O} \vec{R}$ enstpricht auf der Ebene der beschreibenden Matrizen der Matrixmultiplikation $O = M \cdot N$.
  (Hierbei müssen die Spaltenzahl von M und die Zeilenzahl von N identisch sein.)
- Die Einträg des Matrixprpoduktes $M \cdot N$ entstehen, indem man die Zeilenvektoren von M mit den Spaaltenvektoren von N skalar $\langle ., . \rangle$ multipliziert.

Vorlesung Angewandte Mathematik und Statistik f. Agrar- u. Lebensmitteltechnologen

Universität Bonn, WS 08/09

Dr. Max v. Renesse (TU Berlin)
mrenesse@math.tu-berlin.de

Basierend auf Vorlesungen früherer Semester von

Friedrich Kosswig (Uni Bonn)
Anja Voss-Böhme (TU Dresden)

Vorlesung 19:

Invertierung und Diagonalisierung von Matrizen

Lineare Optimierung

Invertierung von Matrizen (Motivation)

Beispiel Ein Apfel enthält 20 mg/100g Vitamin C und 5 mg/100g Vitamin K. Eine Orange enthält 30 mg/100g Vitamin C und 9 mg/100g Vitamin K.

Frage 1 Welche Mengen an Vitaminen $\vec{V} = (v_C, v_K)$ (in mg) entsprechen dem Verzehr von $\vec{E} = (e_A, e_O)$ (in 100g)?

Antwort 1 Gesamtmenge $\vec{V}$ von Vitaminen durch Verzehr von $\vec{E}$
$\vec{V} = M \cdot \vec{E}, \quad M = \left(\begin{smallmatrix} 20 & 30 \\ 5 & 9 \end{smallmatrix}\right)$

Frage 2 Wieviel Äpfel und Orangen muß man essen, um den Tagesbedarf von $\vec{V} = (110, 30)$ genau zu decken?

Rechnung Löse das Gleichungssystem $M \cdot \vec{E} \overset{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} 110 \\ 30 \end{smallmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & 110 \\ 5 & 9 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & 110 \\ 0 & 6 & 20 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{E} = (\frac{1}{2}, \frac{20}{6})$ (in 100g)

Antwort Man muss 50g Apfel und 333g Orangen essen, um den Tagesbedarf an den Vitaminen K und C genau zu decken.

Invertierung von Matrizen (Beispiel)

Frage 3

Wieviel Äpfel und Orangen muß man essen, um den Tagesbedarf von $\vec{V} = (v_C, v_K)$ genau zu decken?

Rechnung

Löse das Gleichungssystem $M \cdot \vec{E} \stackrel{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} v_C \\ v_K \end{smallmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & v_C \\ 5 & 9 & v_K \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 30 & v_c \\ 0 & 6 & 4v_K - v_C \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \frac{1}{10} v_c \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(4v_K - v_C) \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \frac{1}{10} v_C - \frac{3}{6}(4v_K - v_C) \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(4v_K - v_C) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \frac{3}{5} v_C - 2v_K \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} v_C + \frac{2}{3} v_K \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{10} v_C - v_K \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} v_C + \frac{2}{3} v_K \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \left(\frac{3}{10} v_C - v_K, -\frac{1}{6} v_C + \frac{2}{3} v_K\right)}$$

Beobachtung

1) $\vec{E} = N \cdot \vec{V}$ mit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2) $M \cdot N = N \cdot M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ N *'Inverse Matrix'* zu M.

Inverse einer Matrix (Def. und Berechnung)

Definition Für eine (quadratische) Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Inverse zu M, falls $M \cdot N = N \cdot M = E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (Einheitsmatrix).

Satz Falls $\text{Rang}(M) = n$, so ex. genau eine Inverse Matrix $N = M^{-1}$.

Berechnung Simultane Anwendung des Gauß-Verfahrens.

Beispiel $M = \left(\begin{smallmatrix} 20 & 30 \\ 5 & 9 \end{smallmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & 6 & -20 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \quad \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = N$$

Bedeutung M^{-1} stellt die (lineare) '*Umkehrabbildung*' von M dar.

Diagonalisierung einer Matrix - Beispiel

Beispiel $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Beobachtung Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$ und $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ gilt

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = \lambda\,\vec{v}$$

Sprechweise Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$ ist ein *'Eigenvektor'* der Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit zugeh. *'Eigenwert'* $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Analog Der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(\sqrt{5}+1) \end{pmatrix}$ ist ein *'Eigenvektor'* der Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit *'Eigenwert'* $\mu = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

Definition Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *'diagonalisierbar'*, wenn es n Eigenvektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_n$ gibt, die eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel Die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist diagonalisierbar mit den Eigenvektoren $\vec{b}_1 = \vec{v}$ und $\vec{b}_2 = \vec{w}$.

Anwendung auf die Fibonacci-Folge

Erinnerung

Fibonacci-Folge: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ mit $f_0 = 0,\ f_1 = 1$
$\Rightarrow$ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ...

Matrix-schreibweise

$\vec{F}_n = (f_n, f_{n-1}) \Rightarrow \vec{F}_{n+1} = M \cdot \vec{F}_n$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\Rightarrow \vec{F}_n = (M \cdot M \cdot \cdots \cdot M) \cdot \vec{F}_1 = M^{n-1} \cdot \vec{F}_1,\ \vec{F}_1 = (1, 0)$
Z.B. $M^2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ M^3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ M^4 = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Eigenvektoren
$M^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$
$M^n\vec{w} = \mu^n\vec{w}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$, Eigenwert $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.
$M \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}, \Rightarrow M^2\vec{v} = M\lambda\vec{v} = \lambda M \cdot \vec{v} = \lambda\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}.$

Darstellung

$\vec{F}_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{5}}\vec{v} - \frac{\mu}{2\sqrt{5}}\vec{w}$
$\Rightarrow \vec{F}_n = M^{n-1}\vec{F}_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{5}}\lambda^{n-1}\vec{v} - \frac{\mu}{2\sqrt{5}}\mu^{n-1}\vec{w}$

1. Koordinate

$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda^n - \mu^n)$ mit $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ Binet'sche Formel (1842)

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)}$$

Lineare Optimierung: Beispiel

Aufgabe

Ein Weinhändler verkauft Weißwein und Rotwein. Er kann pro Tag von jeder Sorte höchstens 20 Flaschen verkaufen, insgesamt höchstens 30 Flaschen. Bei einer Flasche Weißwein beträgt sein Gewinn 1 Euro, bei einer Flasche Rotwein 2 Euro. Wie viele Flaschen muss er von jeder Sorte verkaufen, damit sein Gewinn maximal wird?

Mathematische Formulierung

Es bezeichne x und y die Anzahl der verkauften Weiß- bzw. Rotweinflaschen. Wir das Maximum finden von der

Zielfunktion

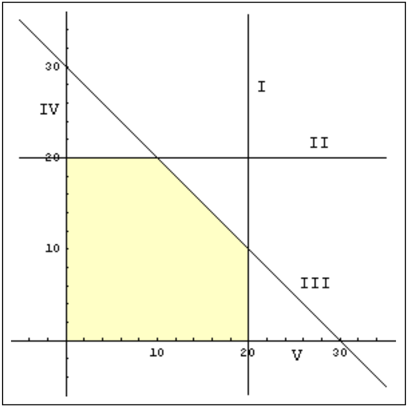
$$\boxed{z(x,y) = x + 2y \longrightarrow \text{Maximum}}$$

Neben-bedingungen

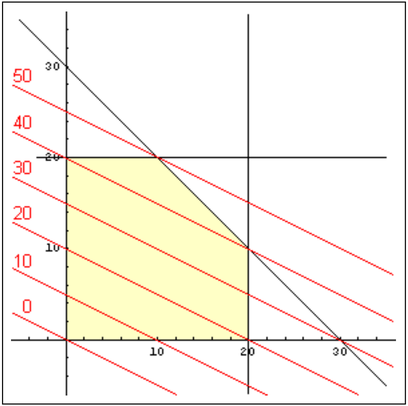
$$\boxed{\begin{array}{cc} \text{(I)} & x \leq 2 \\ \text{(II)} & y \leq 20 \\ \text{(III)} & x + y \leq 30 \\ \text{(IV)} & x \geq 0 \\ \text{(V)} & y \geq 0 \end{array}}$$

Das Planungspolygon

Die Nebenbedingungen der sind sämtlich von der Form $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \leq c$ für geeignete Vektoren $\vec{v}$ und Konstanten c. Damit definiert jede Nebenbedngung eine ('untere') Halbene von zulässigen Planungsvektoren $\vec{x} = (x, y)$. Die Schnittmenge aller diese Halbebenen ergibt das '*Planungspolygon*' der zulässigen Planungsvektoren $\vec{x}$.



Grafische Lösung



Zielfunktion ist konstant auf parallelen Geraden. $\Rightarrow$
Zeichne eine Gerade und verschiebe so weit wie möglich nach oben. Berührpunkt entspricht dem optimalen $\vec{x}$.
Hier $\vec{x}_{opt} = (10, 29)$ (Schnittpunkt v. Gerade II und III)

Antwort Verkauf von 20 Fl. Rot- und 10 Fl. Weißwein ist optimal.

(Alternativ) Vergleiche Zielfunktionswerte auf den Ecken von Polyon.

Vorlesung Statistik WS 2008/09
1. Grundbegriffe

Andreas Eberle
Institut für angewandte Mathematik

Oktober 2008

Drei Stufen der Analyse von Beobachtungsdaten

I. Beschreibende Statistik

- Aufbereitung der Daten
- Graphische Darstellung (Stabdiagramm, Histogramm, Boxplot,...)
- Berechnung von Kennzahlen
  (Quantile, Mittelwert, Standardabweichung,...)

Drei Stufen der Analyse von Beobachtungsdaten

II. Modellierung und Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Erstellen von mathematischen Modellen für das betrachtete Zufallsexperiment.
- In der Regel kennen wir das "richtige" Modell bestenfalls bis auf einige unbekannte Parameter. Bei einer Meinungsumfrage könnten wir z.B. annehmen, daß die Antworten verschiedener Personen unabhängig sind, und jeweils mit Wahrscheinlichkeit p ein bestimmter Kandidat bevorzugt wird. Den Wert von p kennen wir aber zunächst nicht.
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für die beobachteten Daten unter Annahme der (verschiedenen) Modelle.

Drei Stufen der Analyse von Beobachtungsdaten

III. Schließende Statistik

- Schätzung der unbekannten Parameter aus den Beobachtungsdaten (mit Aussagen über den Schätzfehler). Rückschluss auf das "richtige" zugrundeliegende mathematische Modell.
- Überprüfen der Plausibilität verschiedener Hypothesen zum zugrundeliegenden Modell (z.B. "Die Erfolgswahrscheinlichkeit von Kandidat A ist größer als 50 %")
- Rückschluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit.

Definition

Die **Grundgesamtheit** oder **statistische Masse** Ω ist die Menge aller uns interessierenden **statistischen Einheiten** ω.

Beispiel.

$\Omega =$ *alle Hörer im Saal, alle Agrar-/ELW-Studenten im 2. Studienjahr, alle Bäume im Kottenforst, alle Fische im Poppelsdorfer Weiher, ...*

Definition

Die **Stichprobe** $\chi = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ ist der von uns erfasste Teil der Grundgesamtheit.

Eine Stichprobe ist also eine Teilmenge von Ω, z.B.

$$\begin{aligned} \chi &= \text{alle Hörer, die heute in der 1. Reihe sitzen} \\ \chi &= \text{2000 Bäume auf 10 repräsentativ ausgewählten Flächenstücken} \end{aligned}$$

Definition

Ein **Merkmal** $X(\omega)$ ist eine uns interessierende Eigenschaft einer statistischen Einheit ω. Die **Merkmalsausprägungen** sind alle möglichen Werte, die ein Merkmal annehmen kann.

Beispiel.

- $X(\omega) =$ *Körpergröße des Studenten* ω *(in cm)*
  Merkmalsausprägungen: alle positiven reellen Zahlen
- $X(\omega) =$ *von Wähler* ω *bevorzugte Partei*
  Merkmalsausprägungen: CDU, SPD, Grüne, FDP, Linke, keine, k.A.
- $(X(\omega), Y(\omega)) = ($*Alter von Wähler* ω, *von* ω *bevorzugte Partei*$)$
  mehrdimensionales Merkmal

Definition
Die in der Stichprobe beobachteten Merkmalsausprägungen

$$x_i = X(\omega_i), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

heißen **Merkmalswerte, Beobachtungswerte, oder Daten.**

Beispiel.

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, ..., x_n) &= (185, 193, 160, ..., 168) \quad \textit{(Größe in cm)} \\
(y_1, y_2, ..., y_n) &= (m, w, w, ..., m) \quad \textit{(Geschlecht)} \\
((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)) &= ((185, m), (193, w), ..., (168, m))
\end{aligned}$$

Beispiel. (Meinungsumfrage zur Präsidentenwahl in den USA)

- $\Omega =$ *alle Wahlberechtigten in Florida*
- $\chi =$ *"repräsentativ ausgewählte" Stichprobe von 5000 Wählern*
- *Beobachtetes Merkmal: Antwort auf Sonntagsfrage*
- *Merkmalsausprägungen: Obama, McCain, Nader, Enthaltung, unentschlossen*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_{5000}) = ($*Obama, McCain, Obama, unentschl.,....*$)$

Beispiel. (Klausurergebnis)

- $\Omega =$ *alle Schüler in Klasse 7c des EMA*
- $\chi = \Omega$
- *Beobachtetes Merkmal: Note in erster Matheklausur 2008/09*
- *Merkmalsausprägungen: 1,2,3,4,5,6*
- $(x_1, x_2, ..., x_{27}) = (2, 1, 1, 2, 3, 2, 4, 1, ...)$

Standarddarstellung von Datensätzen
(z.B. in Textdatei oder Excel-Tabelle):

Student	Geschlecht	Alter	Größe
1	m	23	195
2	w	25	193
3	w	18	165

Welche Merkmalsarten gibt es ?

- **Qualitative Merkmale**
  - **Nominalskaliert:**
    Merkmalsausprägungen haben keine natürliche Ordnung.
    Z.B. weiblich/männlich, CDU/SPD/Grüne/FDP/Linke/k.A.
  - **Ordinalskaliert:**
    Merkmalsausprägungen haben eine natürliche Ordnung.
    Z.B. super-gut-mittelmäßig-schlecht
    oder links-Mitte-rechts
- **Quantitative Merkmale**
  - **Metrisch skaliert (Kardinalskaliert):**
    Merkmale sind Zahlen, und können auf sinnvolle Weise addiert und subtrahiert werden (d.h. die Abstände der Zahlen haben eine praktische Bedeutung).
    Z.B. Alter, Bevölkerungszahl, Temperaturmeßwert,....

Beipiele.

1. *Präsidentenwahl USA*
   Merkmalsausprägungen: Obama, McCain, Nader, k.A.
   Qualitativ, Nominalskaliert
2. *Klausurnoten in der Schule*
   Das Merkmal ist eigentlich **qualitativ** und **ordinalskaliert**, denn die Ergebnisse werden in geordnete Gruppen eingeteilt ("sehr gut","gut","befriedigend",...). Häufig wird das Merkmal "Klasurnote" aber *quantitativ* interpretiert, und es werden z.B. Mittelwerte von mehreren Klausurnoten gebildet.
3. *Körpergröße von Studenten*
   Metrisch skaliert - kontinuierlich

Beipiele.

1. *Präsidentenwahl USA*
   Merkmalsausprägungen: Obama, McCain, Nader, k.A.
   Qualitativ, Nominalskaliert
2. *Klausurnoten in der Schule*
   Das Merkmal ist eigentlich **qualitativ** und **ordinalskaliert**, denn die Ergebnisse werden in geordnete Gruppen eingeteilt ("sehr gut","gut","befriedigend",...). Häufig wird das Merkmal "Klasurnote" aber *quantitativ* interpretiert, und es werden z.B. Mittelwerte von mehreren Klausurnoten gebildet.
3. *Körpergröße von Studenten*
   Metrisch skaliert - kontinuierlich
4. *Regentage pro Woche*
   Metrisch skaliert - diskret
   (kann man auch als ordinalskaliert interpretieren)

Bemerkungen.

- Es gibt noch andere Arten von Merkmalsausprägungen.
- Nicht immer gibt es eine eindeutige Zuordnung.
- Quantitative Merkmale können durch Klasseneinteilung in ordinalskalierte Merkmale überführt werden.

Beispiel. (Anzahl der Regentage pro Jahr)

0-70 trocken, 70-150 normal, $>$150 nass

Gesichtspunkte bei der Datenerhebung

Welche statistischen Einheiten werden betrachtet ? Wie wird die Stichprobe gewählt ?

- Welche Einheiten betrachtet werden, muß möglichst genau abgegrenzt werden:
  - sachlich (z.B. Hörer der Vorlesung Biometrie und Methodik)
  - räumlich (an der Universität Bonn, landwirtschaftl. Fakutät)
  - zeitlich (erste Vorlesung im WS 08/09)
- Die Auswahl der Stichprobe muß genau durchdacht sein, und wiederum genau abgegrenzt werden.
  - Idealfall: Zufallsstichprobe
  - Oft ist das Ziehen einer Zufallsstichprobe nicht möglich. Klassische wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle sind dann nicht mehr unmittelbar anwendbar. Wie erhält man trotzdem eine "repräsentive" Stichprobe, d.h. eine Stichprobe, deren Eigenschaften denen einer Zufallsstichprobe "möglichst nahe kommen" ?

Beispiel zur Wahl der statistischen Einheiten

- Sie wollen die Erträge pro Anbaufläche von Baumwollfarmer/innen im Mittleren Westen der U.S.A. untersuchen. Mithilfe eines "Stichprobendesigns" wählen Sie 75 Farmen aus. Sie telefonieren mit den Farmern, und haben anschließend einen Zettel vor sich, der ungefähr so aussieht (die 75 Farmen haben Sie durchnummeriert):

Farm	Name	Tel.-No.	Anbaufläche in Morgen	Jahresproduktion in Pfund
1.	Jane	0361-5576	150	38250
2.	Bob	0342-43487	100	37300
3.	Gerry	0416-6437	325	81250
4.	Mary	0531-43476	400	130 000
5.	Greg	0327-64764	370	103970
6.	...	...	...	...
...				

- Einen solchen Zettel nennen wir die Urliste.

- Der nächste Schritt ist die Bearbeitung der Urliste. Lassen Sie alle Daten weg, die Sie für Ihre Untersuchung für unwichtig halten, z.B. den Namen des Farmers / der Farmerin, die Tel-No. etc...
- Berechnen Sie die interessierende Größe Ertrag/Anbaufläche

Farm	Fläche [Morgen]	Jahresproduktion [Pfund]	Flächenertrag
1.	150	38250	255
2.	100	37300	373
3.	325	81250	250
4.	400	130 000	325
5.	370	103970	281
6.	...	...	...
...			

- Da Sie sich nur für die letzte Spalte interessieren, lassen Sie die drei ersten Spalten weg und erhalten, indem Sie nach der Höhe des Flächenertrags sortieren:

Tabelle der Baumwollerträge pro Fläche (in Pfund/(Morgen $\times$ Jahr)) von 75 Farmen im Westen der USA

215	217	228	234	235
242	249	250	251	254
255	256	257	258	259
260	260	261	268	268
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
354	358	365	367	373

- Diese Darstellung ist zwar vollständig, aber nicht besonders übersichtlich. Besser ist es daher, die Daten in Klassen aufzuteilen.

Einteilung in Klassen

- In wieviele Klassen sollen wir die Daten einteilen? Einen Anhaltspunkt liefert die Faustformel von Sturge:

$$\boxed{K = 1 + \log_2 n}$$

mit K der Anzahl von Klassen (muss gerundet werden) und n der Anzahl der untersuchten Einheiten. Für $n = 75$ liegt $K = 7.037$ ziemlich nah bei 7.

- Den Wertebereich (215-373) teilen wir also in 7 gleichgroße Klassen der Breite $(373 - 215)/7 \cong 20$ auf. Durch die Rundungsfehler passt der Wertebereich dann schließlich in 8 Klassen. Wir berechnen nun die Häufigkeit, dass der Ertrag/Fläche in einer bestimmten Klasse liegt:

Häufigkeit und Klassenmittelpunkte in Pfund Baumwolle pro Morgen und Jahr

Klasse	Klassenmittelpunkt	Häufigkeit
215–235	225	4
235–255	245	6
255–275	265	13
275-295	285	21
295-315	305	15
315–335	325	7
335–355	345	5
355–375	365	4
Summe		75

- Nach Anschauen der Tabelle könnte man nun sagen:

> Der mittlere Baumwollertrag liegt im mittleren Westen der USA bei ca. 295 Pfund/(Morgen x Jahr)

- Kennt man nun die Gesamtanbaufläche von Baumwolle im Mittleren Westen, könnte man auf die jährliche Gesamtproduktion schließen...

Dieser Schluß ist falsch!!!

- Die vorhandenen Daten wurden falsch interpretiert. Man nehme einen extremen Fall an: Eine Farmerin, Jill, ist eine gefürchtete Baumwollbaronin, mit einer Anbaufläche von 70.000 Morgen und einem Ertrag von 367 Pfund/Morgen. Diesen weit überdurchschnittlichen Ertrag/Morgen erzielt sie, da sie sich nicht an Umweltauflagen zu halten braucht, stattdessen geht sie jede Woche mit dem Gouverneur essen...

  - Obwohl die Farm von Jill die Gesamtproduktion sehr stark beeinflusst, geht sie in unserer Statistik nur mit einem Eintrag ein, genau wie die Minifarm von Bob.
  - Unsere Daten aus der gruppierten Tabelle erlauben i.a. keine Aussagen über den mittleren Ertrag auf einem Morgen. Es werden in dieser Tabelle nämlich nicht die Morgen, sondern die Farmen als statistische Einheiten untersucht.
  - Wollten wir die Morgen untersuchen, müssten wir eine Tabelle aufstellen, in denen der Ertrag eines Morgens auf jeder Farm mit ihrer Größe (also der Anzahl von Morgen) gewichtet wird.

- Sind die Daten in dem Diagramm also nutzlos? Nein, aber wir haben sie so aufbereitet, dass wir nur noch nach dem fragen können, was tatsächlich untersucht wird, die Effizienz der Farmer/innen! Richtige, durch die Daten gestützte Aussagen sind z.B.:
  - "Farmerin Jane mit 255 Pfund/(Morgen x Jahr) muss sich sorgen um ihren Ertrag machen, denn die mittlere Farmerin / der mittlere Farmer erzielt deutlich mehr - vielleicht macht sie etwas falsch?"
  - "Die Baumwollbaronin Jill kann mit 367 Pfund/(Morgen x Jahr) sehr zufrieden sein."
  - "Übertroffen wird sie nur von Farmer Bob mit der Minifarm. Das ist sehr bemerkenswert und man sollte in Erfahrung bringen, was Bob besser macht als die anderen"
  - Die Daten sind also durchaus aussagekräftig (für Jane, Jill & Bob, aber nicht für den Minister für Export, der die Gesamtproduktion kennen möchte).

Grundlagen der Medizinischen Statistik

Walter Lehmacher

Institut für Medizinische Statistik, Informatik und Epidemiologie der Universität zu Köln

1. Einleitung
2. **Deskriptive Statistik**
3. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verteilungen
4. Diagnostische Tests
5. Konfidenzintervalle
6. Signifikanztests
7. Nichtparametrische Tests
8. Kontingenztafeln
9. Überlebenszeitanalysen
10. Korrelation, Regression
11. Epidemiologie
12. Versuchsplanung
13. Klinische Studien
14. Varianzanalysen, Verlaufskurven, Crossover, Verschiedenes

UNIKLINIK KÖLN
Institut für Medizinische Statistik, Informatik und Epidemiologie

2008

Grundlagen der Medizinischen Statistik

Montag

Deskriptive Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verteilungen, Diagnostische Tests

Dienstag

Konfidenzintervalle

Signifikanztests

Mittwoch

Nichtparametrische Tests

Kontingenztafeln, Überlebenszeitanalysen

Donnerstag

Korrelation, Regression

Epidemiologie

Freitag

Versuchsplanung, klinische Studien

Varianzanalysen, Verlaufskurven, Crossover

Deskriptive Statistik $\leftrightarrow$ Inferentielle Statistik

Beschreibung von Daten, Exploration

Schluss von einer Stichprobe auf eine Grundgesamtheit oder eine Gesetzmäßigkeit

Deskriptive (beschreibende) Statistik

"Das Ziel der beschreibenden Statistik besteht darin, die bei Beobachtungen, Erhebungen und Experimenten anfallenden Daten so aufzubereiten, dass sie durchschaubar werden." (Lorenz, 1992)

Aufgaben:

- **Zusammenfassende und übersichtliche Darstellung quantitativer Aspekte beobachteter Sachverhalte**
- **Zusammenstellung von Ergebnissen in**
  - ✓ **Tabellen**
  - ✓ **Graphiken**

Die Sprache der Statistik: Definitionen

Population:

Gesamte Gruppe von Personen, Tieren oder Dingen, über die wir Information sammeln.

Beobachtungseinheit (Versuchseinheit, Merkmalsträger; Individual case, unit, experimental unit, sampling unit):

Die Objekte, die durch den Datensatz beschrieben sind.

Stichprobe (sample):

Teil der Population, von dem wir tatsächlich Informationen sammeln; wird benutzt, um Schlüsse auf die gesamte Population zu ziehen.

Beobachtungseinheit

(Versuchseinheit, Merkmalsträger, experimental unit, case, sampling unit)

ist die kleinste Einheit, an der die Beobachtungen durchgeführt werden.

Beispiele:

- **Patienten, Probanden**
- **Tiere**
- **Zellkulturplatten**
- **Gruppen von Individuen**
  - ✓ **Zwillingspaare**
  - ✓ **Nachkommen**
- **Kliniken**

Merkmale

Merkmal (Variable)

ist messbare Eigenschaft einer Beobachtungseinheit,

z.B.

- ✓ **Körpergröße**
- ✓ **Symptom**
- ✓ **Laborwerte**
- ✓ **Geschlecht**

Merkmalsausprägung

Wert, den die Messung eines Merkmals ergeben kann

z.B.

- ✓ **181 cm bei Merkmal Körpergröße**
- ✓ **männlich/weiblich bei Merkmal Geschlecht**

Von Informationen zu Daten

Informationen

- **Meßwerte (Labor)**
- **Texte (Diagnosen)**
- **Bilder (EKG, CT...)**
- **Audio/Video**
- **.....**

Datenmatrix

Nr.	M_1	M_2	...	M_p
1				
2				
...				
N				

Beispiel: Kardiovaskuläre Risikofaktoren bei Jugendlichen

Nr	Alter	Sex	SystMsg1	DiasMsg1	SystMsg2	DiasMsg2	Puls	Groe	Gew	Zuk	Chol	Gesch	Zig
20006	16	2	148	94	.	.	28	160	50	113	.	2	10
20230	19	1	166	80	160	76	22	186	76	86	250	8	0
20435	18	1	131	68	129	67	18	180	74	96	.	1	17
20602	17	2	98	48	98	48	24	161	48	111	283	5	5
20634	18	2	115	68	116	72	22	.	.	.	.	2	15
20808	16	1	124	70	120	75	17	171	61	115	122	2	0
20821	15	1	126	74	117	74	20	173	66	81	154	6	8
21128	18	2	125	67	119	66	19	172	66	96	146	1	0
21163	17	1	138	77	135	83	23	185	70	88	127	2	0
21255	15	2	105	63	107	63	21	169	50	87	.	1	0
21284	15	1	115	57	105	55	19	180	64	94	173	1	0
21442	19	2	116	54	111	50	20	173	60	96	188	5	25
21480	16	2	112	68	115	57	17	163	53	79	181	2	0
21528	18	2	126	68	122	64	18	172	62	92	128	4	0

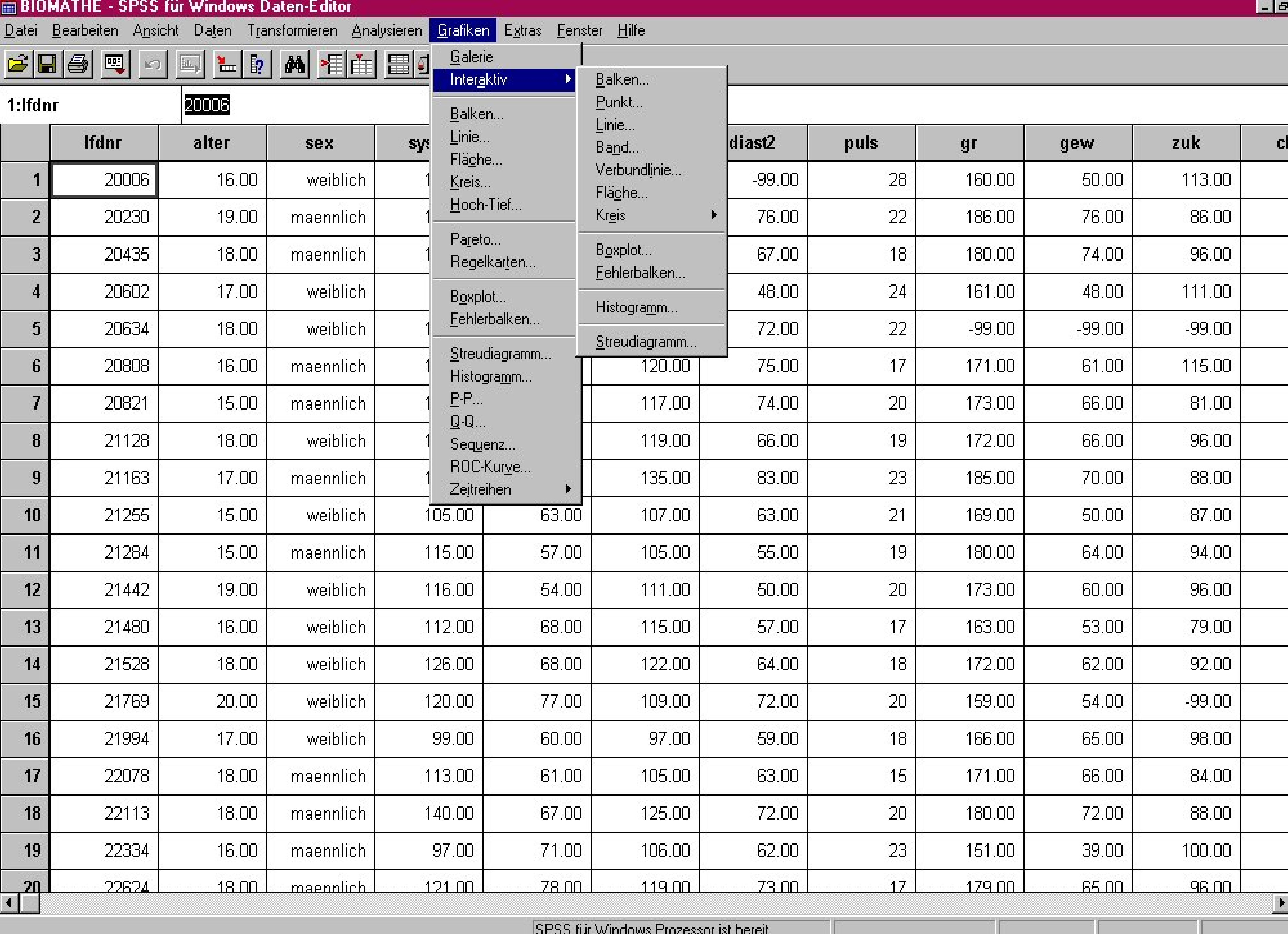
BIOMATHE - SPSS für Windows Daten-Editor

Datei Bearbeiten Ansicht Daten Transformieren Analysieren Grafiken Extras Fenster Hilfe

3:syst1 131

	lfdnr	alter	sex	syst1	diast1	syst2	diast2	puls	gr	gew	zuk	ch
1	20006	16.00	weiblich	148.00	94.00	-99.00	-99.00	28	160.00	50.00	113.00	
2	20230	19.00	maennlich	166.00	80.00	160.00	76.00	22	186.00	76.00	86.00	
3	20435	18.00	maennlich	131.00	68.00	129.00	67.00	18	180.00	74.00	96.00	
4	20602	17.00	weiblich	98.00	48.00	98.00	48.00	24	161.00	48.00	111.00	
5	20634	18.00	weiblich	115.00	68.00	116.00	72.00	22	-99.00	-99.00	-99.00	
6	20808	16.00	maennlich	124.00	70.00	120.00	75.00	17	171.00	61.00	115.00	
7	20821	15.00	maennlich	126.00	74.00	117.00	74.00	20	173.00	66.00	81.00	
8	21128	18.00	weiblich	125.00	67.00	119.00	66.00	19	172.00	66.00	96.00	
9	21163	17.00	maennlich	138.00	77.00	135.00	83.00	23	185.00	70.00	88.00	
10	21255	15.00	weiblich	105.00	63.00	107.00	63.00	21	169.00	50.00	87.00	
11	21284	15.00	maennlich	115.00	57.00	105.00	55.00	19	180.00	64.00	94.00	
12	21442	19.00	weiblich	116.00	54.00	111.00	50.00	20	173.00	60.00	96.00	
13	21480	16.00	weiblich	112.00	68.00	115.00	57.00	17	163.00	53.00	79.00	
14	21528	18.00	weiblich	126.00	68.00	122.00	64.00	18	172.00	62.00	92.00	
15	21769	20.00	weiblich	120.00	77.00	109.00	72.00	20	159.00	54.00	-99.00	
16	21994	17.00	weiblich	99.00	60.00	97.00	59.00	18	166.00	65.00	98.00	
17	22078	18.00	maennlich	113.00	61.00	105.00	63.00	15	171.00	66.00	84.00	
18	22113	18.00	maennlich	140.00	67.00	125.00	72.00	20	180.00	72.00	88.00	
19	22334	16.00	maennlich	97.00	71.00	106.00	62.00	23	151.00	39.00	100.00	
20	22624	18.00	maennlich	121.00	78.00	119.00	73.00	17	179.00	65.00	96.00	

SPSS für Windows Prozessor ist bereit


BIOMATHE - SPSS für Windows Daten-Editor
Datei Bearbeiten Ansicht Daten Transformieren Analysieren Grafiken Extras Fenster Hilfe
Galerie
Interaktiv
Balken...
Linie...
Fläche...
Kreis...
Hoch-Tief...
Pareto...
Regelkarten...
Boxplot...
Fehlerbalken...
Streudiagramm...
Histogramm...
P-P...
Q-Q...
Sequenz...
ROC-Kurve...
Zeitreihen
Balken...
Punkt...
Linie...
Band...
Verbundlinie...
Fläche...
Kreis
Boxplot...
Fehlerbalken...
Histogramm...
Streudiagramm...
1:lfdnr 20006
lfdnr alter sex sys diast2 puls gr gew zuk
1 20006 16.00 weiblich -99.00 28 160.00 50.00 113.00
2 20230 19.00 maennlich 76.00 22 186.00 76.00 86.00
3 20435 18.00 maennlich 67.00 18 180.00 74.00 96.00
4 20602 17.00 weiblich 48.00 24 161.00 48.00 111.00
5 20634 18.00 weiblich 72.00 22 -99.00 -99.00 -99.00
6 20808 16.00 maennlich 120.00 75.00 17 171.00 61.00 115.00
7 20821 15.00 maennlich 117.00 74.00 20 173.00 66.00 81.00
8 21128 18.00 weiblich 119.00 66.00 19 172.00 66.00 96.00
9 21163 17.00 maennlich 135.00 83.00 23 185.00 70.00 88.00
10 21255 15.00 weiblich 105.00 63.00 107.00 63.00 21 169.00 50.00 87.00
11 21284 15.00 maennlich 115.00 57.00 105.00 55.00 19 180.00 64.00 94.00
12 21442 19.00 weiblich 116.00 54.00 111.00 50.00 20 173.00 60.00 96.00
13 21480 16.00 weiblich 112.00 68.00 115.00 57.00 17 163.00 53.00 79.00
14 21528 18.00 weiblich 126.00 68.00 122.00 64.00 18 172.00 62.00 92.00
15 21769 20.00 weiblich 120.00 77.00 109.00 72.00 20 159.00 54.00 -99.00
16 21994 17.00 weiblich 99.00 60.00 97.00 59.00 18 166.00 65.00 98.00
17 22078 18.00 maennlich 113.00 61.00 105.00 63.00 15 171.00 66.00 84.00
18 22113 18.00 maennlich 140.00 67.00 125.00 72.00 20 180.00 72.00 88.00
19 22334 16.00 maennlich 97.00 71.00 106.00 62.00 23 151.00 39.00 100.00
SPSS für Windows Prozessor ist bereit

Skalenniveaus der Merkmale/Messungen

qualitativ (categorical)

ordinal **nominal**

quantitativ (numerical)

stetig (continuous) **diskret**

metrische Skala, Intervallskala

Verhältnisskala

Dichotome/binäre Merkmale

Ein Merkmal heißt dichotom (oder binär),

wenn es genau 2 Ausprägungen annehmen kann

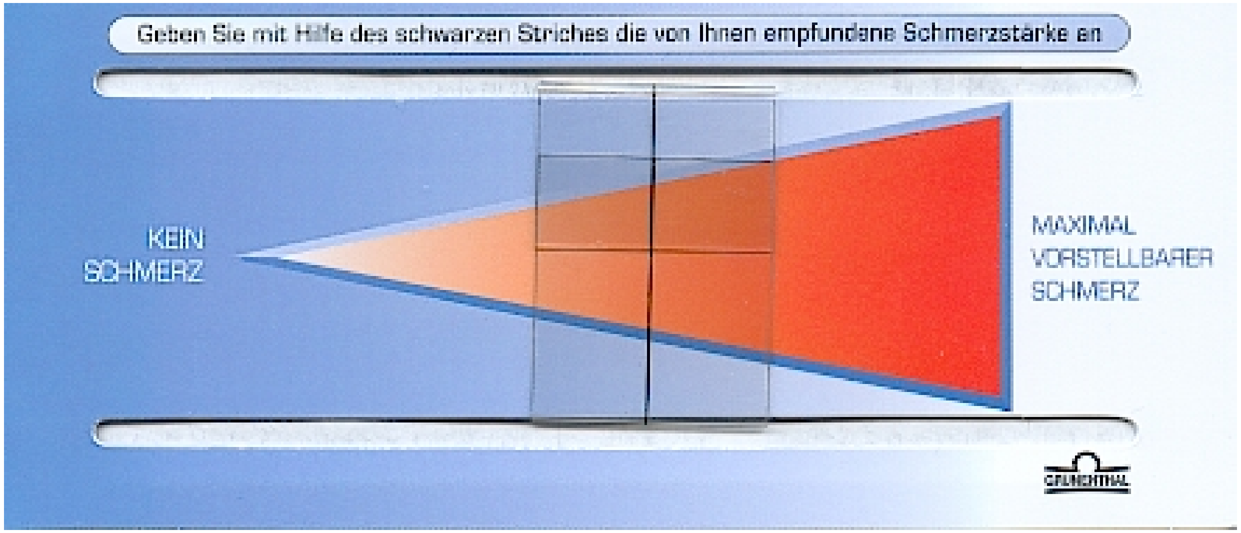
Beispiele:

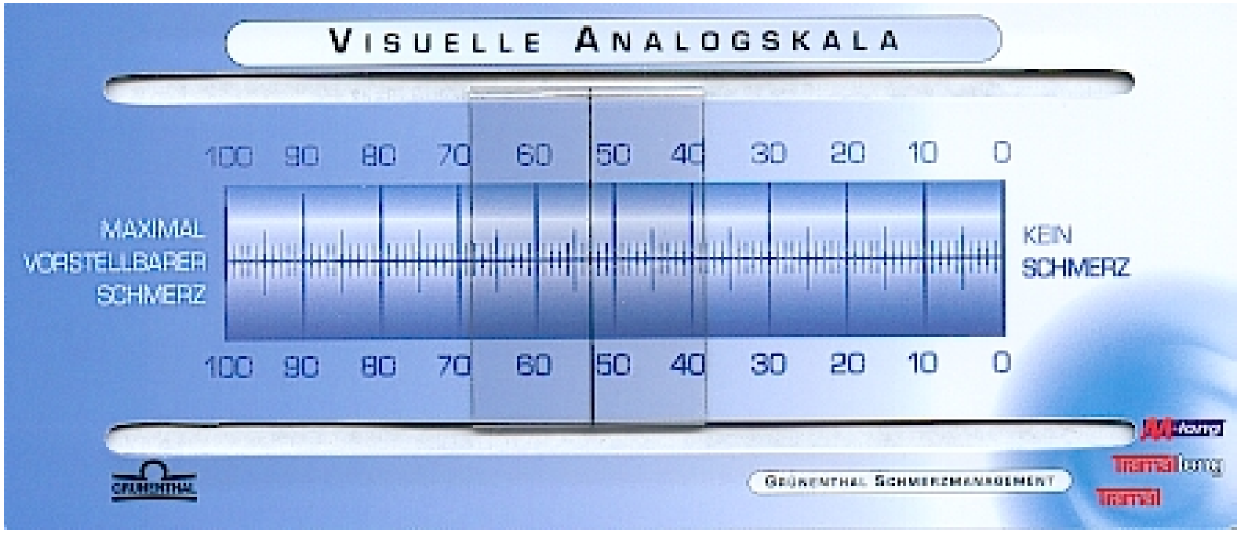
- ✓ **Geschlecht**
- ✓ **Krankheit vorhanden/nicht vorhanden**
- ✓ **Münzwurfergebnis**

Beispiele

- ✓ Geschlecht
- ✓ Blutgruppe
- ✓ Symptome
- ✓ Schmerzintensität
- ✓ Tumorstadium
- ✓ Alter [in Jahren]
- ✓ Herzfrequenz
- ✓ Gewicht
- ✓ Größe
- ✓ Blutdruck
- ✓ # Thrombozyten

Visuelle Analog-Skala (VAS)





Häufigkeiten

Nimmt der Wertebereich *K* Ausprägungen an, dann heißt für jede Ausprägung *x* in einer Erhebung vom Umfang *N*:

$h(x)$	absolute Häufigkeit
$f(x) = h(x)/N$	relative Häufigkeit
$F(x) = \Sigma f(x)$	relative Summenhäufigkeit

In der Praxis keine übergenauen Prozentangaben!

Faustregel:

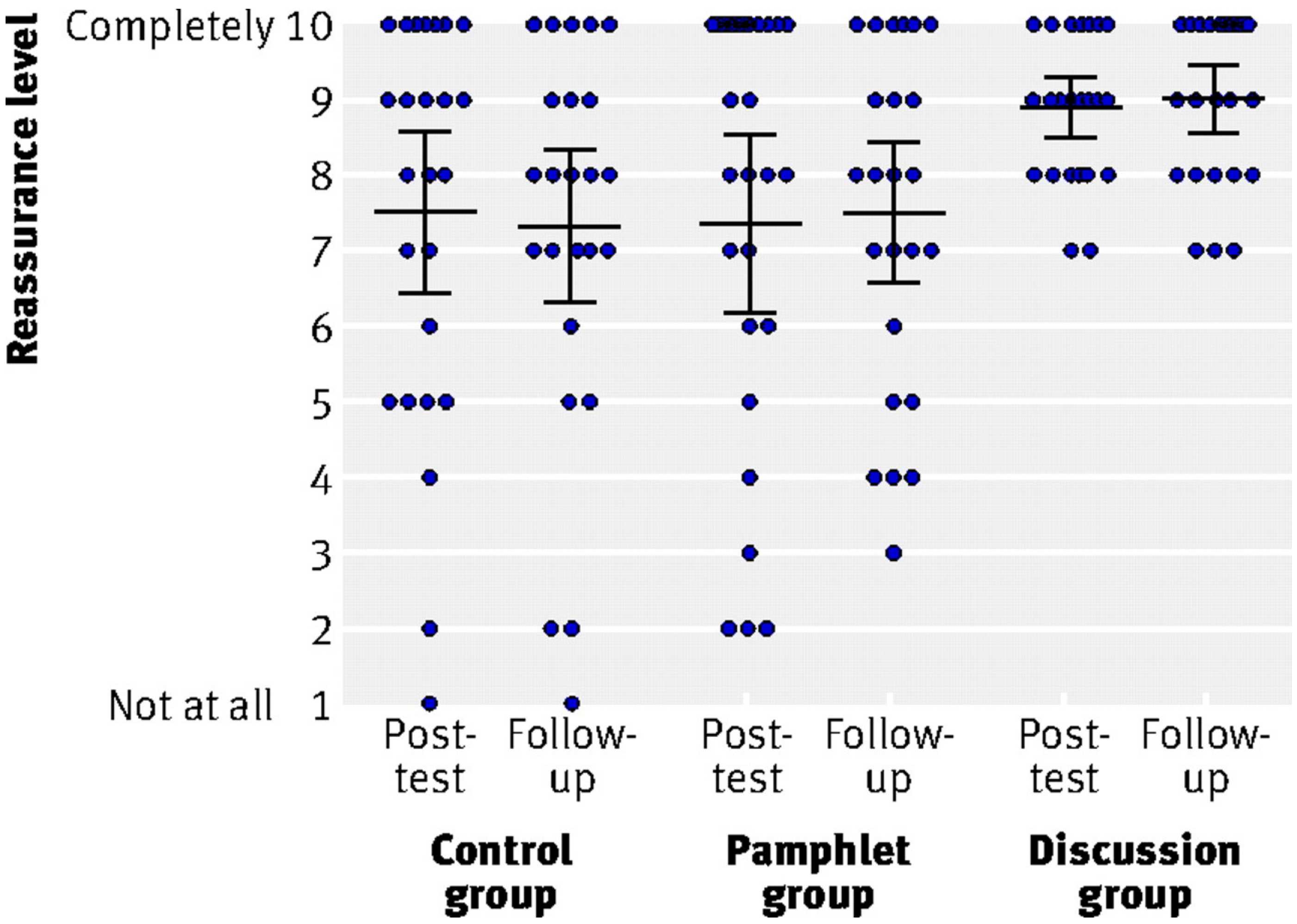
$N < 30$	keine %-Angaben
$30 \leq N < 300$	ohne bzw. höchstens eine Nachkommastelle
$300 \leq N < 3000$	eine Nachkommastelle

Häufigkeitsverteilungen

Darstellung erfolgt durch ...

- **Urlisten**
- **Dot Plots**
- **Häufigkeitstabellen**
- **Kreisdiagramme, Stabdiagramme,**
  Stem and leaf-Diagramme, Histogramme
- **Kenngrößen**

Dot plot for item asking patients how reassured they were by the exercise stress test after testing and at one month follow-up in experimental groups, including means (95% confidence intervals)



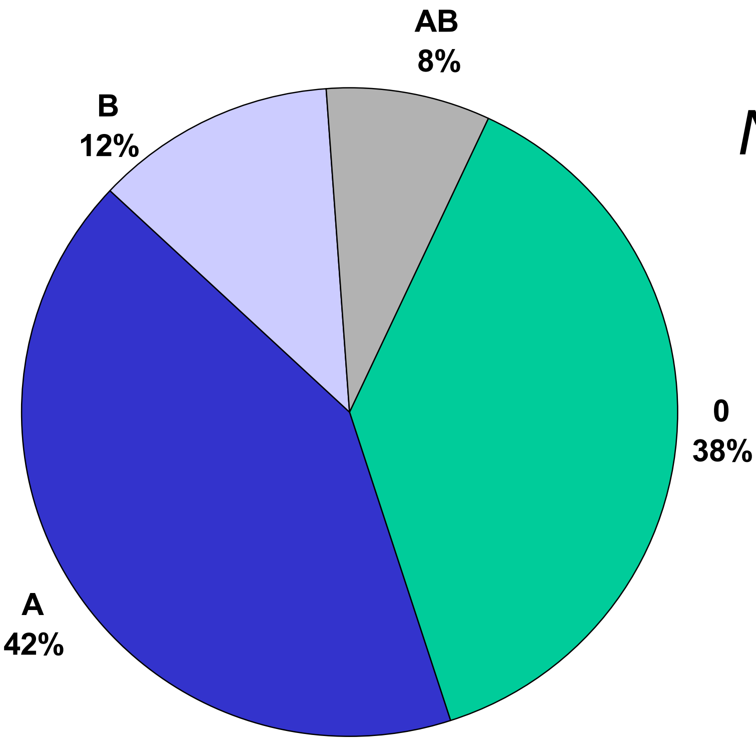
 Petrie, K. J et al. BMJ 2007;334:352

Beispiel für eine Häufigkeitstabelle

Verteilung der Blutgruppen in einer Erhebung vom Umfang N = 50

Blutgruppe x	*h(x)*	*f(x)*
0	19	38%
A	21	42%
B	6	12%
AB	4	8%
Σ	50	100%

Beispiel für ein Kreisdiagramm

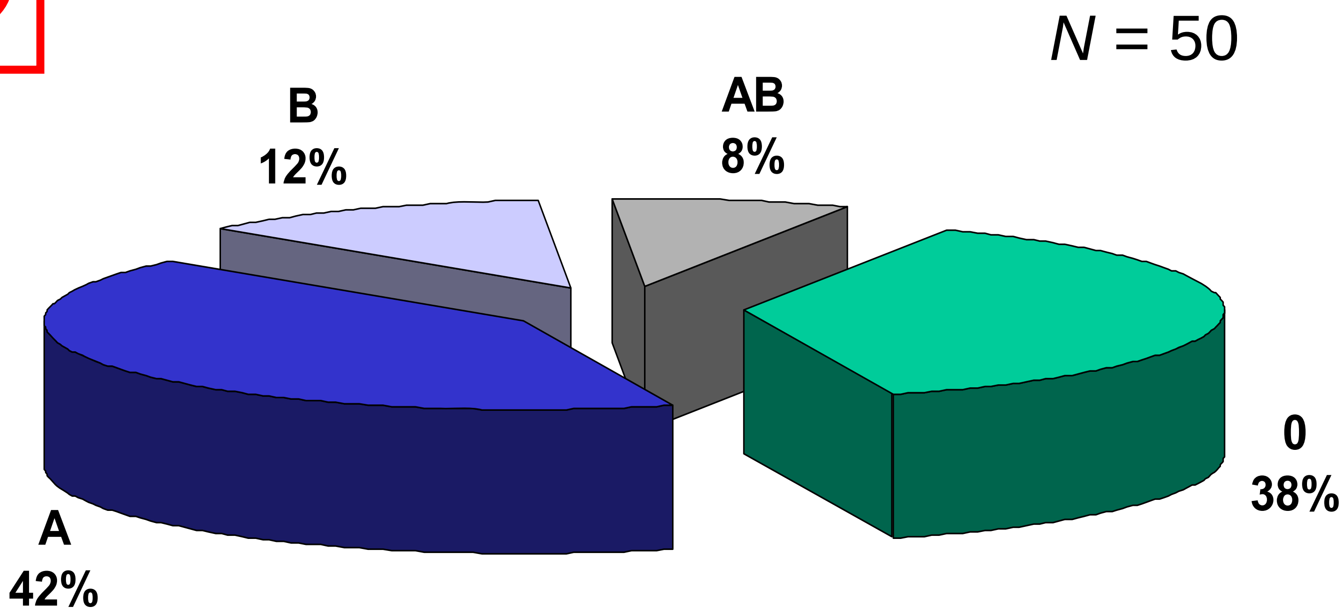


$N = 50$

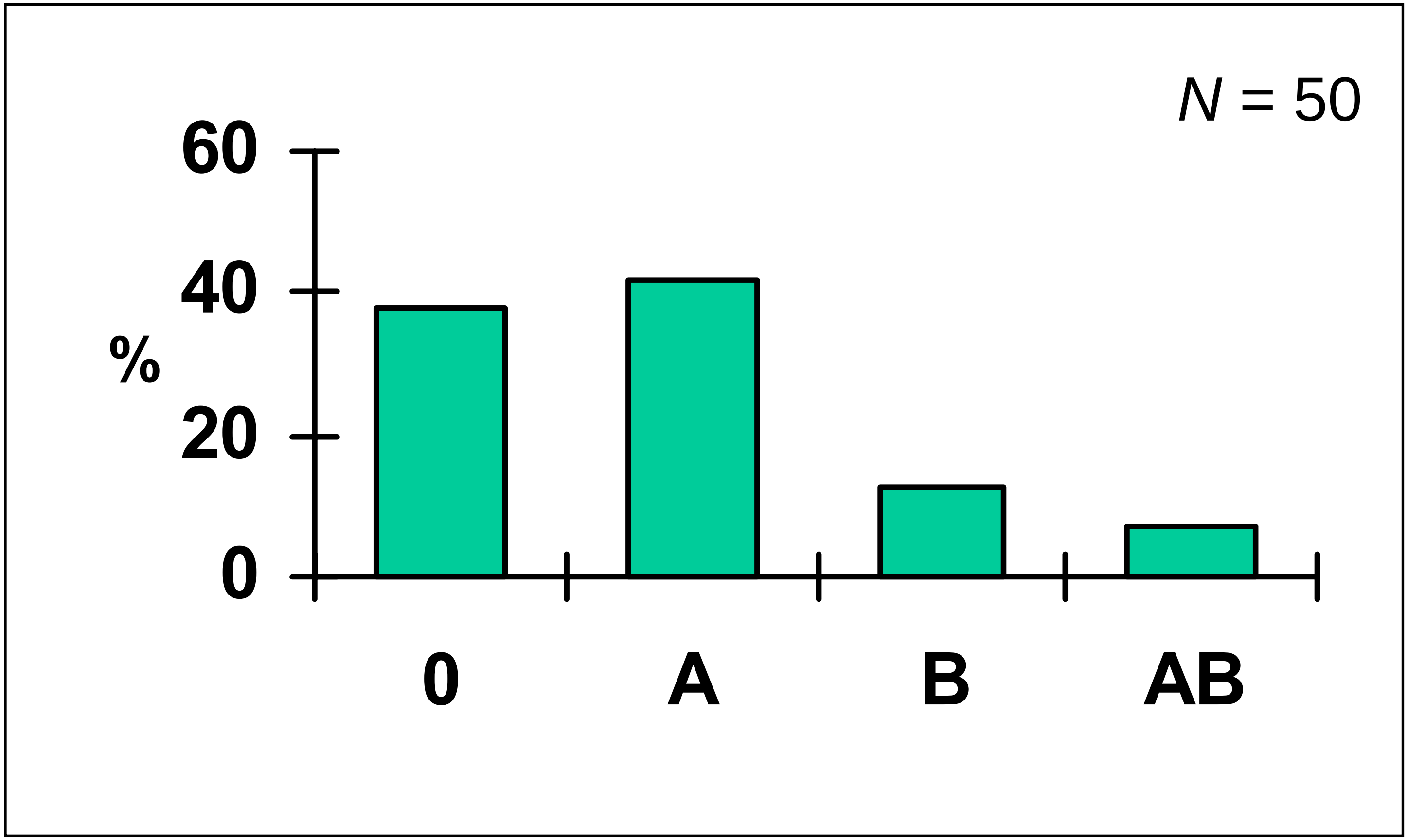
x	$f(x)$	Aufteilung der Winkelsumme
0	38%	$0.38 \cdot 360° = 136.8°$
A	42%	$0.42 \cdot 360° = 151.2°$
B	12%	$0.12 \cdot 360° = 43.2°$
AB	8%	$0.08 \cdot 360° = 28.8°$

Beispiel für ein Kreis(Torten)diagramm

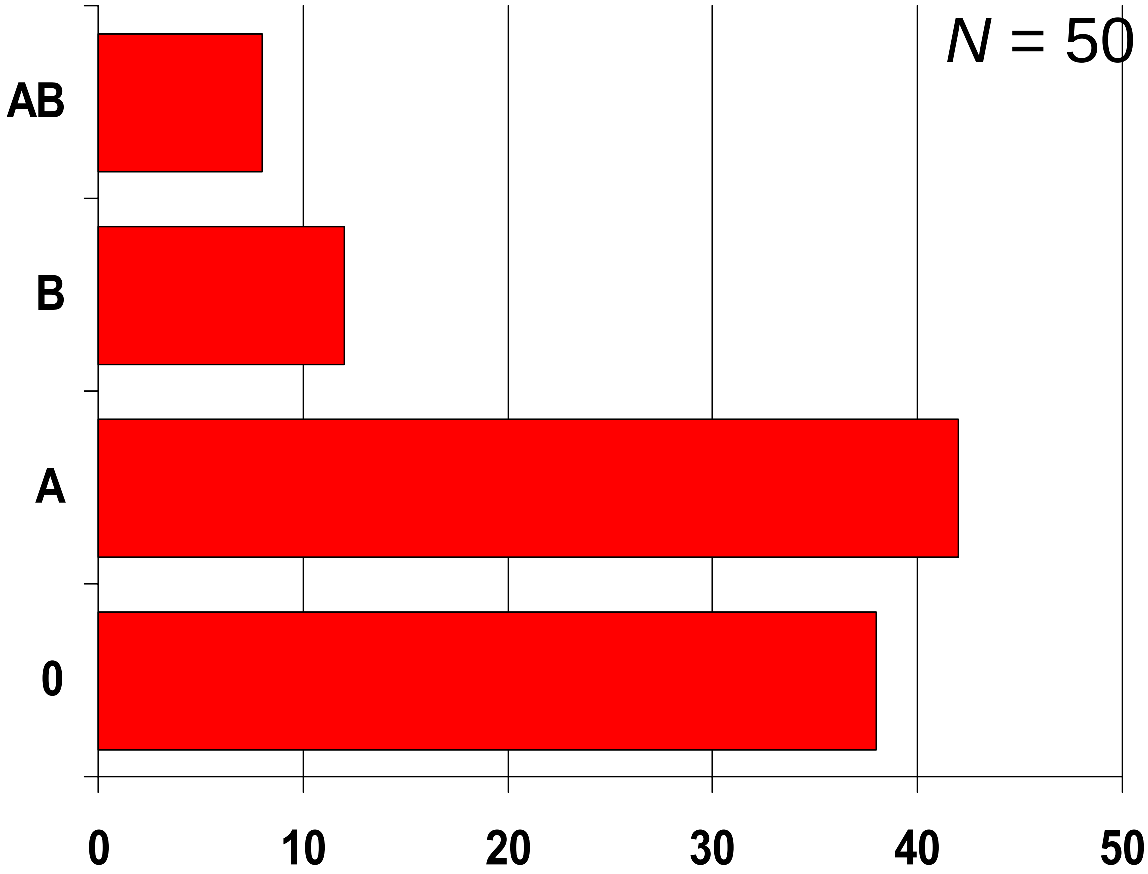
☹



Beispiel für ein Stab-, Balken-, Säulendiagramm



Beispiel für ein Balkendiagramm

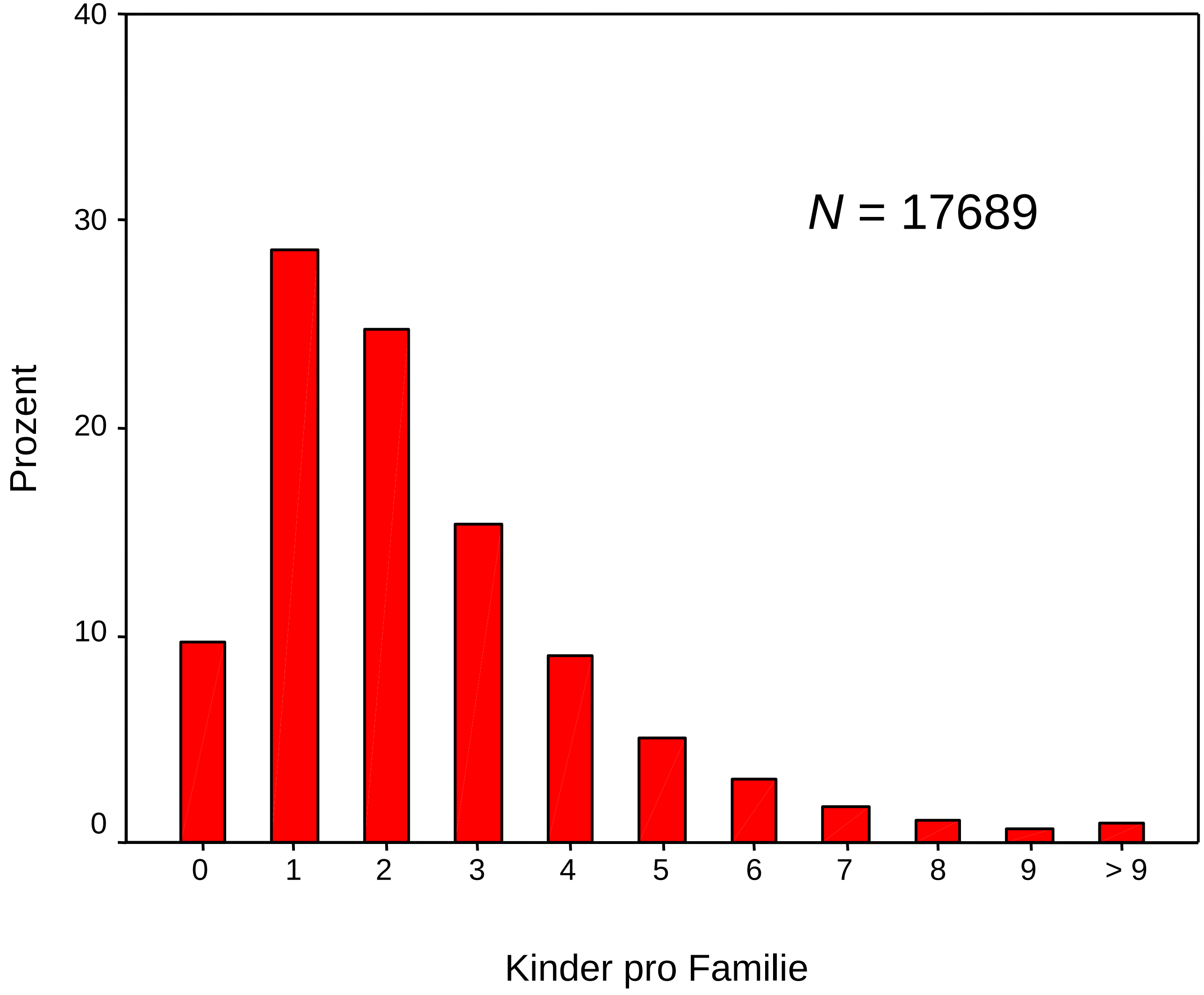


Beispiel für eine Häufigkeitstabelle

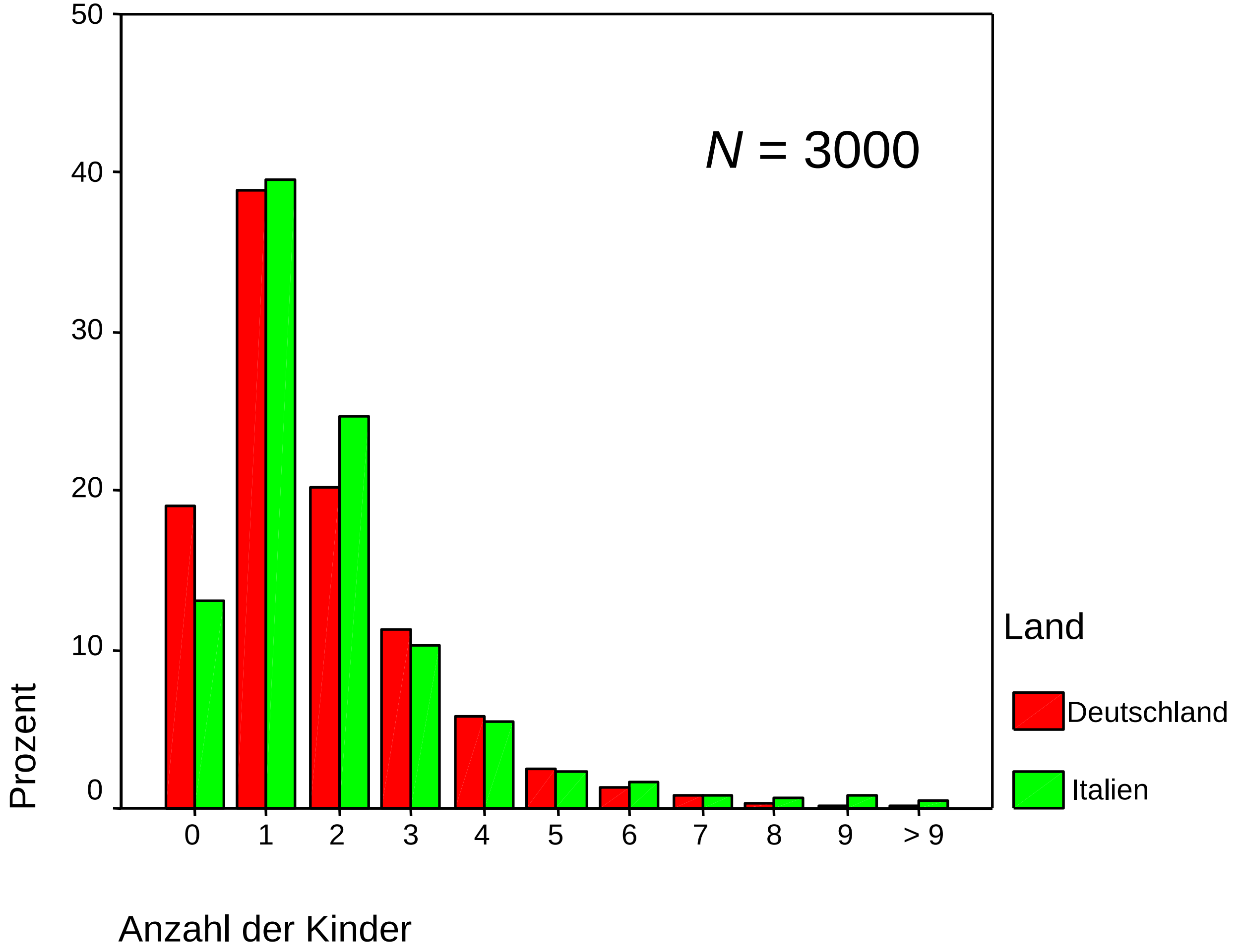
Anzahl der Kinder pro Familie in einer Erhebung vom Unfang N = 17689 (ECRHS, 30 Zentren)

Anzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>9
Absolute Häufigkeit	1706	5068	4385	2708	1590	887	544	314	195	120	172
Relative Häufigkeit	9.6%	28.7%	24.8%	15.3%	9.0%	5.0%	3.1%	1.8%	1.1%	0.7%	0.9%
Relative Summen-häufigkeit	9.6%	38.3%	63.1%	78.4%	87.4%	92.4%	95.5%	97.3%	98.4%	99.1%	100%

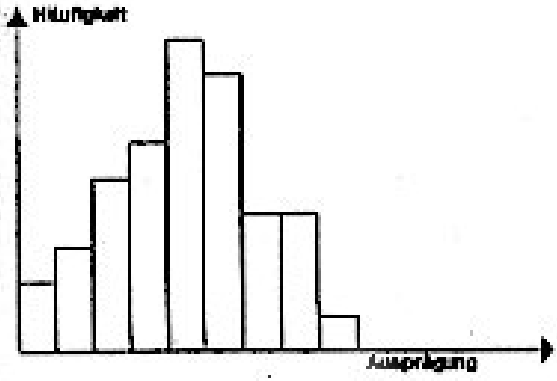
Beispiel für ein Stabdiagramm



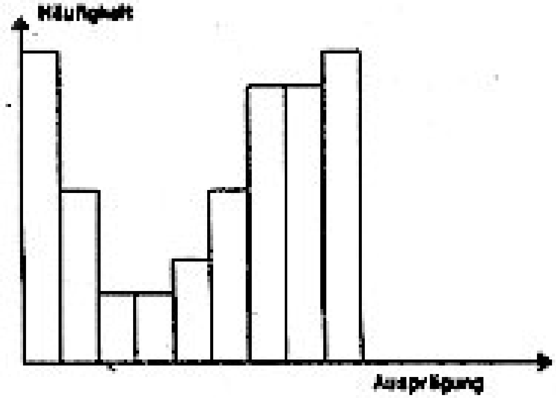
Beispiel: Stabdiagramm „nach Länder“



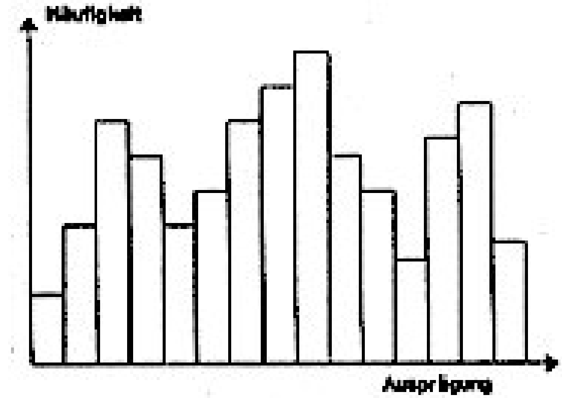
Typen von Häufigkeitsverteilungen



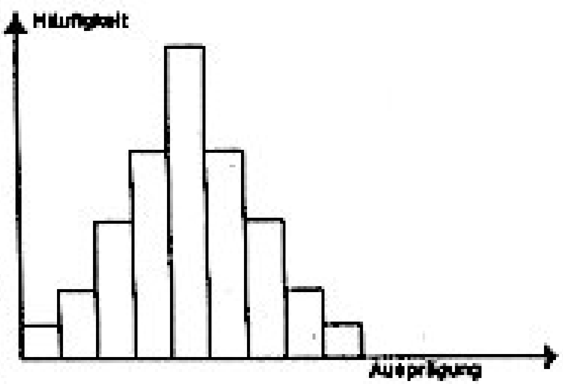
eingipflig
(unimodal)



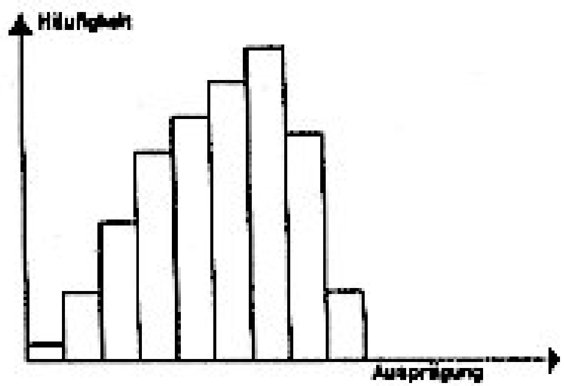
U-förmig



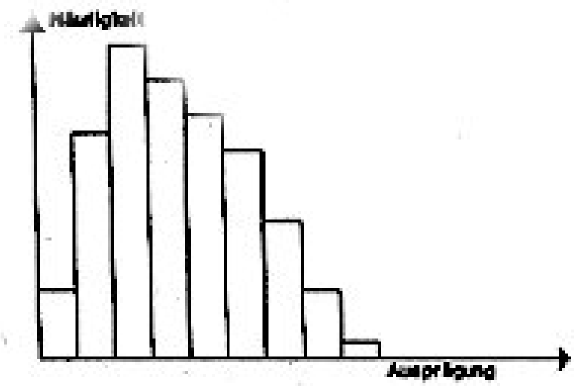
mehrgipflig



symmetrisch



linksschief



rechtsschief

Klassenbildung

In der Regel erforderlich bei stetigen Merkmalen:

Einteilung des Wertebereichs in endlich viele disjunkte Klassen bzw. Teilintervalle

Z.B. Körpergröße

[0; 140) [140; 150) [150; 160) [160;170) [170;180) [180; 200)

Aspekte:

- **Offene Klassen**
- **Anzahl der Klassen (Faustregel: Klassenanzahl ≈ $\sqrt{N}$)**
- **Äquidistante bzw. nicht-äquidistante Klassen**
- **Festlegung, ob Grenzen zur unteren oder zur oberen Klasse**

Urliste Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

CK-Werte

59	169	194	272
78	170	201	274
109	171	201	275
111	181	206	278
119	188	214	288
121	189	215	294
129	190	218	297
147	191	224	409
151	191	247	437
157	191	248	
158	193	252	
168	194	259	

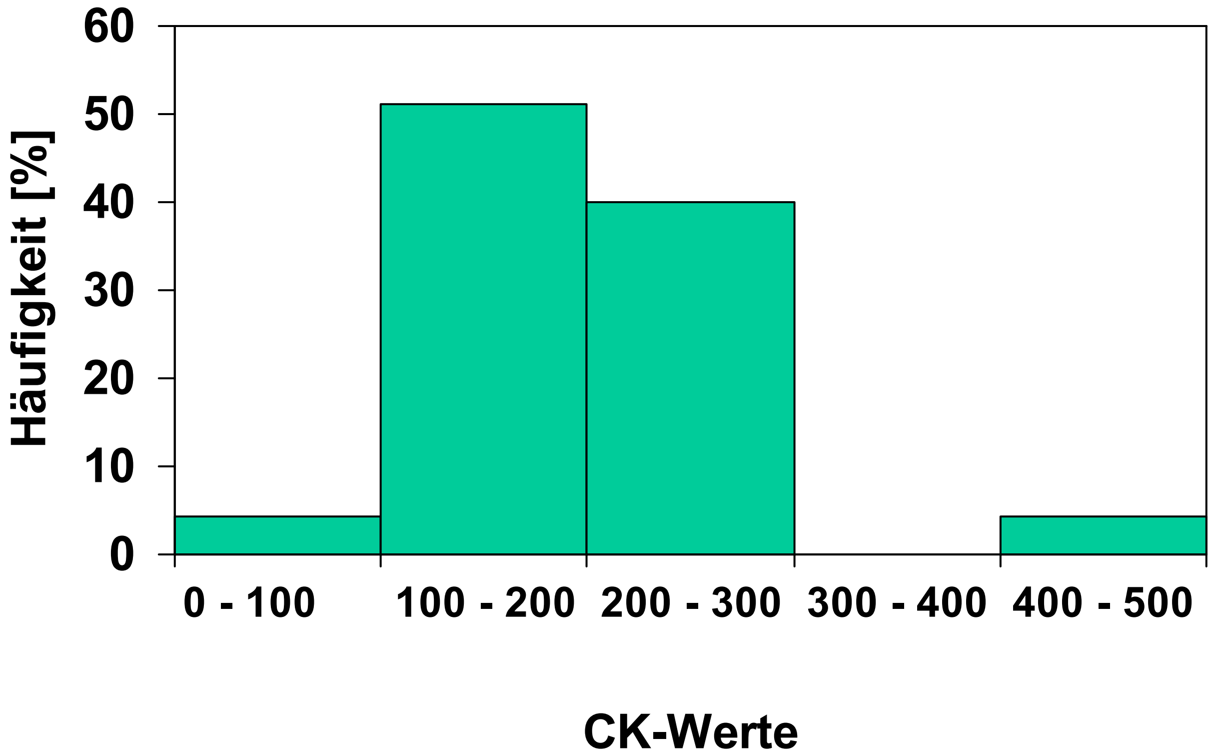
aus Trampisch, Windeler, 1997

Beispiel: Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

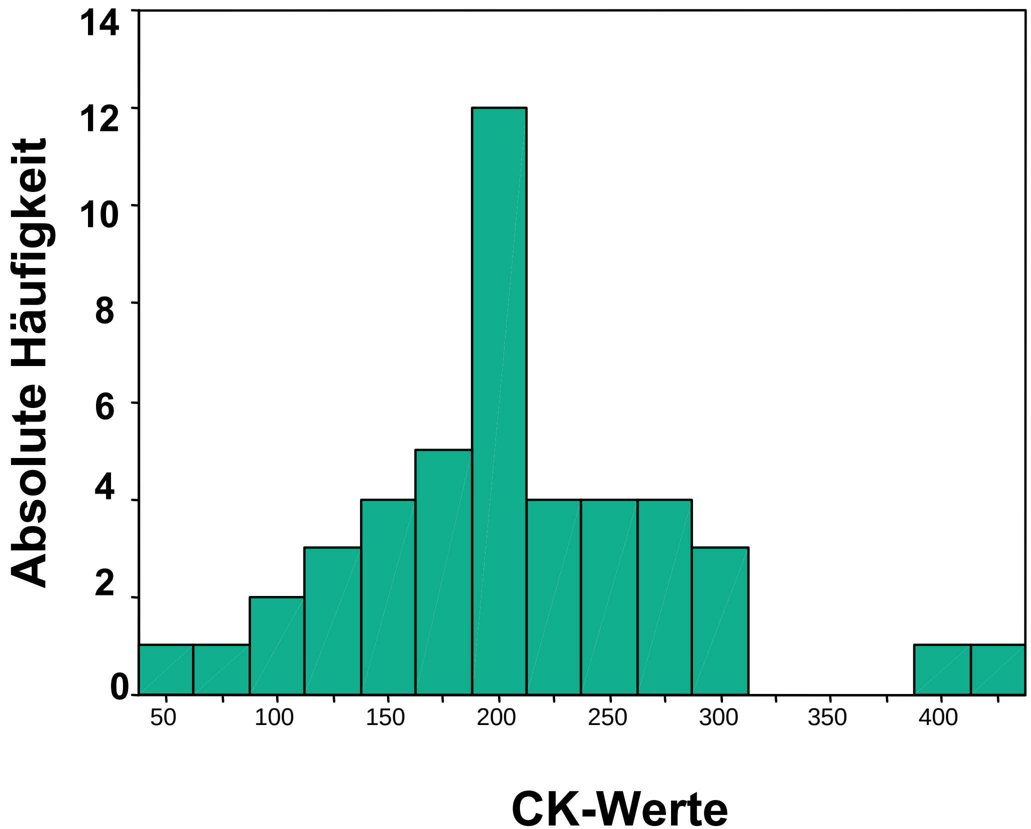
Intervall	*H(x)*	*f(x)* [%]
(0; 100]	2	4.4
(100; 200]	23	51.1
(200; 300]	18	40.0
(300; 400]	0	0.0
(400; 500)	2	4.4
$\sum$	45	100

aus Trampisch, Windeler, 1997

Histogramm CK-Werte



Histogramm CK-Werte



Beispiel: Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

*Un*gleiche Klassenbreiten

Intervall	$H(x)$	$f(x)$ [%]
(0; 100]	2	4.4
(100; 120]	3	6.7
(120; 200]	20	44.4
(200; 300]	18	40.0
(300; 500)	2	4.4
Σ	45	100

aus Trampisch, Windeler, 1997

Beispiel: Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

Korrektes Histogramm

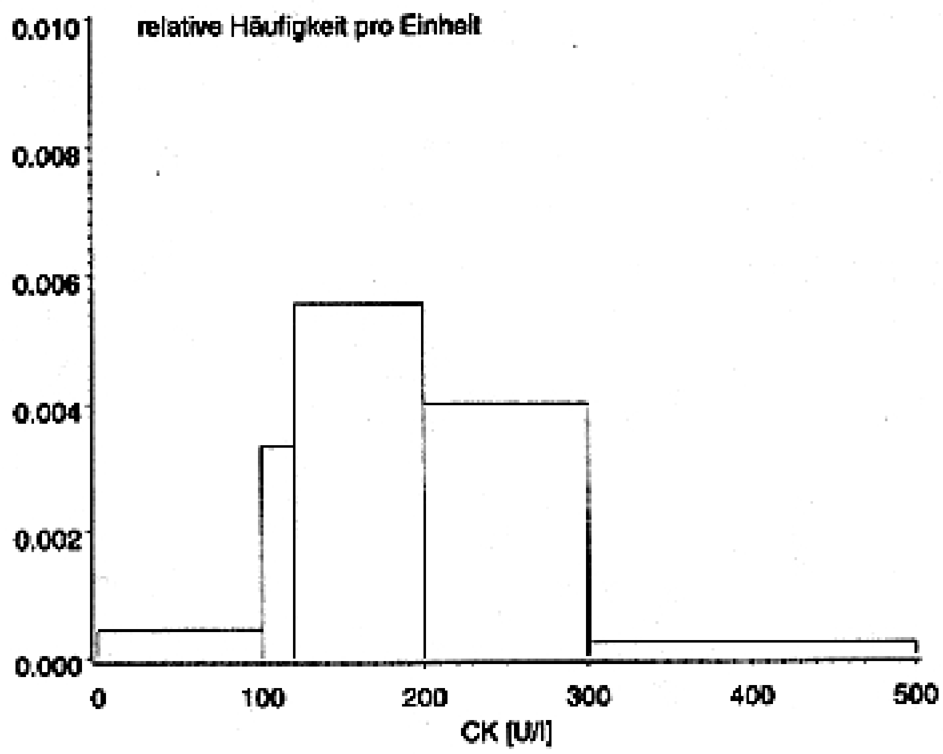


Abb. 5.6. Graphische Darstellung der klassierten CK-Werte als Histogramm.

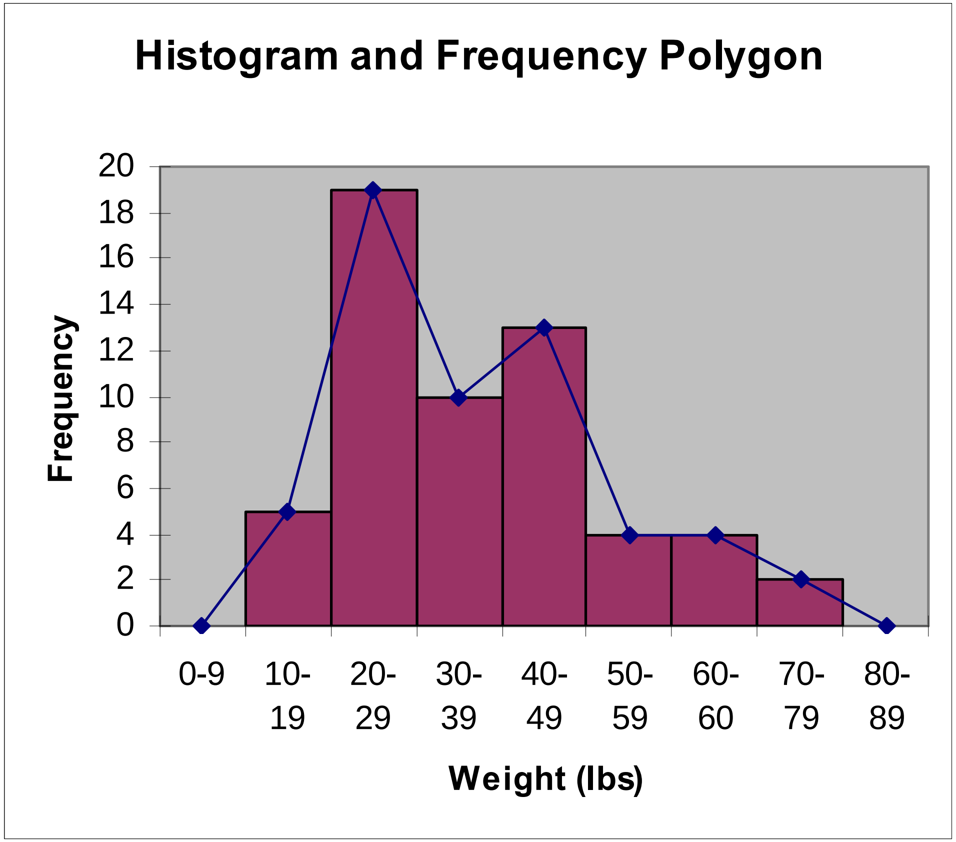
Beispiel: Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

Ungleiche Klassenbreiten

Intervall	*H(x)*	*f(x)* [%]	f(x)/ Intervallbreite
(0; 100]	2	4.4	0.00044
(100; 120]	3	6.7	0.00335
(120; 200]	20	44.4	0.00555
(200; 300]	18	40.0	0.00400
(300; 500)	2	4.4	0.00022
Σ	45	100	

aus Trampisch, Windeler, 1997

Häufigkeitspolygon und Histogramm



Merke:

- **Beim Histogramm sind die Flächen der Rechtecke proportional zur relativen oder absoluten Häufigkeit der Klassen (Prinzip der „Flächentreue“).**

  Nur bei äquidistanten Klassen ergibt sich, dass die Höhen der Rechtecke proportional zur Häufigkeit sind

- **Beim Stab-, Balken- und Säulendiagramm sind die Höhen der Rechtecke bzw. Stäbe proportional zur relativen oder absoluten Häufigkeit der Klassen (Prinzip der „Längentreue“).**

- **Beim Kreisdiagramm sind die Flächen (oder Volumen) der Segmente proportional zur relativen oder absoluten Häufigkeit der Klassen (Prinzip der „Flächentreue“).**

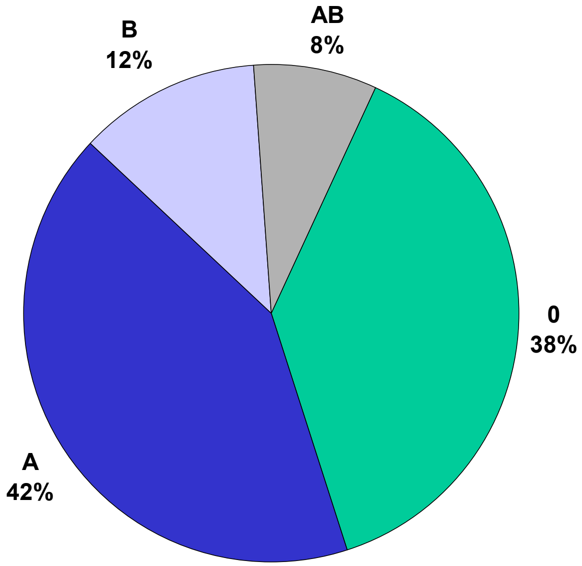
Qualitatives Merkmal

Maßzahl, um die Häufigkeitsverteilung zu charakterisieren:

Modalwert: Häufigster Wert

Evtl. nicht eindeutig

Beispiel: Verteilung der Blutgruppen



Modalwert = Blutgruppe A

Ordinales Merkmal, Rangmerkmal

Maßzahlen, um die Häufigkeitsverteilung zu charakterisieren:

- **Modalwert**: Häufigster Wert
- **Quantile**

  Z.B. Median $\tilde{x}$ (Zentralwert):

  Mindestens 50% der Werte sind kleiner oder gleich und mindestens 50% sind größer oder gleich $\tilde{x}$.

  Der Median teilt die Verteilung „in der Mitte“

Median (Zentralwert) x_{med} oder $\tilde{x}$

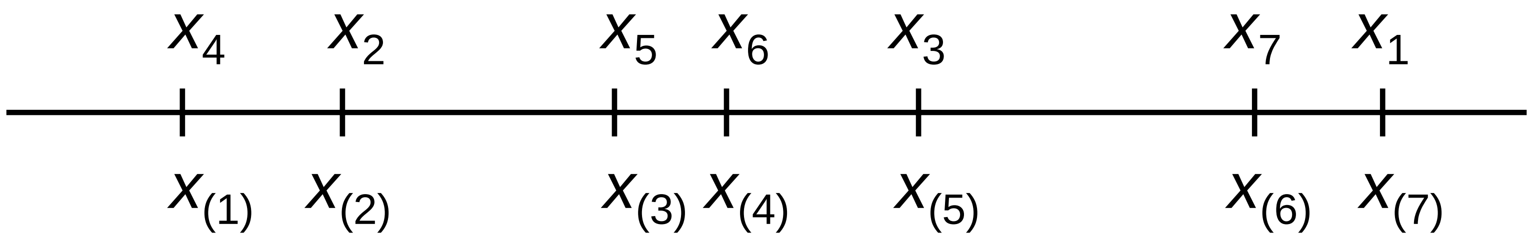
Mindestens 50% der Messwerte sind kleiner oder gleich und mindestens 50% sind größer oder gleich x_{med} .

Der Median teilt die Verteilung „in der Mitte“

Urliste und Rangliste

Gegeben: (mindestens) ordinal skalierte Merkmale

Urliste



Rangliste

Median $\tilde{x} = x_{(4)}$

Berechnung des Medians

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Beispiele

Beurteilungen *n* = 7: gut, gut, mangelhaft, sehr gut, befriedigend, sehr gut, mangelhaft

Median $\tilde{x} = x_{(4)} = \text{gut}$

Beurteilungen *n* = 6: gut, gut, mangelhaft, sehr gut, befriedigend, mangelhaft

Median $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_{(3)} + x_{(4)}) = ?$ 2-3 oder 2.5

Beachte: Viele Rangmerkmale sind quasi-quantitativ

Perzentile (Quantile)

Ein (empirisches) p-Perzentil gibt den Wert x_p auf der Skala an, bei dem ein Anteil von ca. p aller Beobachtungen kleiner und ein Anteil von ca. 1 – p größer als x_p ist; $p \in [0, 1]$.
Genauer: mindestens ein Anteil p aller Messwerte sind $\leq x_p$ und mindestens ein Anteil von (1 – p) aller Messwerte sind $\geq x_p$
(Oft Angabe in %)

Beispiele:

Median = x_{50} = 50. Perzentil = 50%-Perzentil = 50er Perzentil

unteres Quartil = x_{25} = 25%-Perzentil

oberes Quartil = x_{75} = 75%-Perzentil

Perzentile mit p in %; z. B.:

90. Perzentil, 90er Perzentil oder 90%-Perzentil

Quantile, Fraktile x_p mit $0 < p < 1$; z. B.:

Median = $x_{0,5}$
unteres Quartil = $x_{0,25}$

Bestimmungsmethode

1. Berechne $q = n \cdot p$

2. Fallunterscheidung:

   ✓ Ist q keine ganze Zahl, so ist $\tilde{x}_p = x_{(q^+)}$, wobei q^+ die auf q folgende ganze Zahl ist.

   ✓ Ist q eine ganze Zahl, so ist $\tilde{x}_p = \frac{1}{2}(x_{(q)} + x_{(q+1)})$

Urliste und Rangliste

Beispiel: $N = 10$, $p = 0.90$

Rangliste

$x_{(1)}$ $x_{(2)}$ $x_{(3)}$ $x_{(4)}$ $x_{(5)}$ $x_{(6)}$ $x_{(7)}$ $x_{(8)}$ $x_{(9)}$ $x_{(10)}$

90%-Quantil = $(x_{(9)} + x_{(10)})/2$

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern

Urliste:

10 9 14 14 15 12 14 11 11 10

17 13 13 20 28 10 13 15 11 11

12 12 8 14 14 11 12 13 12 11

Häufigkeitstabelle:

Liegedauer x_i [Tage]	$H(x_i)$
8	1
9	1
10	3
11	6
12	5
13	4
14	5
15	2
17	1
20	1
28	1
	30

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern

Liegedauer x_i [Tage]	$H(x_i)$
8	1
9	1
10	3
11	6
12	5
13	4
14	5
15	2
17	1
20	1
28	1
	30

$\tilde{x}_{0.10}$: $q = n \cdot p = 30 \cdot 0.1 = 3$, d.h.

$$\tilde{x}_{0.10} = \frac{1}{2}(x_{(3)} + x_{(4)}) = \frac{1}{2}(10 + 10) = 10$$

$\tilde{x}_{0.25}$: $q = n \cdot p = 30 \cdot 0.25 = 7.5$, d.h.

$$\tilde{x}_{0.25} = x_{(8)} = 11$$

$\tilde{x}_{0.50}$: $q = n \cdot p = 30 \cdot 0.5 = 15$, d.h.

$$\tilde{x}_{0.50} = \frac{1}{2}(x_{(15)} + x_{(16)}) = \frac{1}{2}(12 + 12) = 12$$

$\tilde{x}_{0.90}$: $q = n \cdot p = 30 \cdot 0.90 = 27$, d.h.

$$\tilde{x}_{0.90} = \frac{1}{2}(x_{(27)} + x_{(28)}) = \frac{1}{2}(15 + 17) = 16$$

Anwendung der Perzentile

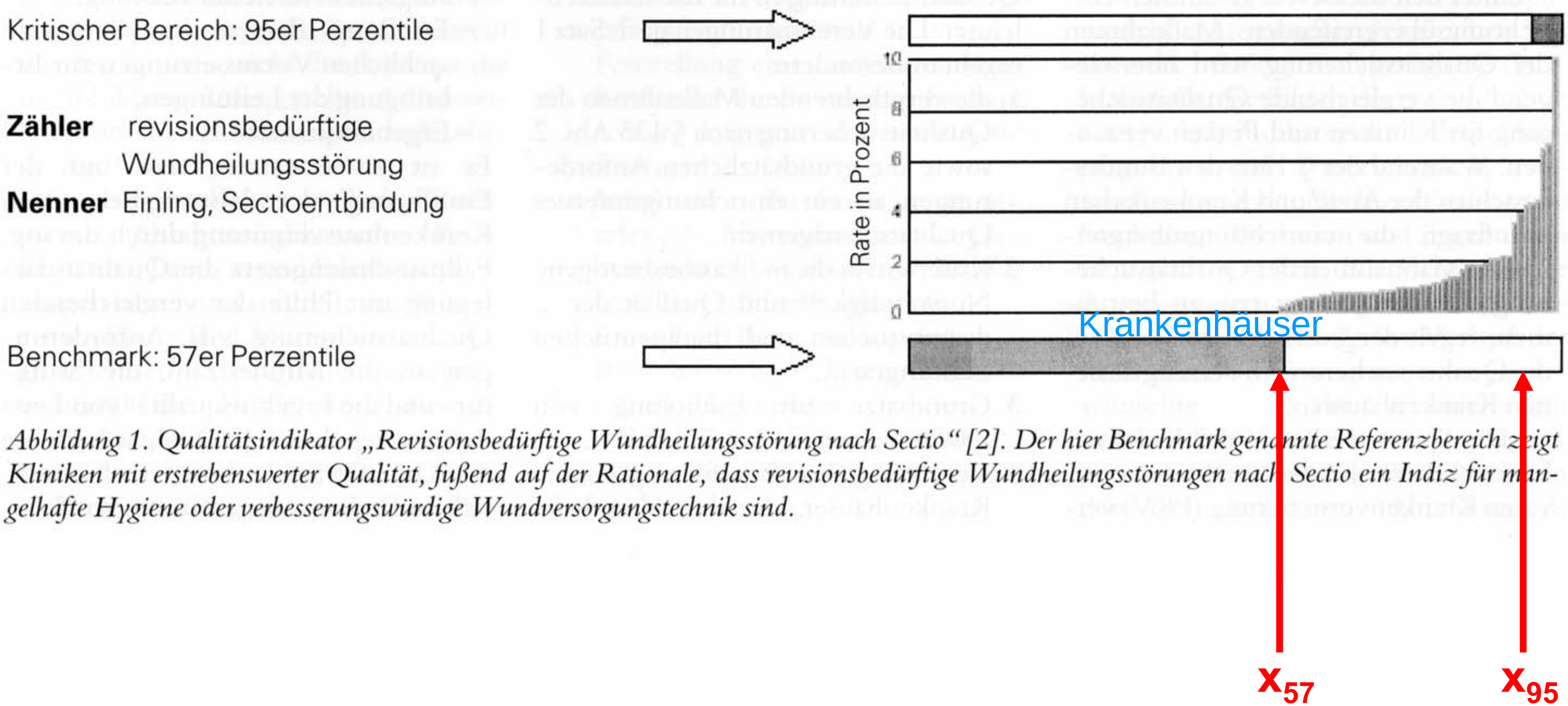
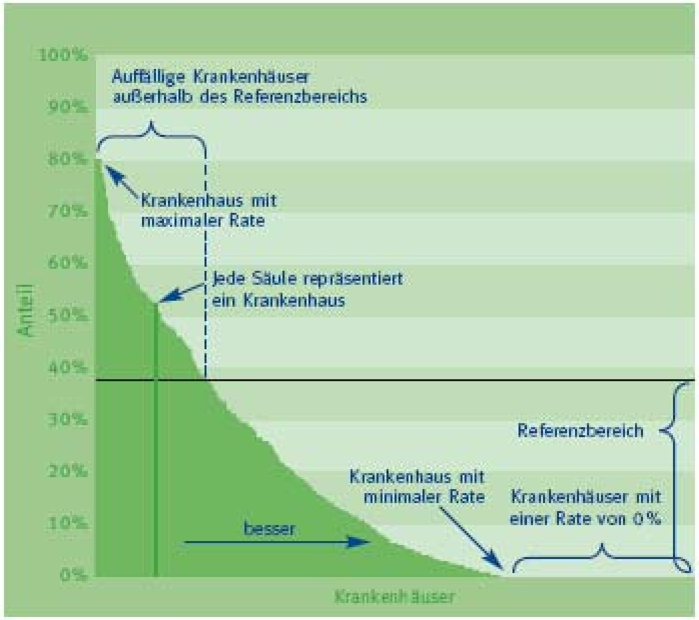


Abbildung 1. Qualitätsindikator „Revisionsbedürftige Wundheilungsstörung nach Sectio" [2]. Der hier Benchmark genannte Referenzbereich zeigt Kliniken mit erstrebenswerter Qualität, fußend auf der Rationale, dass revisionsbedürftige Wundheilungsstörungen nach Sectio ein Indiz für mangelhafte Hygiene oder verbesserungswürdige Wundversorgungstechnik sind.

Selbmann, Externe Qualitätssicherung in Deutschland, 2001, Med Klin, 754



Qualitäts-
report

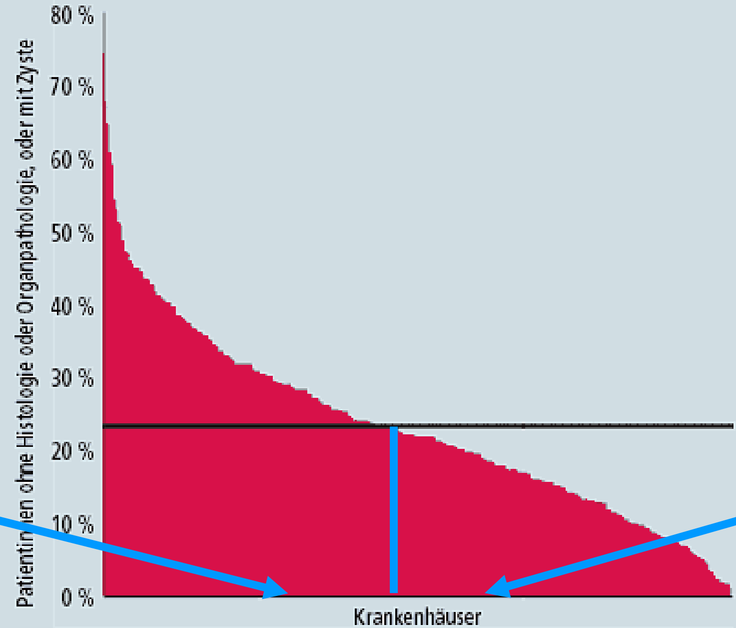
BQS Qualitätsreport

Grafik

Ergebnisse: Indikation bei Ovareingriffen

Anteil von Patientinnen mit fehlender postoperativer Histologie oder Follikel- bzw. Corpus-luteum-Zyste oder fehlender Organpathologie als führender histologischer Befund an allen Patientinnen mit isoliertem Ovareingriff (ohne Adnektomie bei Mammakarzinom) mit vollständiger Entfernung des Ovars oder der Adnexe

	2004	2003*
Gesamtrate	24,99 %	26,58 %
Vertrauensbereich	24,42 – 25,56 %	25,90 – 27,27 %
Gesamtzahl der Fälle	22 381	15 940



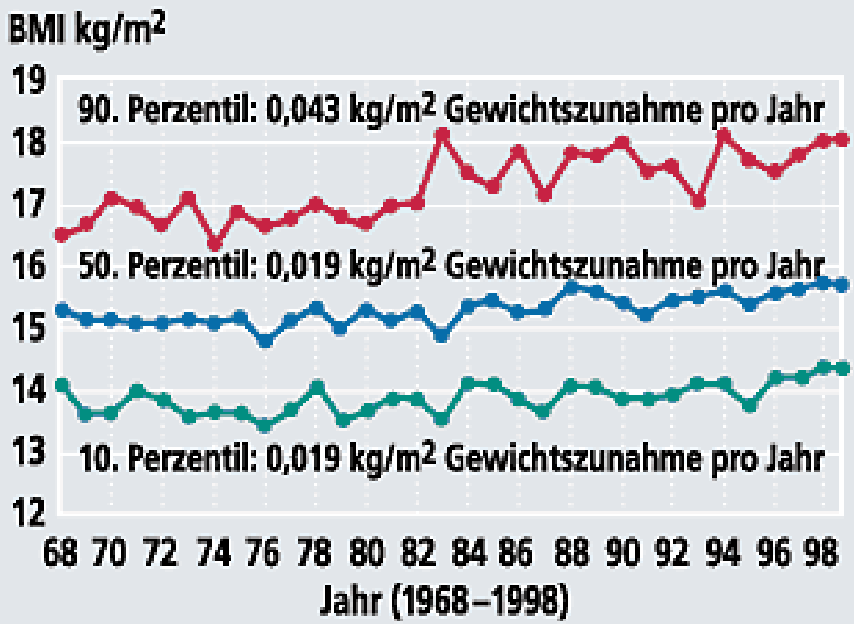
Median der Krankenhausergebnisse	23,8 %
Spannweite der Krankenhausergebnisse	0,0 – 75 %
Anzahl der Krankenhäuser mit ≥ 20 Fällen	465
Referenzbereich	≤ 23,8 % (50%-Perzentile)
Anzahl auffälliger Krankenhäuser	232 von 465

* Vorjahresergebnisse wurden mit den geänderten Rechenregeln zum Qualitätsindikator 2004 berechnet und weichen deshalb von der BQS-Bundesauswertung 2003 ab.

Quelle: BQS-Qualitätsreport, Düsseldorf, 2004

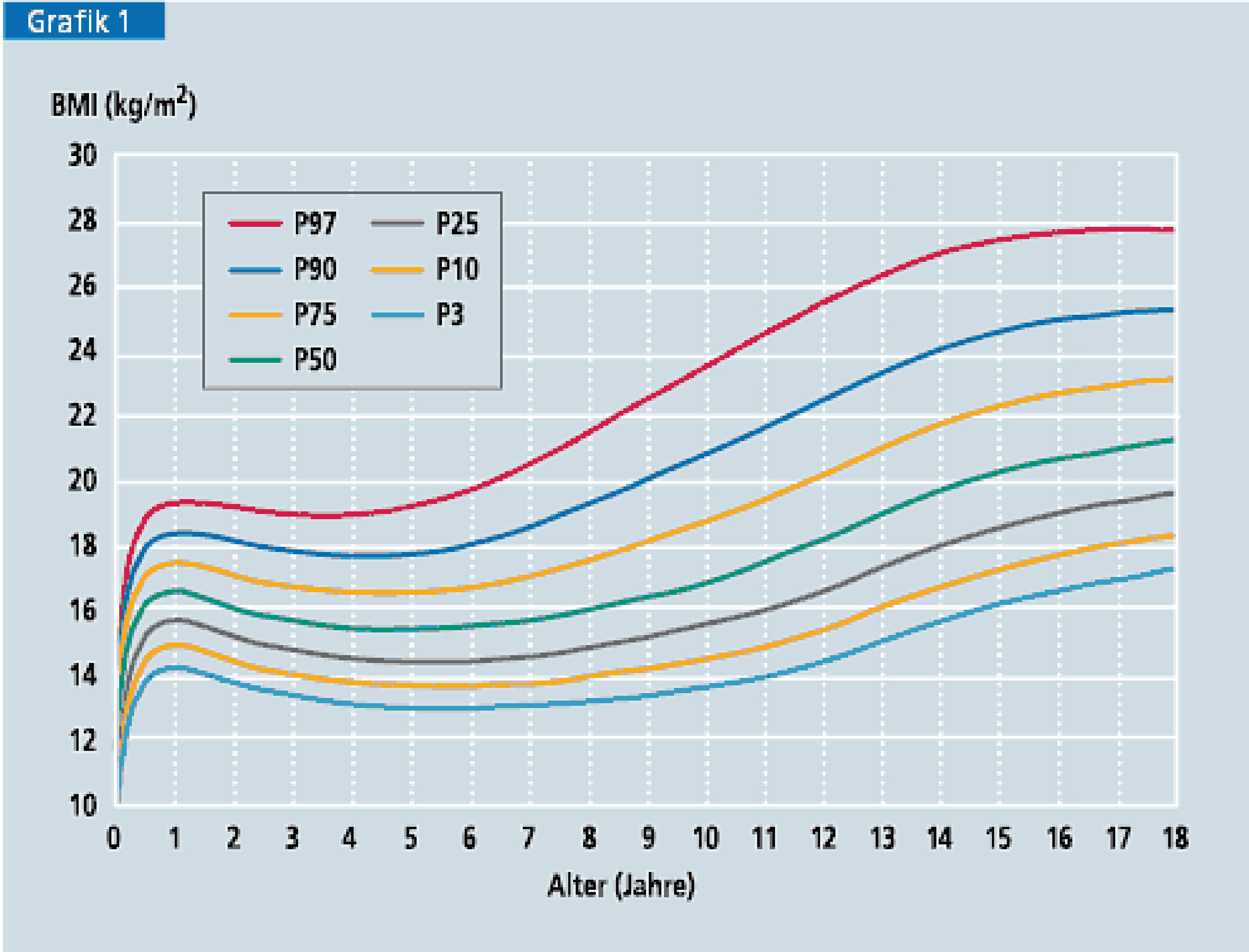
Dtsch Arztebl, 7.10.2005

Grafik



Aus: [23] Herpertz-Dahlmann B, Geller F, Bohle C, Khalil C, Trost-Brinkhues G, Ziegler A, Hebebrand J: Secular trends in body mass index measurements in preschool children from the City of Aachen, Germany. Eur J Pediatr 2003; 162: 104–109. Mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlages, Heidelberg.

Die Zunahme des Bodymass-Index (BMI) von Einschülern (5 081 Jungen) der Stadt Aachen zwischen 1968 und 1999 jeweils entsprechend dem 10., 50. beziehungsweise 90. BMI-Perzentil. Im oberen Gewichtsbereich (hier 90. Perzentil) ist der durchschnittliche jährliche Anstieg des BMI etwa doppelt so hoch wie im Normal- beziehungsweise Untergewichtsbereich (50. beziehungsweise 10. Perzentil)



BMI-Perzentilen für Mädchen im Alter 0 bis 18 Jahren (modifiziert nach Krohmeyer-Hauschild et al., 2000).

Dtsch Ärztebl 2005, A50-58

Tabelle

90. ~~(≙ Übergewicht)~~ und 97. ~~(≙ Adipositas)~~ Perzentile des BMI für Jungen und Mädchen im Alter von 0 bis 18 Jahren

	Jungen		Mädchen	
Alter (Jahre)	BMI (90. Perzentile)	BMI (97. Perzentile)	BMI (90. Perzentile)	BMI (97. Perzentile)
0	14,28	15,01	14,12	14,81
1	18,73	19,81	18,25	19,22
2	18,01	19,14	17,92	19,03
3	17,62	18,82	17,64	18,84
4	17,54	18,83	17,54	18,85
5	17,61	19,02	17,69	19,16
6	17,86	19,44	17,99	19,67
7	18,34	20,15	18,51	20,44
8	19,01	21,11	19,25	21,47
9	19,78	22,21	20,04	22,54
10	20,60	23,35	20,80	23,54
11	21,43	24,45	21,61	24,51
12	22,25	25,44	22,48	25,47
13	23,01	26,28	23,33	26,33
14	23,72	26,97	24,05	27,01
15	24,36	27,53	24,59	27,45
16	24,92	27,99	24,91	27,65
17	25,44	28,40	25,11	27,72
18	25,91	28,78	25,28	27,76

nach Kromeyer-Hausschild et al.: Monatszeitschrift Kinderheilkunde 2001; 149: 807–18.

Dtsch Ärztebl 2006, A334-340

Anwendung: Referenzbereiche

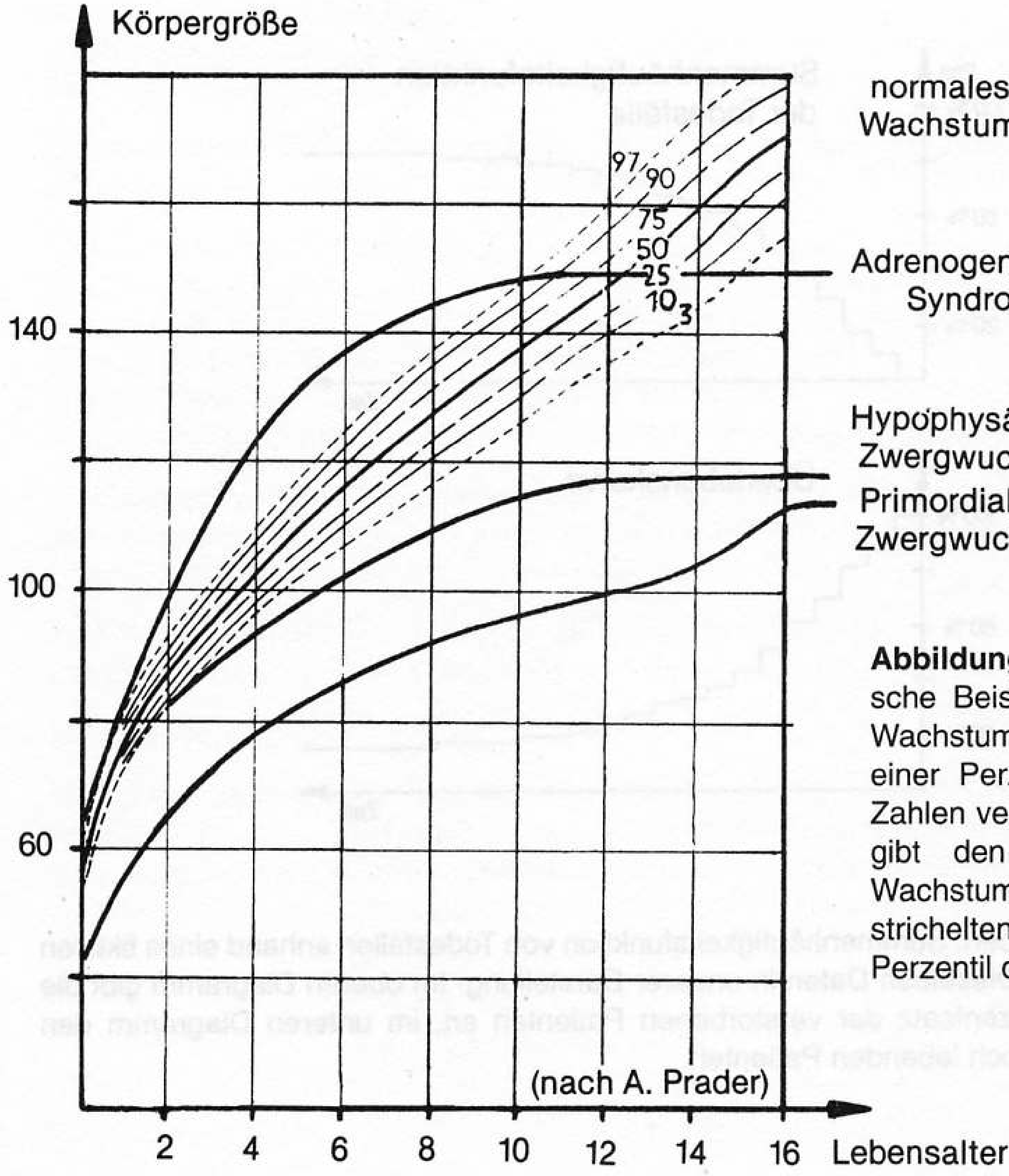


Abbildung 2.7: Drei typische Beispiele pathologischen Wachstums im Vergleich mit einer Perzentiltabelle. Die mit Zahlen versehene Kurvenschar gibt den Bereich normalen Wachstums an, wobei die gestrichelten Linien das 3. und 97. Perzentil darstellen.

Referenzbereich (Normbereich)

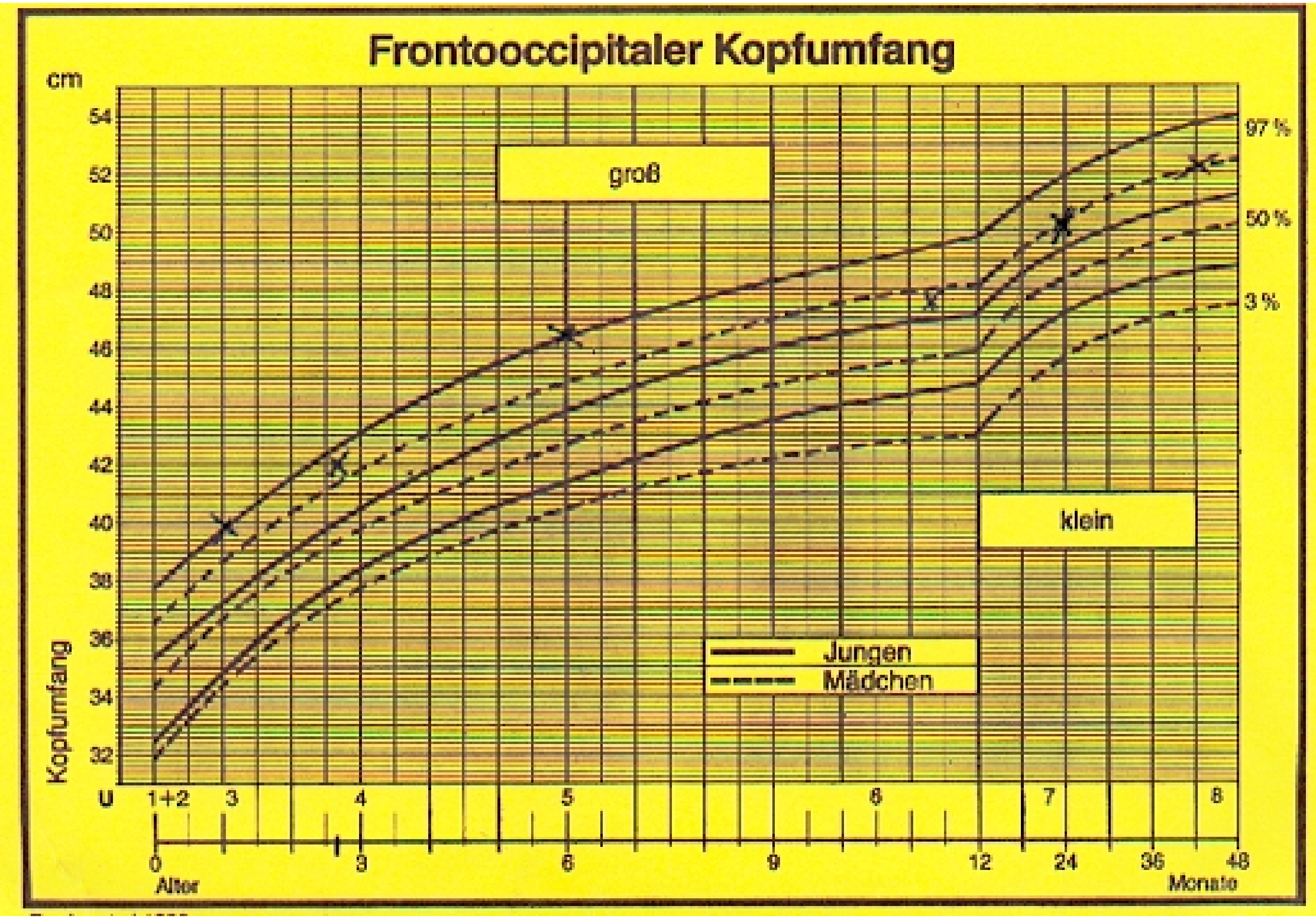
ist ein „innen“ liegender Bereich, der bestimmte innen liegende Werte der Verteilung überdeckt, z. B.:

- **90%-Bereich** **(X_5 bis X_{95})**
- **unterer 95%-Bereich** **(bis X_{95})**

Ein Referenzbereich erlaubt zu beurteilen, wo ein Merkmalsträger liegt bezüglich der anderen Merkmalsträger (etwa „innen“ oder „außen“),

jedoch ist damit keine Entscheidung über „gesund/normal“ oder „krank/nicht normal“ getroffen.

Anwendung: Referenzbereich/Perzentiltabellen



Beispiel: Liegezeiten nach Kaiserschnitt

Stem and Leaf-Diagramm

Stamm Tage	Blatt Stunden	absolute Häufigkeit $H(x)$	relative Häufigkeit $f(x) = \frac{H(x)}{30}$	Summenhäufigkeit $F(x) = \sum f(x)$
8	20	1	0,033	0,033
9	13	1	0,033	0,067
10	04, 05, 17	3	0,100	0,167
11	04, 08, 09, 12, 16, 23	6	0,200	0,367
12	04, 06, 08, 08, 12	5	0,167	0,533
13	01, 06, 19, 23	4	0,133	0,667
14	01, 02, 03, 22, 22	5	0,167	0,833
15	08, 20	2	0,067	0,900
16		0	0,000	0,900
17	19	1	0,033	0,933
18		0	0,000	0,933
19		0	0,000	0,933
20	18	1	0,033	0,966
21		0	0,000	0,966
22		0	0,000	0,966
23		0	0,000	0,966
24		0	0,000	0,966
25		0	0,000	0,966
26		0	0,000	0,966
27		0	0,000	0,966
28	00	1	0,033	1,000

(aus Harms, 1998)

Summenhäufigkeitsfunktion, empirische Verteilungsfunktion

$$F(x_i) = \sum_{k=0}^{i} f(x_k) \quad \text{relative Summenhäufigkeit}$$

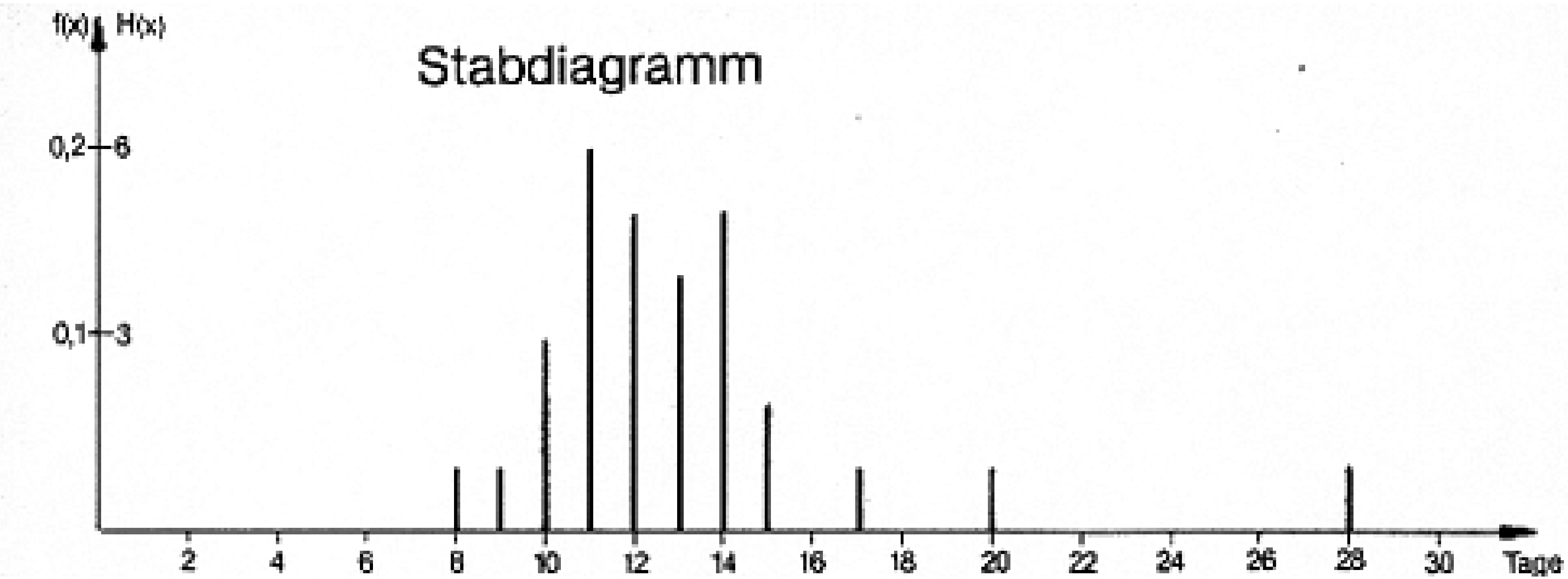
Relative Häufigkeit der Beobachtungen, die kleiner oder gleich x_i sind; d.h. kumulierte (relative) Häufigkeit.

$F(x_i)$ ist eine Treppenfunktion, deren Stufen auf den beobachteten Ausprägungen liegen; die Stufenhöhe an der Stelle x_i entspricht der relativen Häufigkeit der Beobachtungen, die auf x_i fallen.

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern

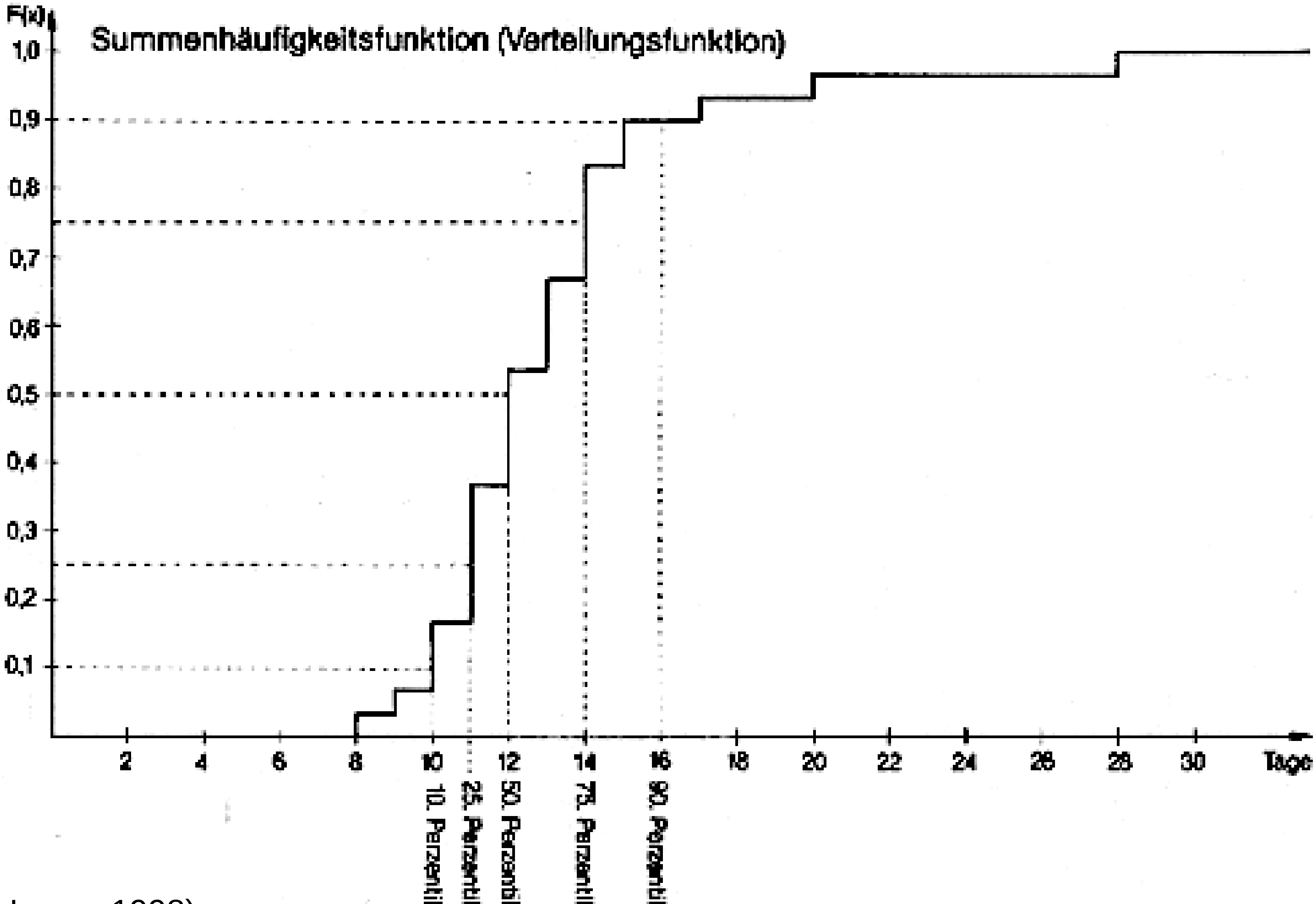
Liegedauer x_i [Tage]	$H(x_i)$	$f(x_i)$	$F(x_i)$
8	1	0.033	0.033
9	1	0.033	0.067
10	3	0.100	0.167
11	6	0.200	0.367
12	5	0.167	0.533
13	4	0.133	0.667
14	5	0.167	0.833
15	2	0.067	0.900
17	1	0.033	0.933
20	1	0.033	0.967
28	1	0.033	1.000
	30	1	

Beispiel: Liegezeiten nach Kaiserschnitt



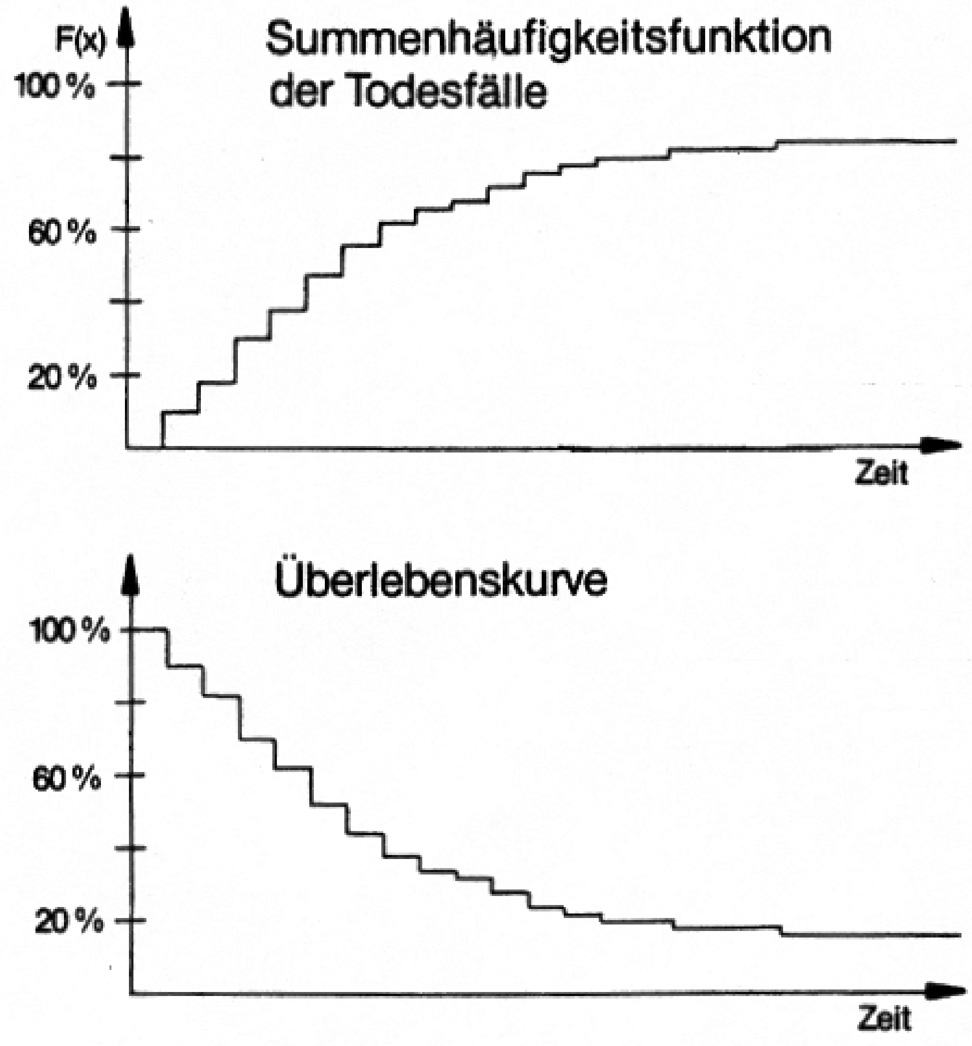
(aus Harms, 1998)

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern



(aus Harms, 1998)

Anwendung: Überlebenskurven



Mediane Überlebenszeit

— ist der Zeitpunkt t_M, an dem die Hälfte der Patienten noch lebt

5-Jahres-Überlebensrate

— ist der Anteil der Patienten, der nach 5 Jahren noch lebt

Grafische Bestimmung des q-Quantils x_q aus der Summenhäufigkeitskurve

$x_q \approx F^{-1}(q)$

d. h. x_q ist der Urwert (Umkehrwert) von q.

„Gehe von q nach rechts:

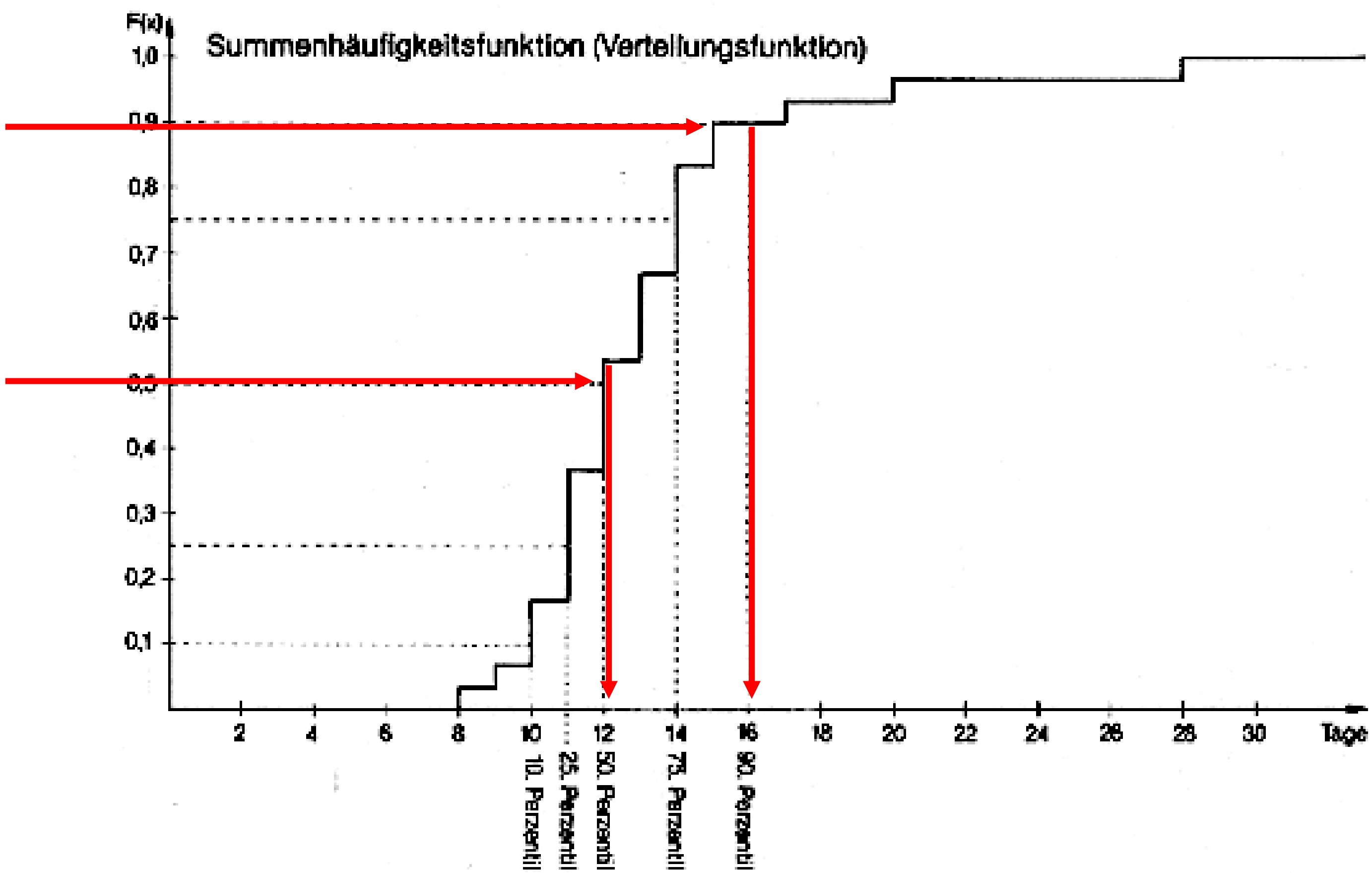
Wenn man „zwischen“ 2 Treppenstufen trifft, nimmt man den oberen Messwert

Wenn man genau eine Treppenstufe trifft, nimmt man den Mittelwert der entsprechenden Messwerte.“

Bestimmung der *p*-Quantile aus der Verteilungsfunktion

1. Fall: Man trifft die Stufe ⇒ p-Quantil ist der Mittelwert der beiden Messwerte

2. Fall: Man trifft den Absatz ⇒ p-Quantil ist der „obere“ Messwert

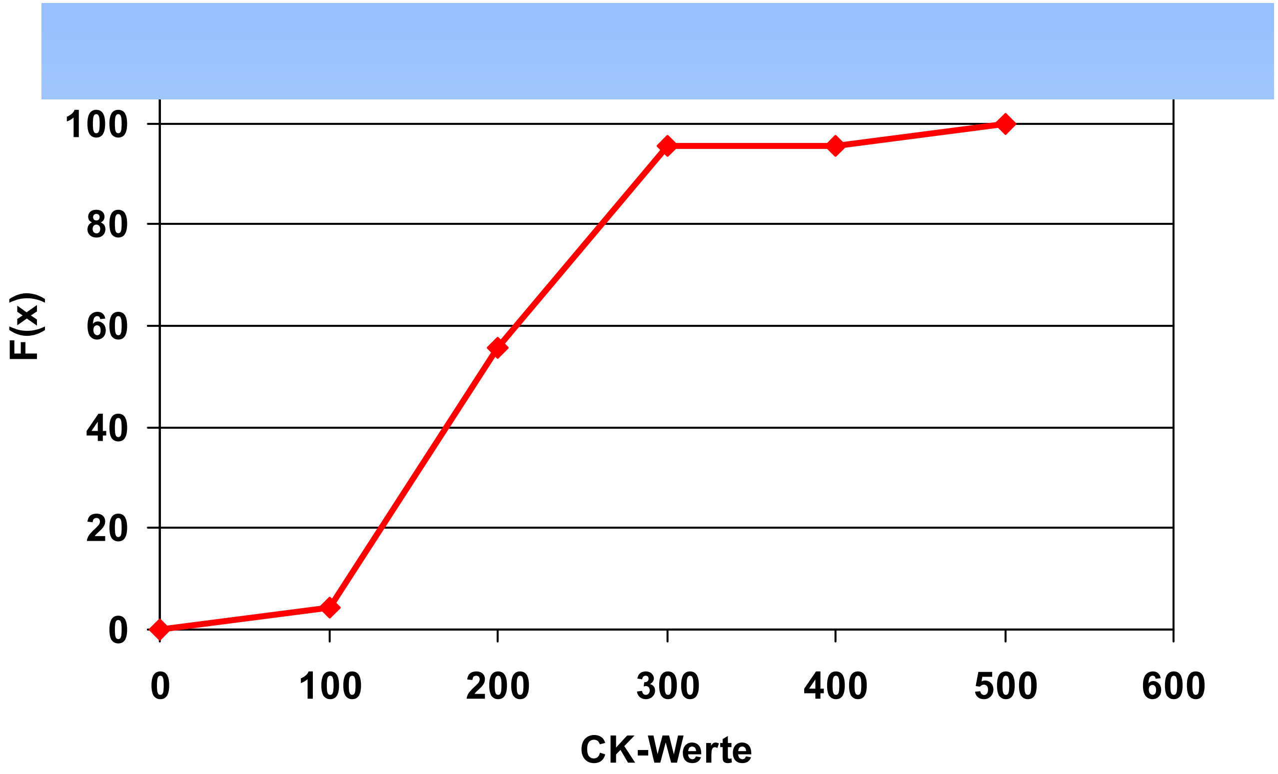


Bei klassierten Erhebungen: Polygonzug

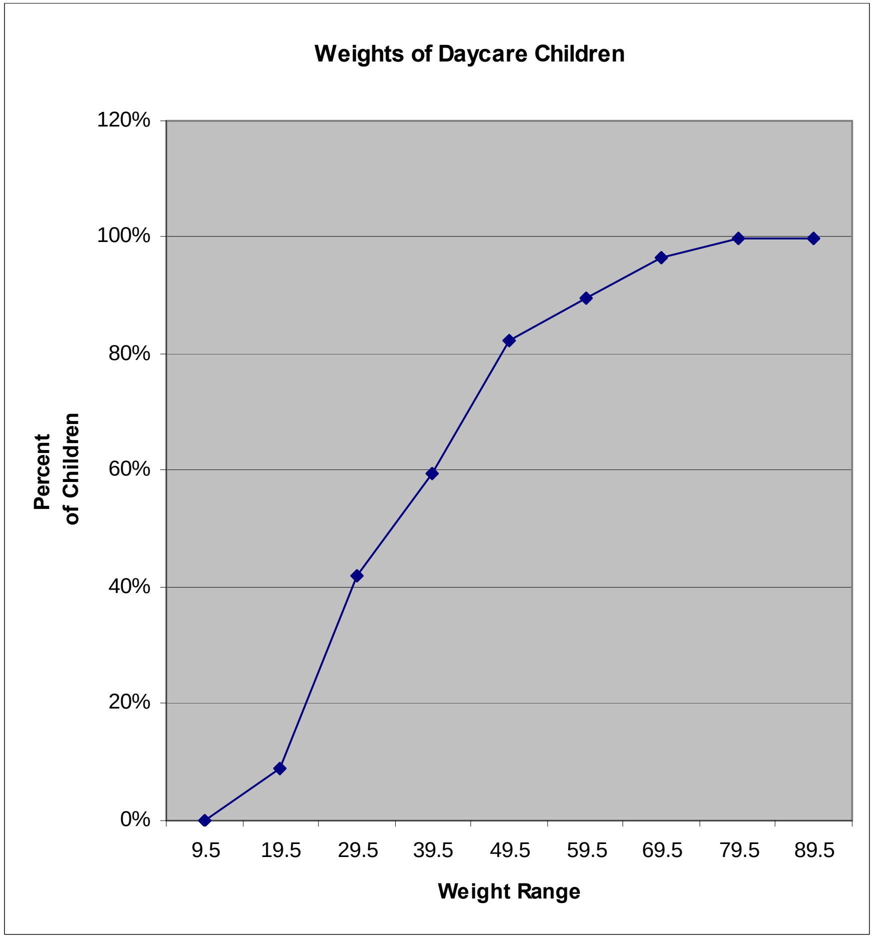
Beispiel: Kreatinkinase von 45 Herzinfarktpatienten

Intervall	*H(x)*	*f(x)* [%]	*F(x)* [%]
(0; 100]	2	4.4	4.4
(100; 200]	23	51.1	55.5
(200; 300]	18	40.0	95.5
(300; 400]	0	0.0	95.5
(400; 500)	2	4.4	100
S	45	100	

Verteilungsfunktion: Polygonzug

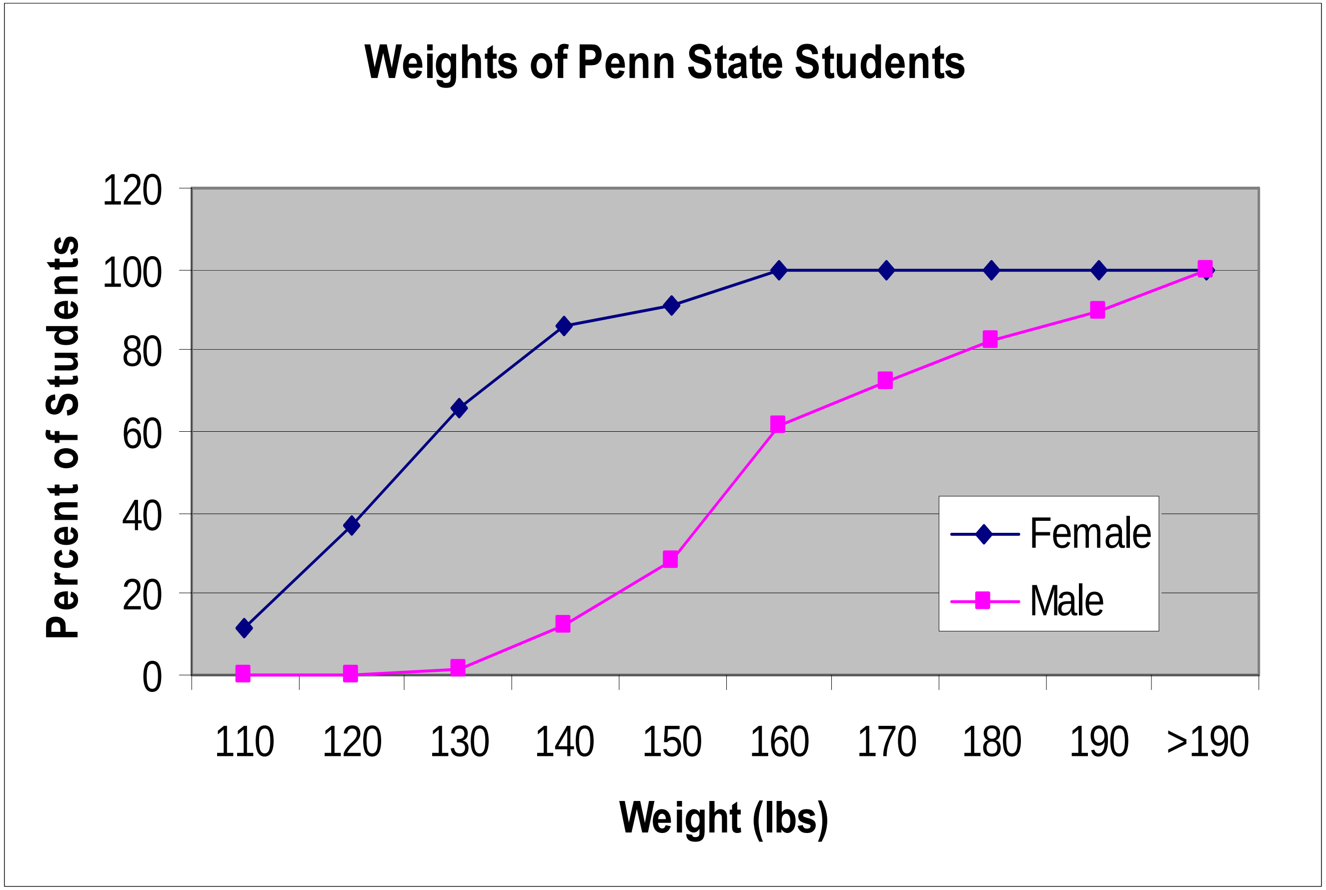


Cumulative Relative Frequency Plot



- Place a point with a horizontal axis marked at the upper interval boundary and a vertical axis marked at the corresponding cumulative relative frequency.
- Each point represents the cumulative relative frequency and the points are connected with straight lines.
- The left end is connected to the lower boundary of the first interval that has data.

Graphical Methods: Cumulative Relative Frequency Graph



Quantitative Merkmale

Maßzahlen, um die Häufigkeitsverteilung zu charakterisieren:

- Modalwert: Häufigster Wert
- Quantile
- (Arithmetischer) **Mittelwert**

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \textbf{Beobachtungen}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{1}{N} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

Das arithmetische Mittel $\bar{x}$

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ Beobachtungen

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n = \frac{1}{N} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

Berechnung des Mittelwerts aus Häufigkeitstabelle

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern

Liegedauer x_i [Tage]	$H(x_i)$	$x_i \cdot H(x_i)$
8	1	8
9	1	9
10	3	30
11	6	66
12	5	60
13	4	52
14	5	70
15	2	30
17	1	17
20	1	20
28	1	28
	30	390

$$\bar{x} = \frac{1}{30} \cdot 390 = 13$$

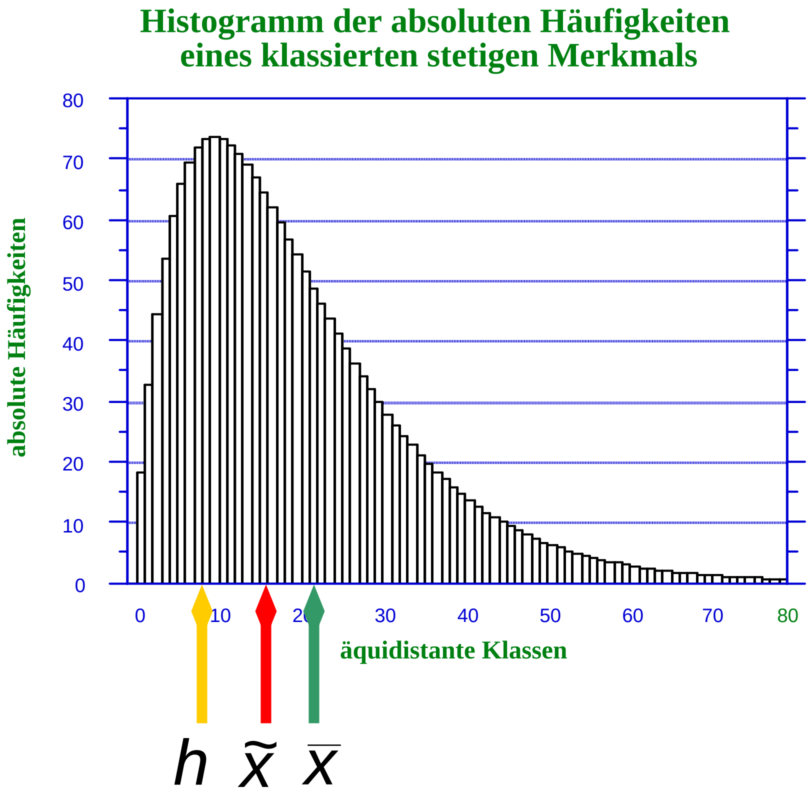
Eigenschaften der Lageparameter

- Arithmetischer Mittelwert
  - ✓Nur sinnvoll bei quantitativen Daten
  - ✓Empfindlich gegenüber Ausreißern
  - ✓Vorsicht bei schiefen Verteilungen (z.B. Laborwerten)
- Median
  - ✓Sinnvoll auch bei ordinal skalierten Daten
  - ✓Unempfindlich gegenüber Ausreißern
  - ✓„Unpräziser“ als Mittelwert, da er die meisten Informationen nicht ausnutzt
- Modalwert
  - ✓Absolut unempfindlich gegenüber Ausreißern
  - ✓Interpretationsprobleme bei mehrgipfligen Verteilungen

Lageregel

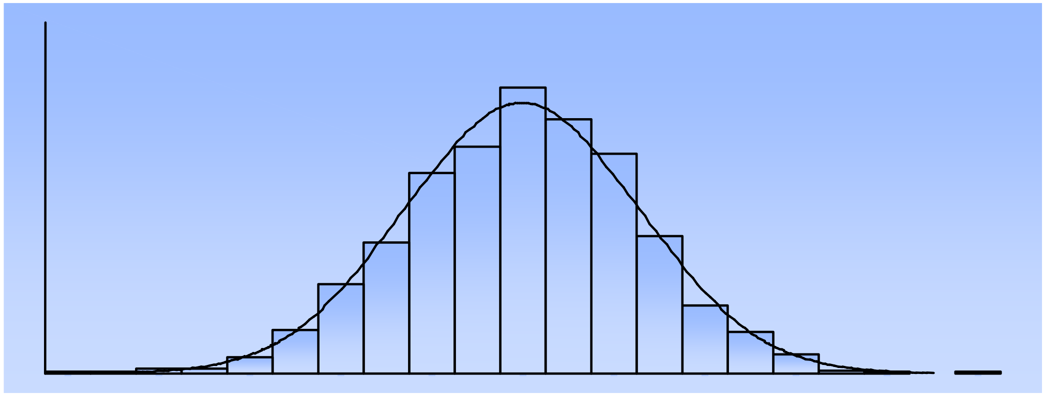
Bei symmetrischen Verteilungen gilt: $\bar{x} = \tilde{x} = h$ (Modus)

Bei rechtsschiefen Verteilungen gilt: $h < \underline{\tilde{x} < \bar{x}}$

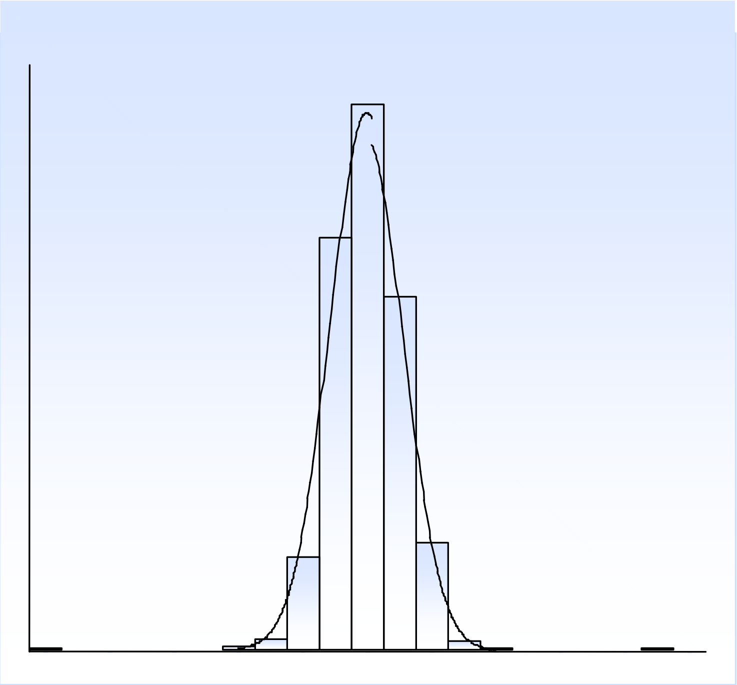


Bei linksschiefen Verteilungen gilt: $\bar{x} < \tilde{x} < h$

Streuungsparameter



Große Streuung



Kleine Streuung

Streuungsmaße

Voraussetzung: quantitatives Merkmal

- Spannweite $r = x_{(n)} - x_{(1)}$
- Quartilsabstand $q = \tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$
- Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- Standardabweichung $s = +\sqrt{s^2}$
- Variationskoeffizient $cv = \frac{s}{\bar{x}}$

Alternative Berechnung der Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \overline{x}^2 \right) =$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot n \cdot \overline{x} + n \cdot \overline{x}^2 \right) =$$

$$\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right)$$

Rechenformel

Berechnung der Varianz aus Häufigkeitstabelle

Beispiel: Liegedauer in Krankenhäusern

$$\bar{x} = 13$$

Liegedauer x_i [Tage]	$H(x_i)$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$H(x_i) \cdot (x_i - \bar{x})^2$
8	1	-5	25	25
9	1	-4	16	16
10	3	-3	9	27
11	6	-2	4	24
12	5	-1	1	5
13	4	0	0	0
14	5	1	1	5
15	2	2	4	8
17	1	4	16	16
20	1	7	49	49
28	1	15	225	225
	30			400

$$s^2 = \frac{1}{30-1} \cdot 400 = 13.79$$

$$s = \sqrt{13.79} = 3.71$$

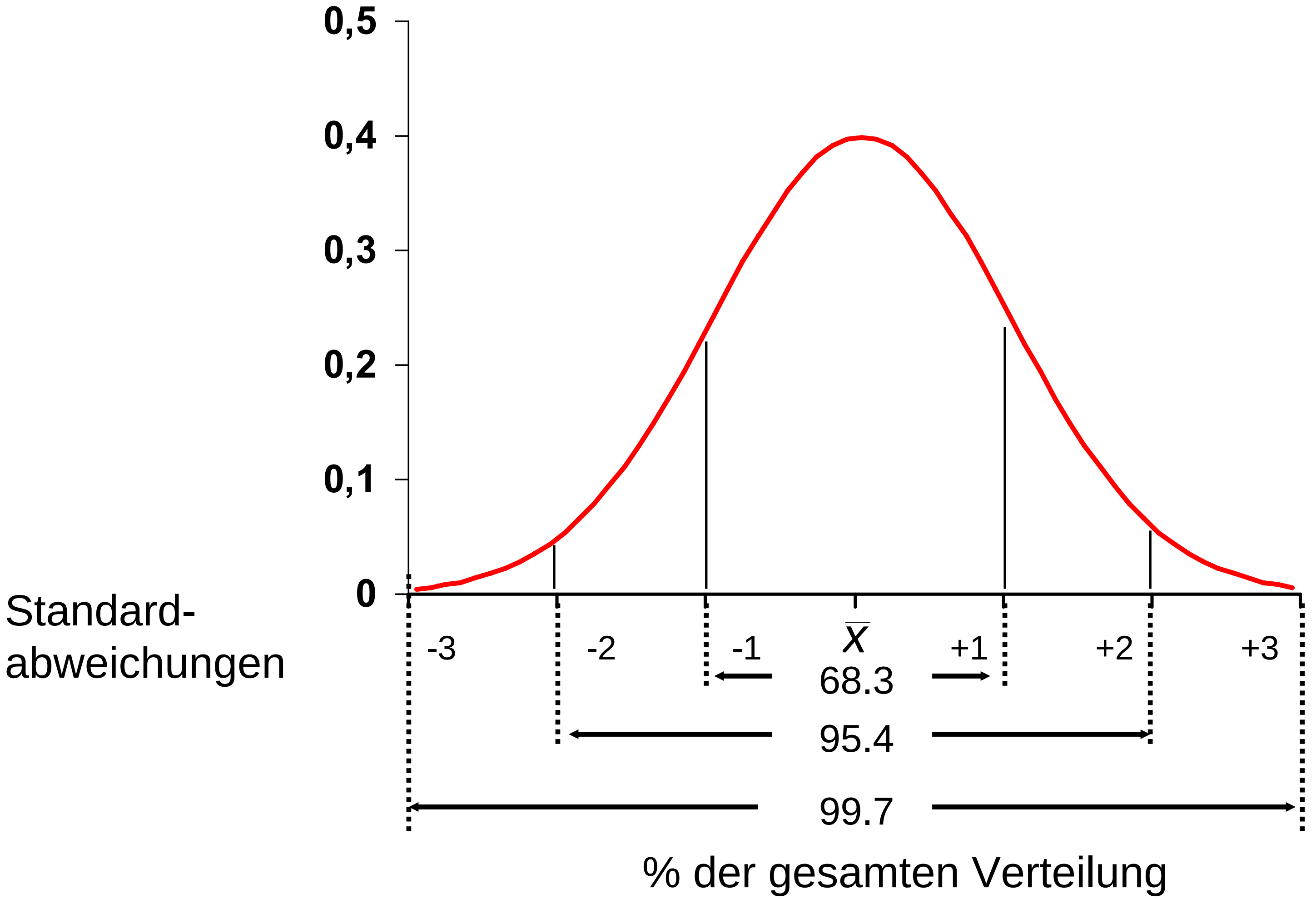
Bemerkungen zur Varianz

- **Alternative: Im Nenner N statt N – 1**
  - ✓ ***N*: Varianz „rein deskriptiv"**
  - ✓ ***N* – 1: Varianz als Schätzwert (ergibt „Erwartungstreue")**
- **Bei symmetrischen, gemäß einer Glockenkurve verteilten Merkmale („Normalverteilung") gilt, dass im Bereich $\bar{x} \pm s$ ungefähr 68% der Werte liegen**
- **Weiteres Streuungsmaß:**

  Standard error of mean: $\text{sem} = \dfrac{s}{\sqrt{N}}$

  Gibt die Genauigkeit des Mittelwerts als Schätzwert an

„sigma-Regeln“



Zur Interpretation der Standardabweichung s

Grobe Merkregel:

s gibt näherungsweise an, um wie weit die Einzel-Werte „durchschnittlich“ vom Mittelwert $\bar{x}$ entfernt liegen

Bei Normalverteilung gilt, dass im Bereich $\bar{x} \pm s$ („1 σ-Bereich“) ca. 68 % der Messwerte liegen

Für wachsenden Stichprobenumfang N gilt:

$s \rightarrow \sigma$

d.h. „geschätzte“ Standardabweichung s der Stichprobe nähert sich der „tatsächlichen“ Standardabweichung σ der Grundgesamtheit an.

Gesetz der großen Zahlen

Für wachsenden Stichprobenumfang N gilt:

$\bar{x} \rightarrow \mu$

d.h. „geschätzter" Mittelwert $\bar{x}$ der Stichprobe nähert sich dem „tatsächlichen" Mittelwert μ der Grundgesamtheit an.

$s \rightarrow \sigma$

d.h. „geschätzte" Standardabweichung s der Stichprobe nähert sich der „tatsächlichen" Standardabweichung σ der Grundgesamtheit an.

Bemerkungen zum Variationskoeffizient

$$cv = \frac{s}{\bar{x}}$$

- **Nur berechnen, falls ein verhältnisskaliertes Merkmal mit positiven Merkmalsausprägungen vorliegt**
- **Relatives Streuungsmaß: Sinnvoll, falls die Streuung aufgrund einer inhaltlichen Logik proportional zum Mittelwert wächst**
- **Der Variationskoeffizient ist ein dimensionsloses Maß (unabhängig von der Einheit, in der gemessen wurde)**
- **Anwendung in der klinischen Chemie**

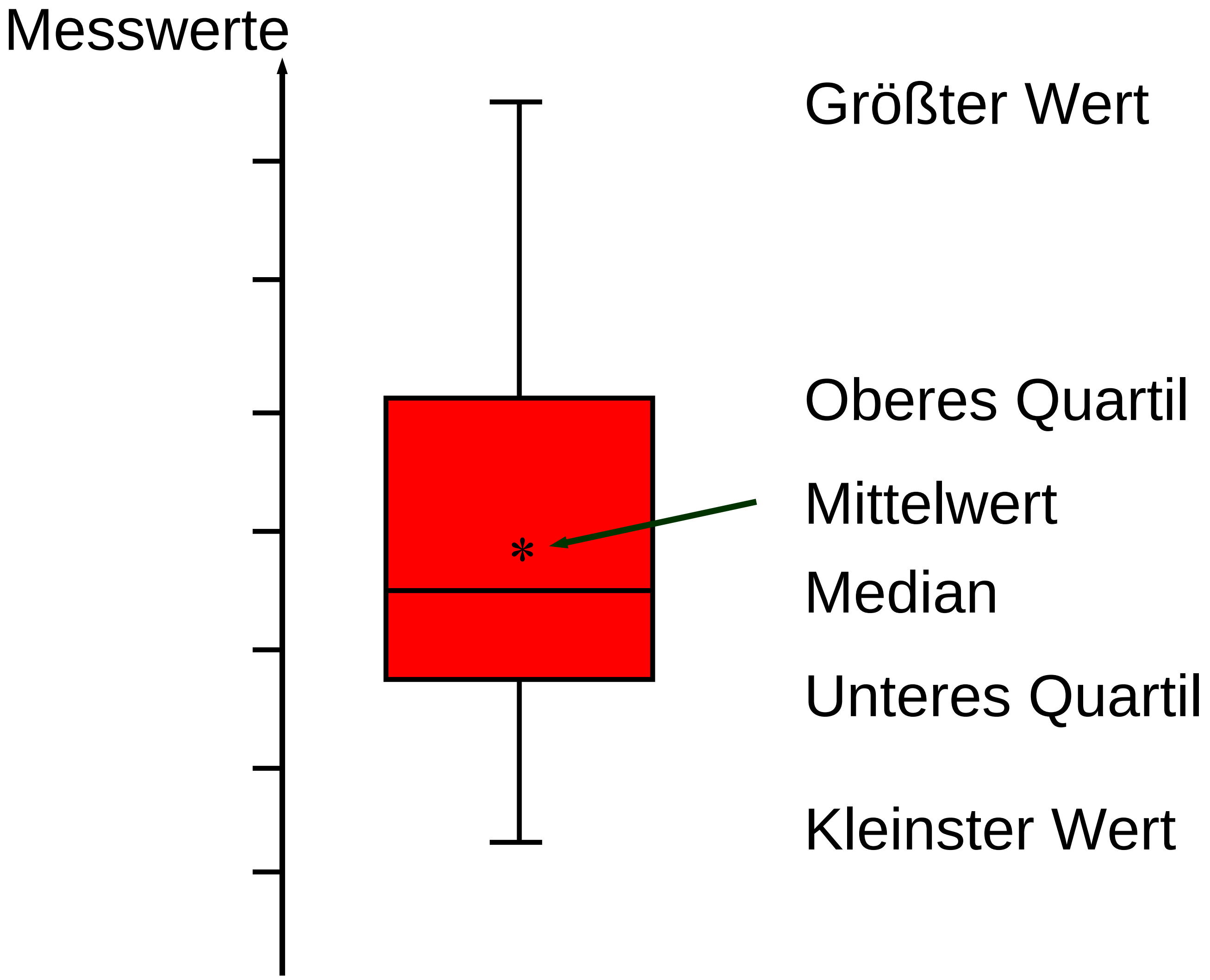
Maßzahlen zur Charakterisierung der Häufigkeitsverteilung eines quantitativen Merkmals

- Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- Standardabweichung $s = +\sqrt{s^2}$
- Variationskoeffizient $cv = \frac{s}{\bar{x}}$

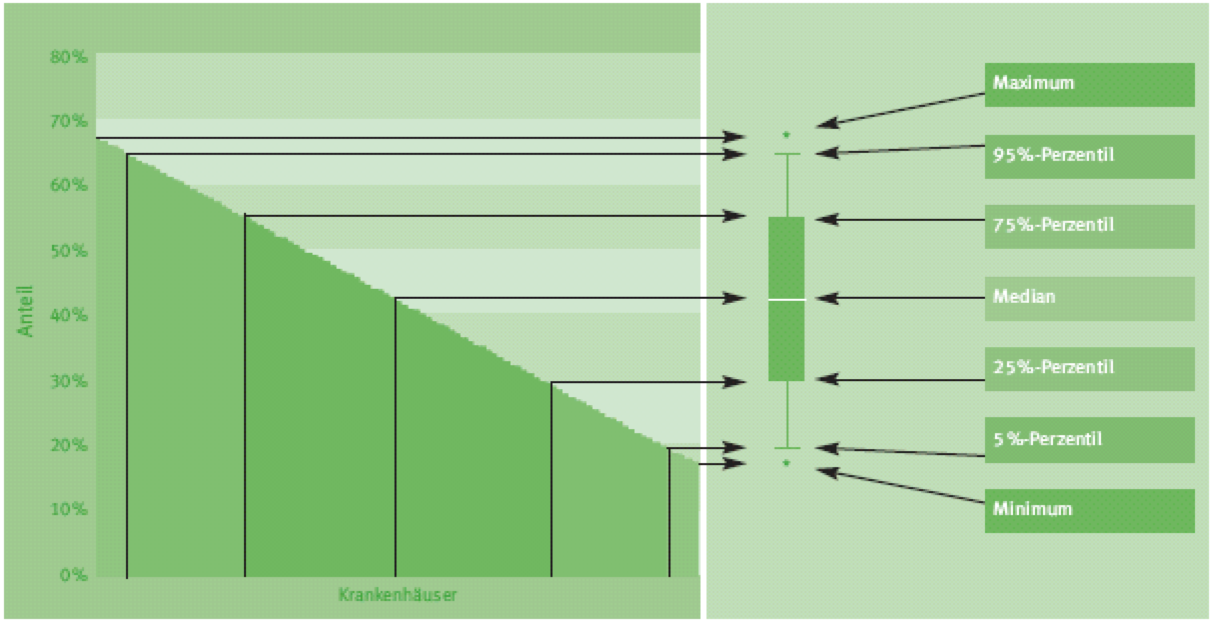
Zulässige Kenngrößen

Skalenniveau	**Zulässige Lagemaße**	**Zulässige Streuungsmaße**
Nominal	Modalwert	keine
Ordinal	Modalwert Median, Quantile	keine
Metrisch	(Modalwert) Quantile Mittelwert	Spannweite Quartilsabstand Standardabweichung Varianz Variationskoeffizient

Boxplot (Box- und Whiskerdiagramm)



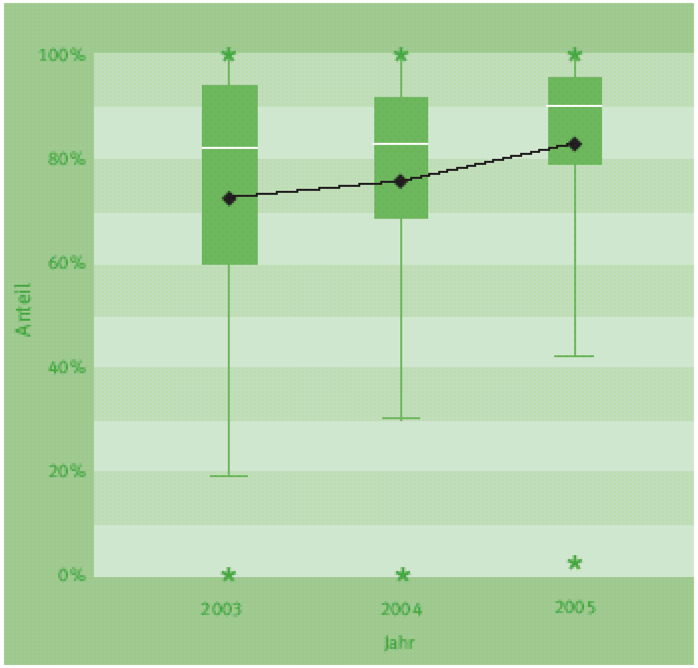
Beziehung zwischen der BQS-Standarddarstellung für Ergebnisse von Qualitätskennzahlen und dem Box-and-Whisker-Plot für die Verteilung der Ergebnisse



Die Abbildung zeigt, wie Perzentilen, Median und Extremwerte der Benchmark-Grafik auf der linken Seite im Box-and-Whisker-Plot auf der rechten Seite abgebildet werden. Die schwarzen Pfeile in der Benchmark-Grafik führen zur Stelle im Box-and-Whisker-Plot, an der die rechts außen genannte Maßzahl dargestellt wird.

BQS Qualitäts-report

Vergleich mit Vorjahresergebnissen



Die BQS-Standarddarstellung für die Analyse der Ergebnisentwicklung im Zeitverlauf zeigt die Verteilung der Ergebnisse einer Qualitätskennzahl für jedes Jahr in einem Box-and-Whisker-Plot. Die Gesamtrate wird jeweils mit einer Raute gekennzeichnet.

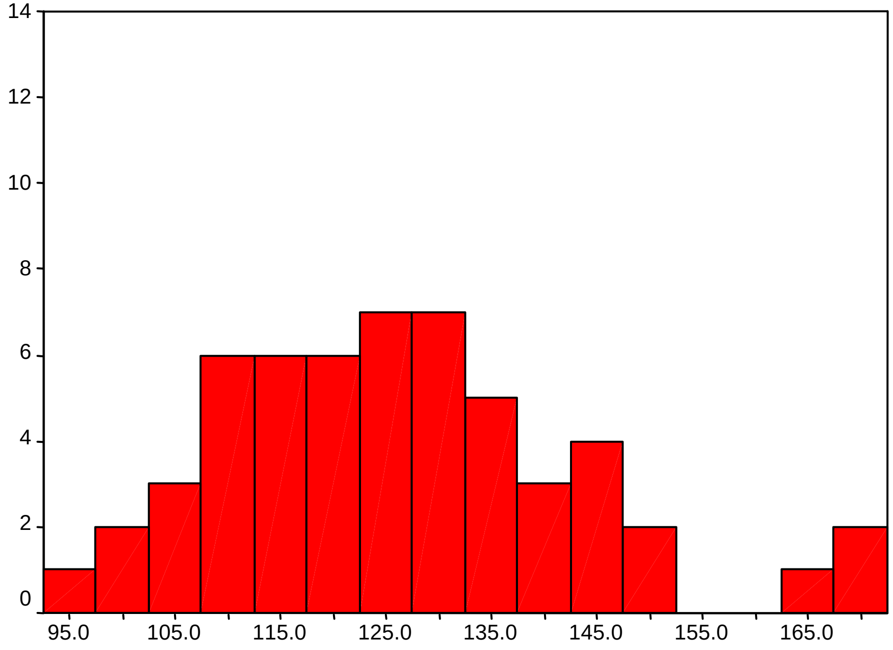
Verteilung der Krankenhausergebnisse eines Jahrs als Box-and-Whisker-Plot

Die Grundgesamtheit für den Box-and-Whisker-Plot wird von den Krankenhäusern mit ≥ 20 Fällen gebildet. Im Box-and-Whisker-Plot werden Daten anhand von Perzentilen zusammenfassend dargestellt.

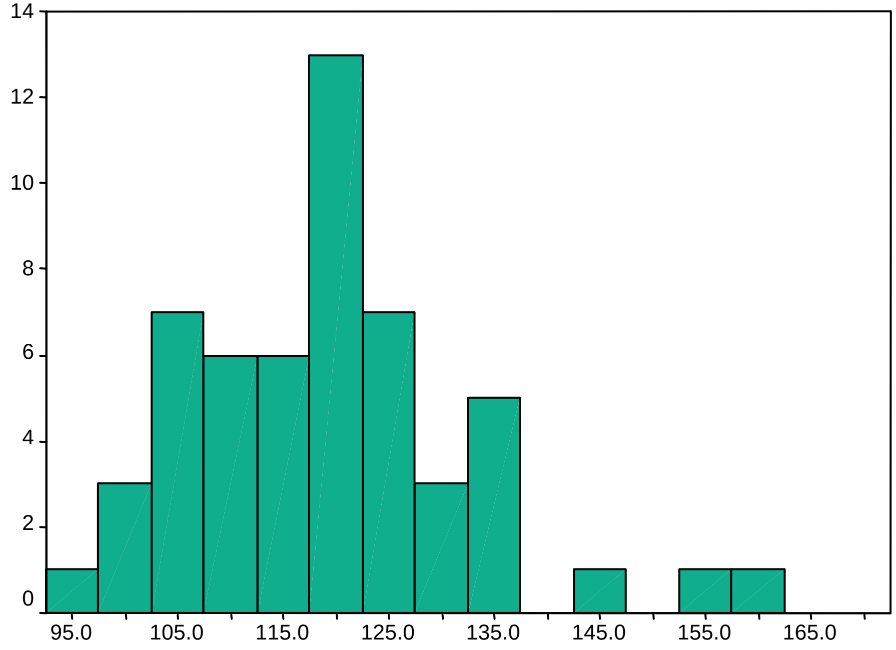
- Die Box (Schachtel) wird begrenzt durch das 25%- und das 75%-Perzentil, sie umfasst demnach die mittleren 50% der Verteilung.
- Die Whiskers (die Box ausdehnende, vertikale, dünne „Schnurrhaar-Linien") verbinden im BQS-Qualitätsreport 2005 das 25%-Perzentil durch eine Linie mit dem 5%-Perzentil und das 75%-Perzentil mit dem 95%-Perzentil.
- Minimum und Maximum werden durch einen Stern gekennzeichnet.
- Der Median als Querstrich halbiert die Box. Ein Viertel der Verteilung liegt zwischen dem Median und der oberen Begrenzung der Box, ein Viertel liegt zwischen dem Median und der unteren Begrenzung der Box. Der Median teilt die Anzahl der Beobachtungen (hier die teilnehmenden Krankenhäuser mit ≥ 20 Fällen) in zwei Hälften. Er wird von extremen Werten (Ausreißern) praktisch kaum beeinflusst. Deshalb kann der Median bei unsymmetrischen Verteilungen besser interpretiert werden als der arithmetische Mittelwert.

BQS Qualitätsreport

Beispiel: Systolischer Blutdruck 1. und 2. Messung



BD sys 1.Mess. [mmHg]



BD sys 2.Mess. [mmHg]

Box-Plots

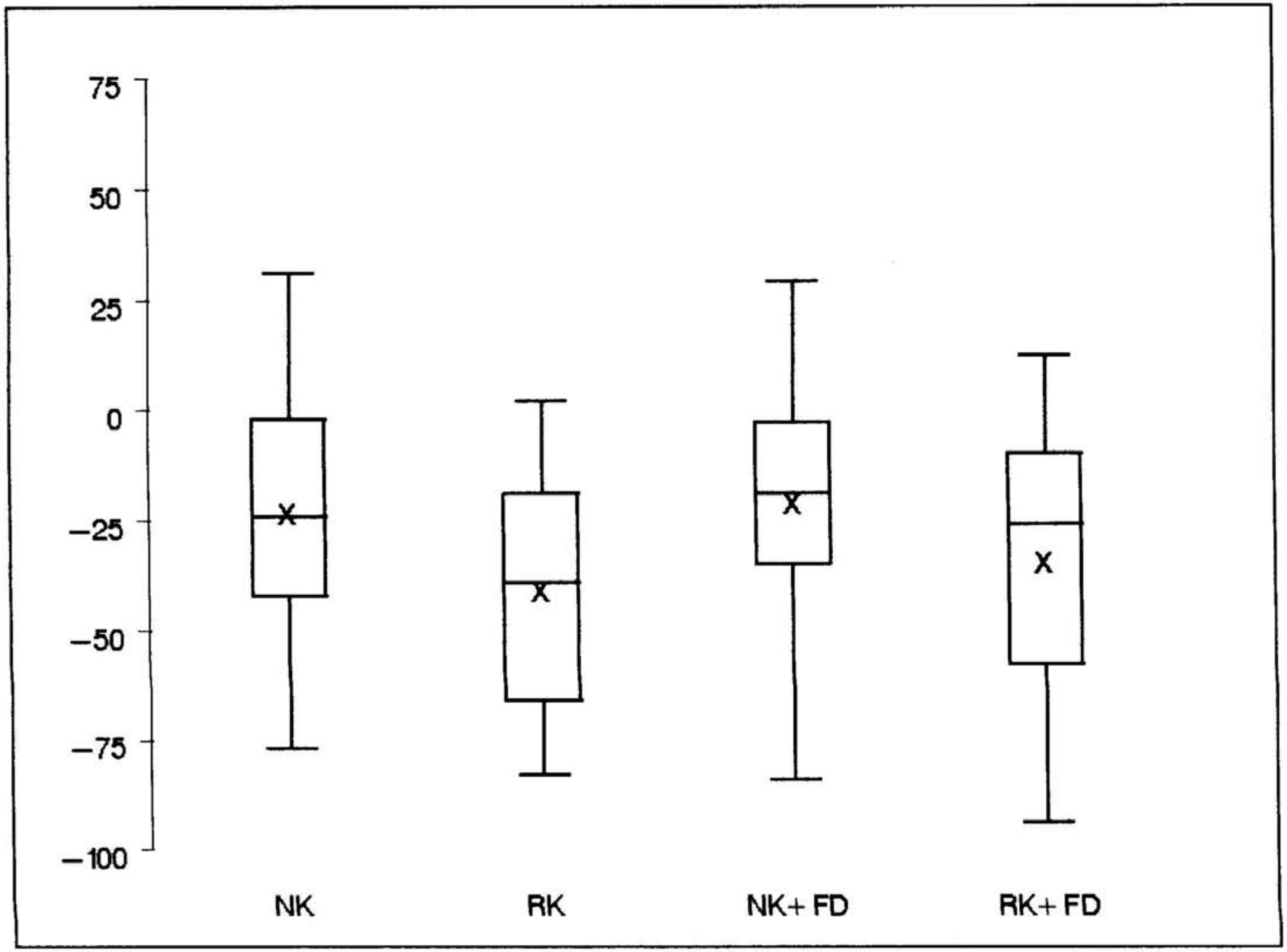
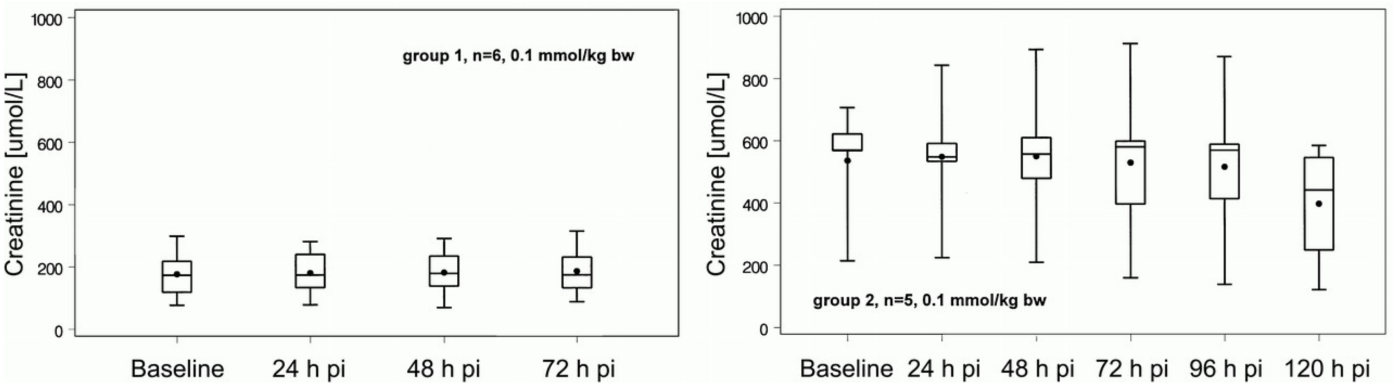


***Abbildung 3**: Boxplots zur Darstellung der Verteilung der Cholesterinänderung 28 Tage nach Beginn der Diät.*

Schumacher & Schulgen, 2007

Box plots present follow-up data for serum creatinine concentration



Sonnad, S. S. Radiology 2002;225:622-628

Reliabilität

(Zuverlässigkeit, Reproduzierbarkeit, Wiederholbarkeit, geringe Variabilität, „Präzision“ in klinischer Chemie)

~ Maß für Stabilität eines Messergebnisses bei Wiederholung der Messung

Inter-Beobachter-Variabilität

Intra-Beobachter-Variabilität

Validität

(Gültigkeit, Accuracy, geringer Bias, „Richtigkeit“ in klinischer Chemie)

~ Maß, ob Methode misst, was sie soll

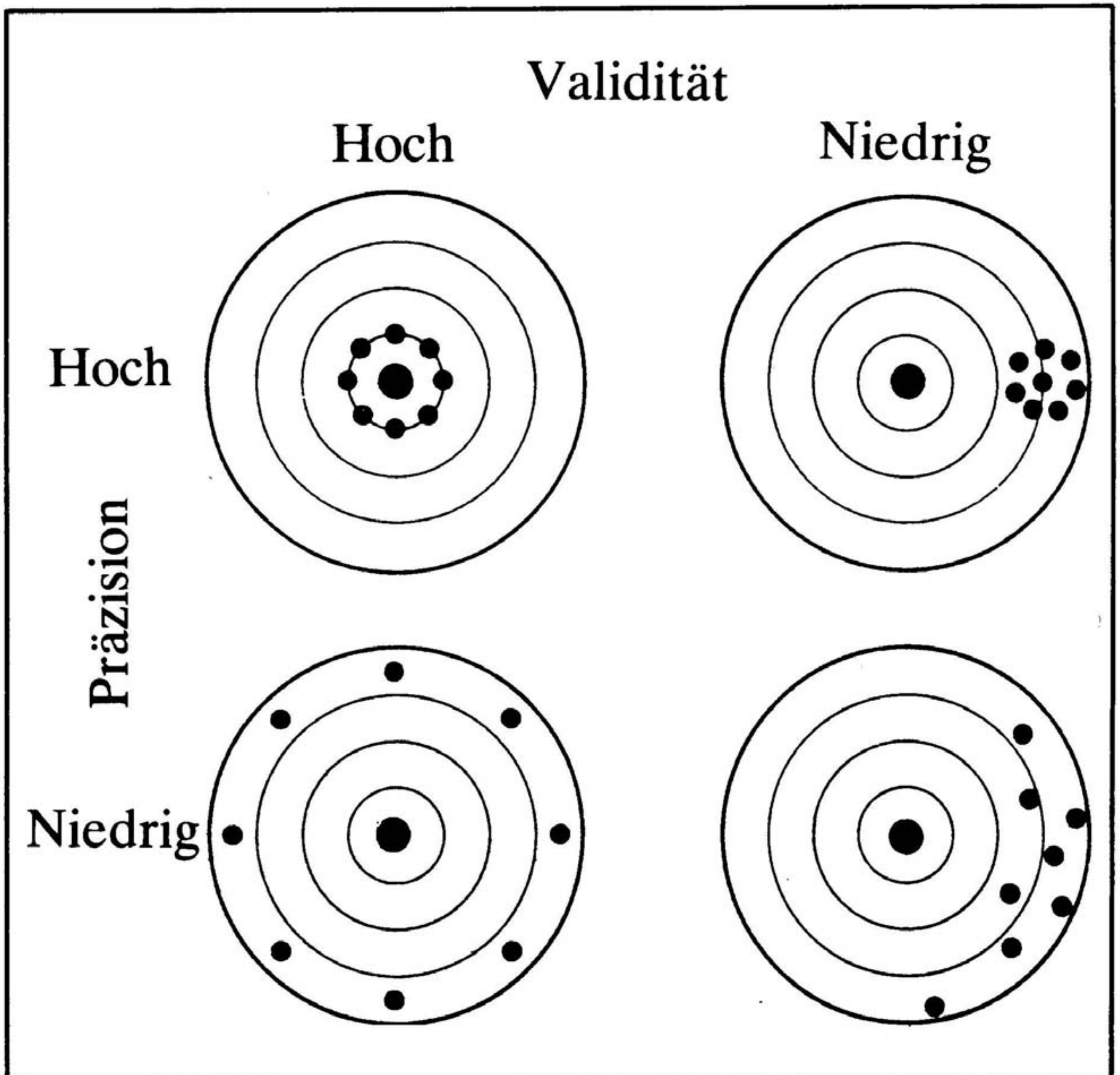


Abb. 8.1: Verschiedene Kombinationen hoher und niedriger Präzision und Validität

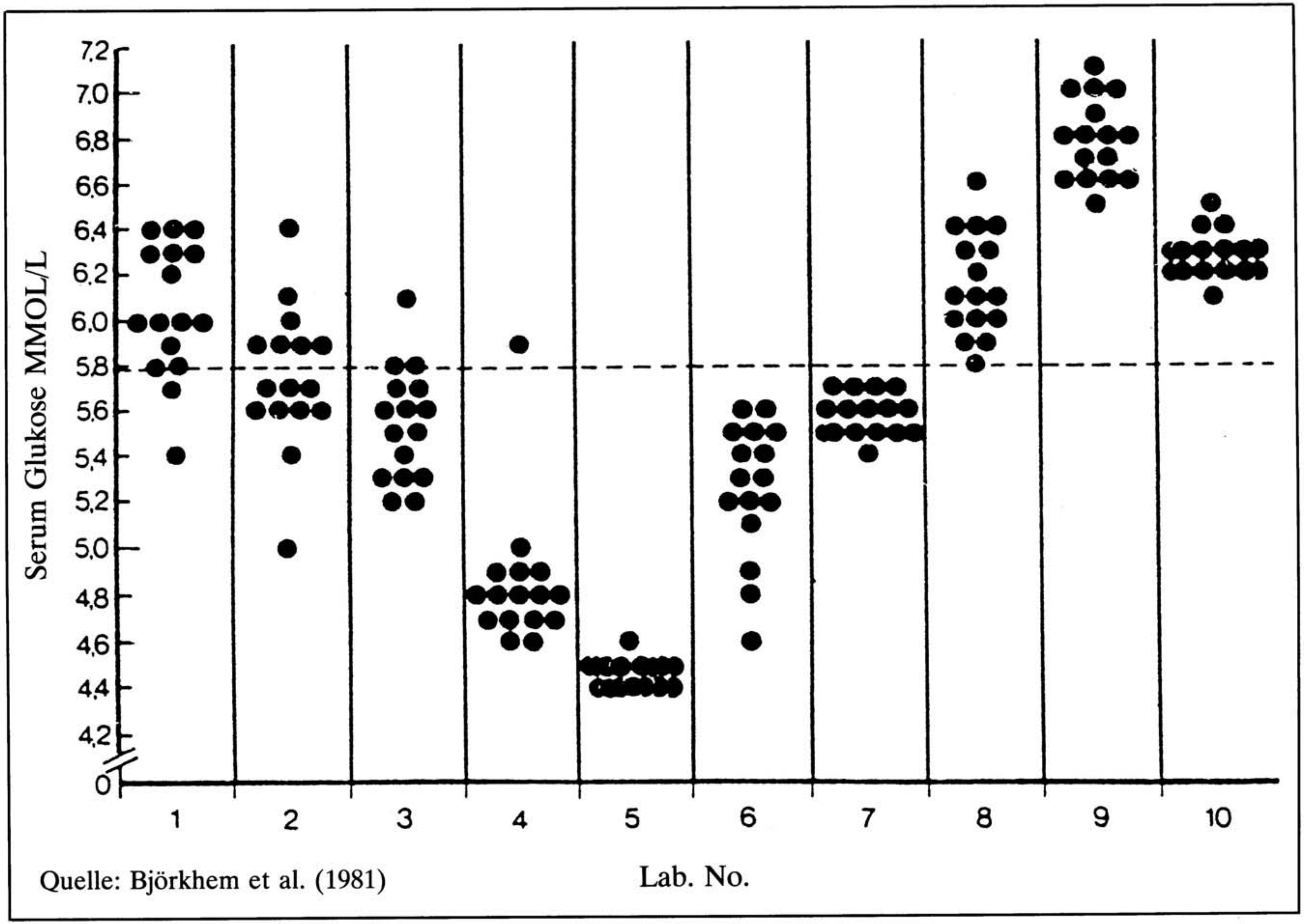


Abb. 3.1: Blutzuckerwert einer Blutprobe in 10 schwedischen Krankenhauslaboratorien, von denen jedes 16 Bestimmungen der gleichen Probe durchführte.

Literatur

Pocock S, Travison T, Wruck L, 2008: How to Interpret Figures in Reports of Clinical Trials. Brit Med J 336, 1166-9

Wichtige Begriffe

- Beobachtungseinheit, Merkmale
- Tabellarische Darstellung: Häufigkeitstabellen
- Klassierung
- Summenhäufigkeits-/Verteilungsfunktionen
- Perzentiltabellen
- Graphische Darstellungen:
  - ✓ Kreisdiagramme
  - ✓ Säulen- bzw. Balkendiagramme, Stabdiagramme, Histogramme
  - ✓ Boxplots
- Lageparameter
  - ✓ Mittelwert, Median, Perzentile/Quantile, Modalwert
- Streuungsparameter
  - ✓ Varianz, Standardabweichung, Variationskoeffizient, Spannweite, Quartilsabstand
- Reliabilität, Validität

Korrelation und Regression

Post hoc ergo propter hoc

Mündliche Prüfungen

1. Prüfer

2. Prüfer

	bestanden	nicht bestanden	gesamt
bestanden	17	**13**	30
nicht bestanden	**3**	67	70
gesamt	20	80	100

erwartet diskordant: $\frac{30 \cdot 80}{100} + \frac{70 \cdot 20}{100} = 38$

d.h. 22/38=0.58, oder 58%, der erwarteten diskordanten Entscheidungen waren stattdessen konkordant.

Konkordanzmaße

Cohens Kappa

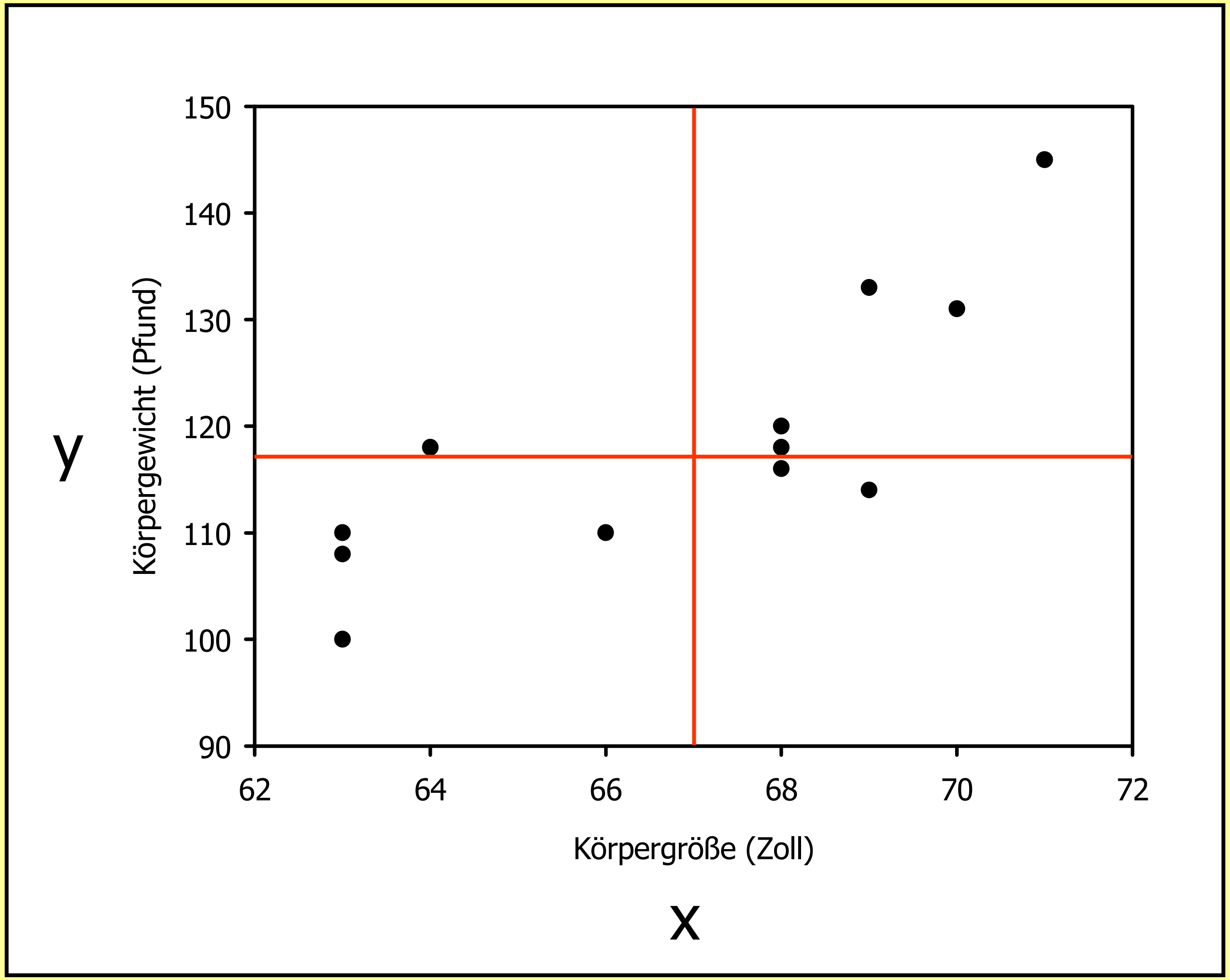
y	x: 0	x: 1	Σ
0	a	b	a+b
1	c	d	c+d
Σ	a+c	b+d	n

$$\text{Konkordanz-rate} = \frac{a+d}{n}$$

$$\frac{\text{überzählig konkordant}}{\text{erwartet diskordant}}$$

$$\kappa = \frac{2 \cdot (a \cdot d - b \cdot c)}{(a+c)\cdot(c+d)+(a+b)\cdot(b+d)}$$

Miss America 1984 - 2002



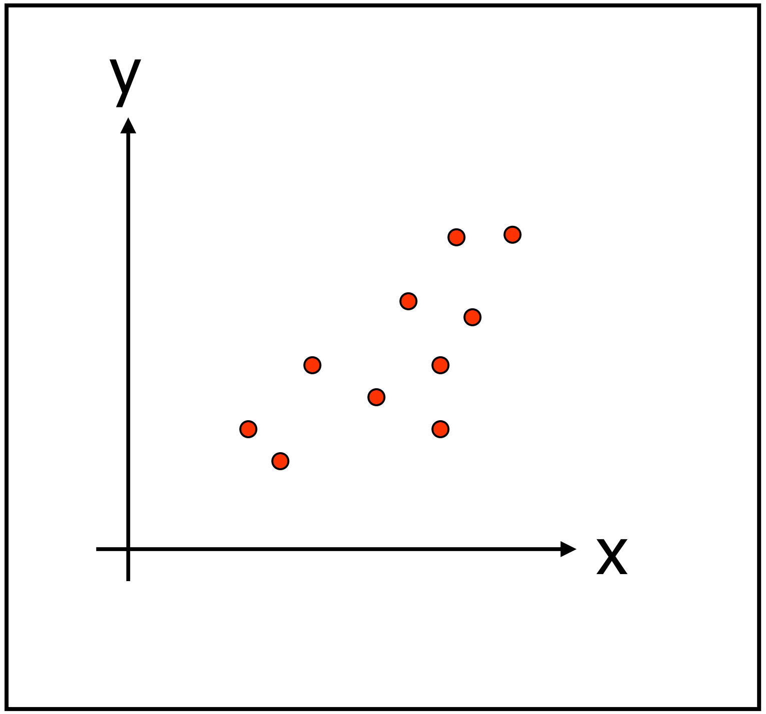
Miss America 1984 - 2002

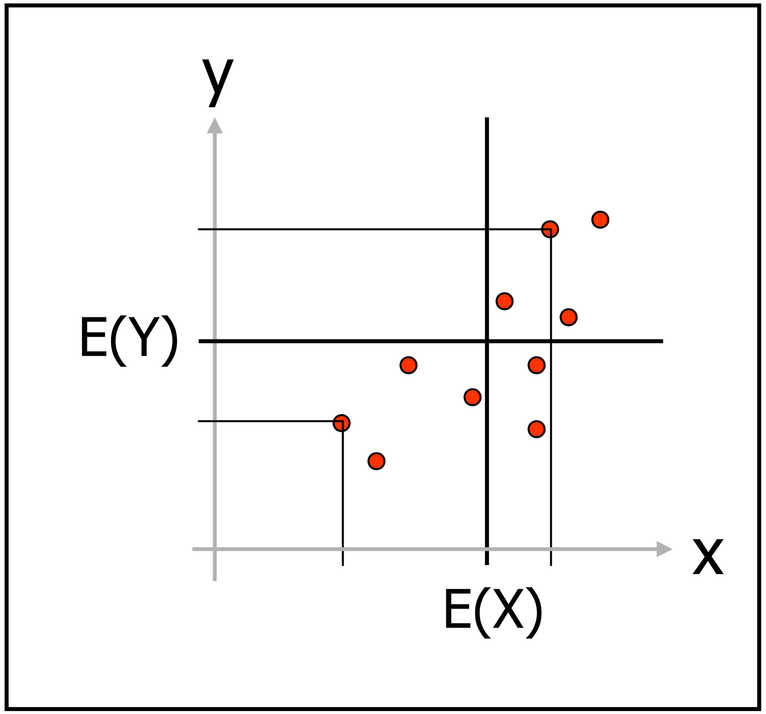
y	x ≤67"	x >67"	gesamt
≤117 lbs	4	**2**	6
>117 lbs	**1**	5	6
gesamt	5	7	12

$$\kappa = \frac{2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot 1)}{5 \cdot 6 + 6 \cdot 7} = 0.5 = \frac{3}{6} = \frac{\text{überzählig konkordant}}{\text{erwartet diskordant}}$$

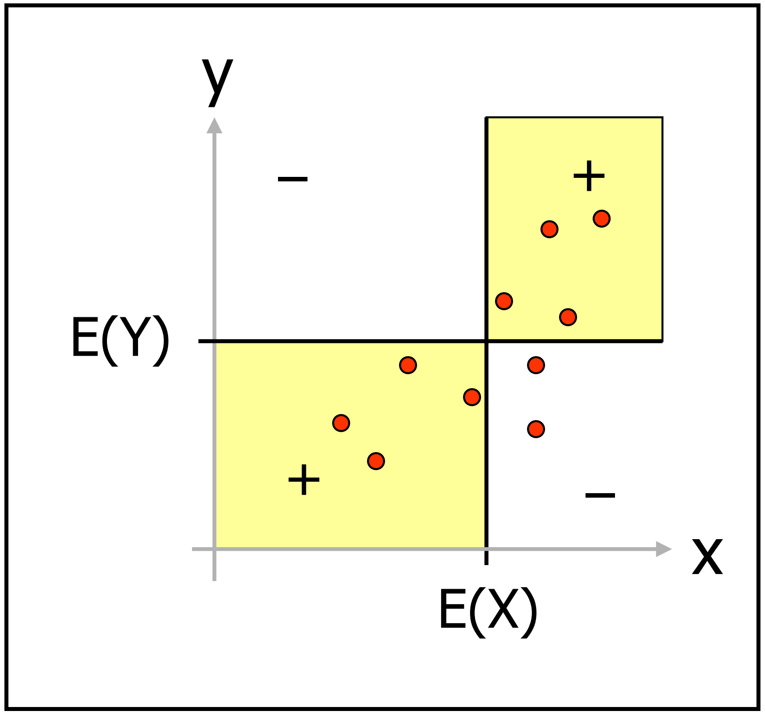
Korrelation

X und Y zwei Zufallsvariable
10 Realisierungen





Kovarianz Cov(X,Y)

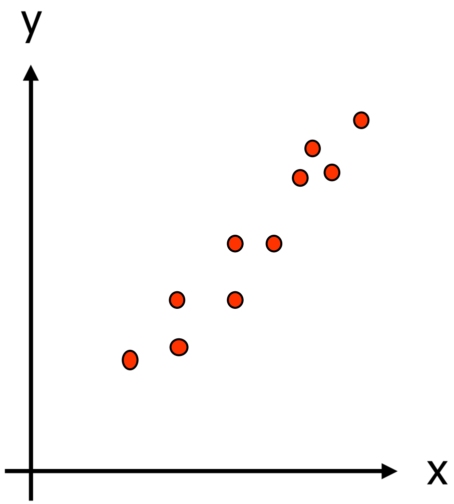


$x>E(X),\ y>E(Y)$ oder $x<E(X),\ y<E(Y)$ $\longrightarrow$ $[x-E(X)]\cdot[y-E(Y)]>0$

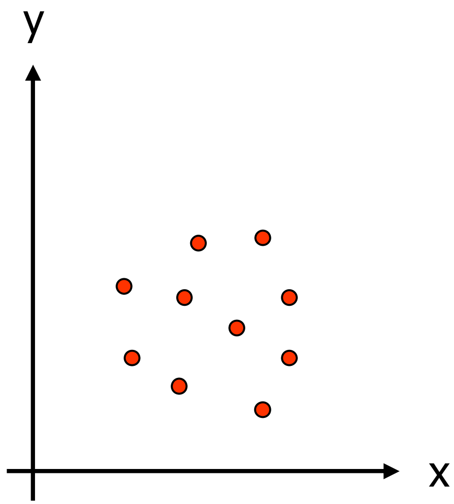
$x>E(X),\ y<E(Y)$ oder $x<E(X),\ y>E(Y)$ $\longrightarrow$ $[x-E(X)]\cdot[y-E(Y)]<0$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E([X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)])}$$

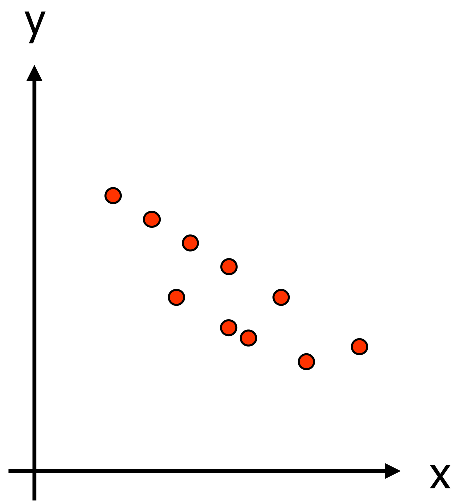
Kovarianz Cov(X,Y)



Cov(X,Y)>0



Cov(X,Y)~0



Cov(X,Y)<0

Kovarianz Cov(X,Y)

Es seien (X,Y) ein Paar von Zufallsvariablen und $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ eine Stichprobe aus n unabhängigen Realisierungen von (X,Y).

Ein "guter" Schätzer (d.h. unverzerrt, konsistent, meistens effizient) der Kovarianz Cov(X,Y) ist die empirische Kovarianz.

$$\boxed{s_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}$$

Miss America 1984 - 2002

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
63″	100 lbs	-3.8″	-18.6 lbs
68″	120 lbs	1.2″	1.4 lbs
69″	114 lbs	2.2″	-4.6 lbs
68″	116 lbs	1.2″	-2.6 lbs
70″	131 lbs	3.2″	12.4 lbs
63″	108 lbs	-3.8″	-10.6 lbs
68″	118 lbs	1.2″	-0.6 lbs
66″	110 lbs	-0.8″	-8.6 lbs
71″	145 lbs	4.2″	26.4 lbs
69″	133 lbs	2.2″	14.4 lbs
64″	118 lbs	-2.8″	-0.6 lbs
63″	110 lbs	-3.8″	-8.6 lbs

$$\bar{x} = 66.8''$$
$$\bar{y} = 118.6 \text{ lbs}$$
$$s_{XY} = 29.3''\cdot\text{lbs}$$

Miss America 1984 - 2002

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
1.60 m	45.4 kg	-0.10 m	-8.4 kg
1.73 m	54.4 kg	0.03 m	0.6 kg
1.75 m	51.7 kg	0.05 m	-2.1 kg
1.73 m	52.6 kg	0.03 m	-1.2 kg
1.78 m	59.4 kg	0.08 m	5.6 kg
1.60 m	49.0 kg	-0.10 m	-4.8 kg
1.73 m	53.5 kg	0.03 m	-0.3 kg
1.68 m	49.9 kg	-0,02 m	-3.9 kg
1.80 m	65.8 kg	0.10 m	12.0 kg
1.75 m	60.3 kg	0.05 m	6.5 kg
1.63 m	53.5 kg	-0.07 m	-0.3 kg
1.60 m	49.9 kg	-0.01 m	-3.9 kg

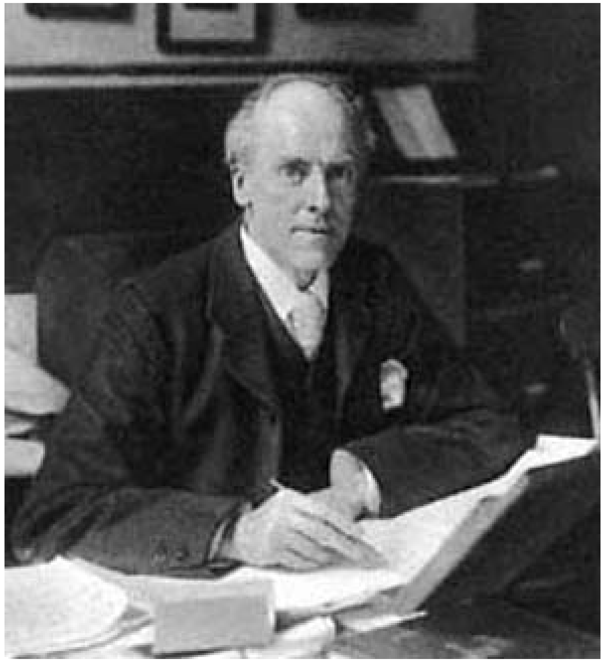
$$\bar{x} = 1.70 \text{ m}$$
$$\bar{y} = 53.8 \text{ kg}$$
$$s_{XY} = 0.33 \text{ m}\cdot\text{kg}$$

Pearson Korrelationskoeffizient

$$r_{XY} = \boxed{\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$$

$-1 \leq r_{XY} \leq +1$ ist dimensionslos

$$\hat{r}_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y}$$



Karl Pearson
(1857-1936)

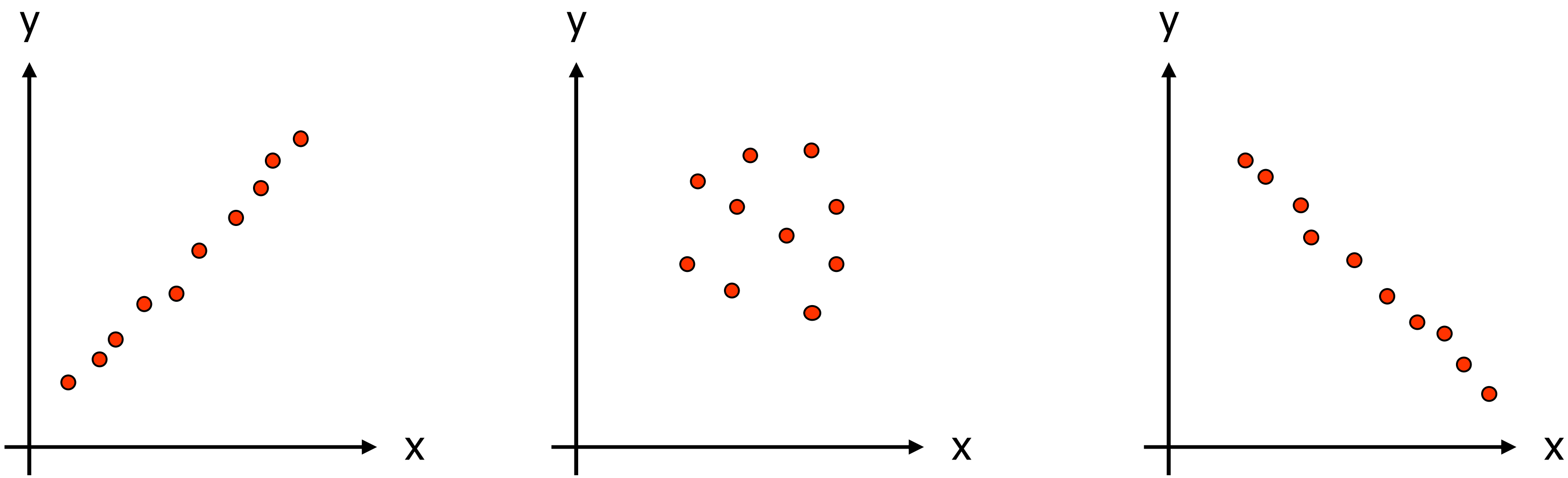
Miss America 1984 - 2002

63″	100 lbs	1.60 m	45.4 kg
68″	120 lbs	1.73 m	54.4 kg
69″	114 lbs	1.75 m	51.7 kg
68″	116 lbs	1.73 m	52.6 kg
70″	131 lbs	1.78 m	59.4 kg
63″		60 m	
68″		73 m	
66″		68 m	
71″		80 m	
69″		75 m	
64″		63 m	
63″		60 m	

$$s_{XY} = 29.3 \ {}'' \cdot \text{lbs}$$
$$s_X = 2.9 \ ''$$
$$s_Y = 12.4 \ \text{lbs}$$
$$\hat{r}_{XY} = +0.81$$

$$s_{XY} = 0.33 \ \text{m} \cdot \text{kg}$$
$$s_X = 0.073 \ \text{m}$$
$$s_Y = 5.6 \ \text{kg}$$
$$\hat{r}_{XY} = +0.81$$

Pearson Korrelationskoeffizient



$r_{XY} \sim +1$ $r_{XY} \sim 0$ $r_{XY} \sim -1$

r_{XY} misst die Stärke und Richtung des
linearen Zusammenhangs zwischen X und Y.

Pearson Korrelationskoeffizient

Signifikanztest

Zufallsvariable	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ alle unbekannt
Hypothesen	$H_0: r_{XY} = 0 \quad H_A: r_{XY} \neq 0$ (zweiseitig) $H_0: r_{XY} \leq 0 \quad H_A: r_{XY} > 0$ (einseitig)
Teststatistik	$T = \hat{r}_{XY} \cdot \sqrt{\dfrac{n-2}{1-\hat{r}_{XY}^2}}$
kritische Werte	$t_{1-\alpha/2,n-2}$ (zweiseitig) $t_{1-\alpha,n-2}$ (einseitig)

Regressionsmodelle

Regressionsmodelle dienen dazu,

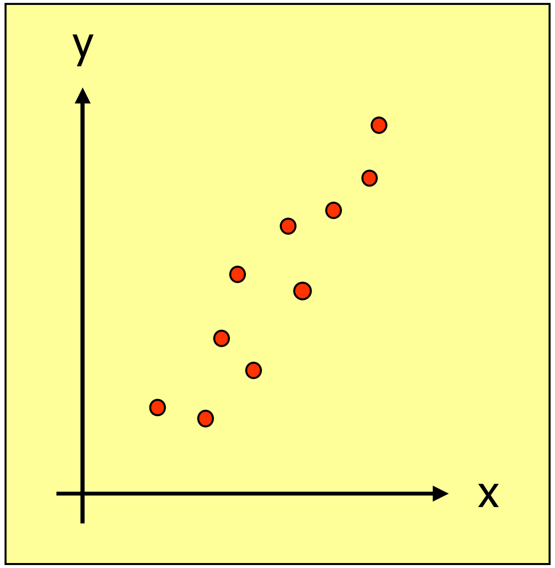
eine Variable aus einer oder mehr anderen Variablen vorherzusagen.

Wissenschaftler nutzen Regressionsmodelle für Aussagen über ein Ereignis, wenn die dafür notwendigen Informationen billiger zu bekommen sind als Informationen über das Ereignis selbst, oder wenn das Ereignis erst in der Zukunft eintritt.

http://www.psychstat.smsu.edu/introbook/sbk16.htm

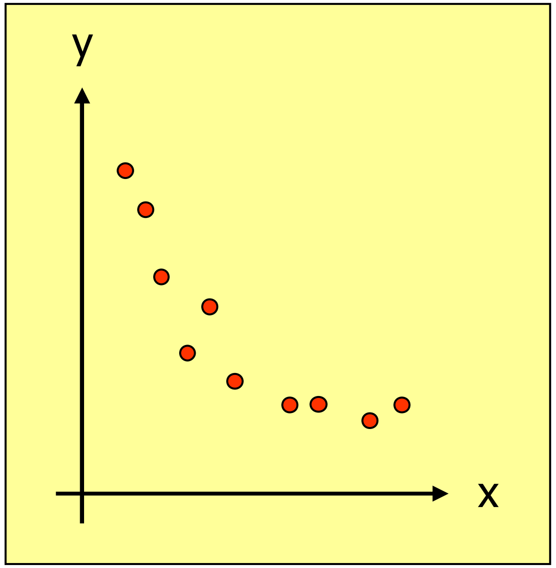
Regressionsmodelle

lineare
Regression



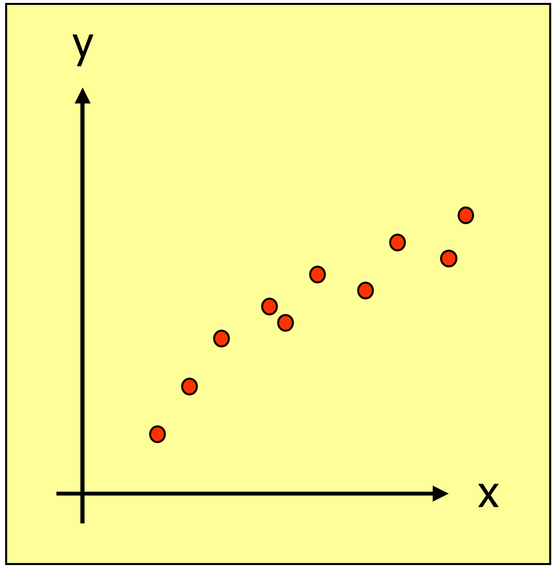
$$y = a + b \cdot x$$

exponentielle
Regression



$$y = a + e^{-b \cdot x}$$

logarithmische
Regression



$$y = a + b \cdot \log(x)$$

Lineare Regression

Y: Zielgröße

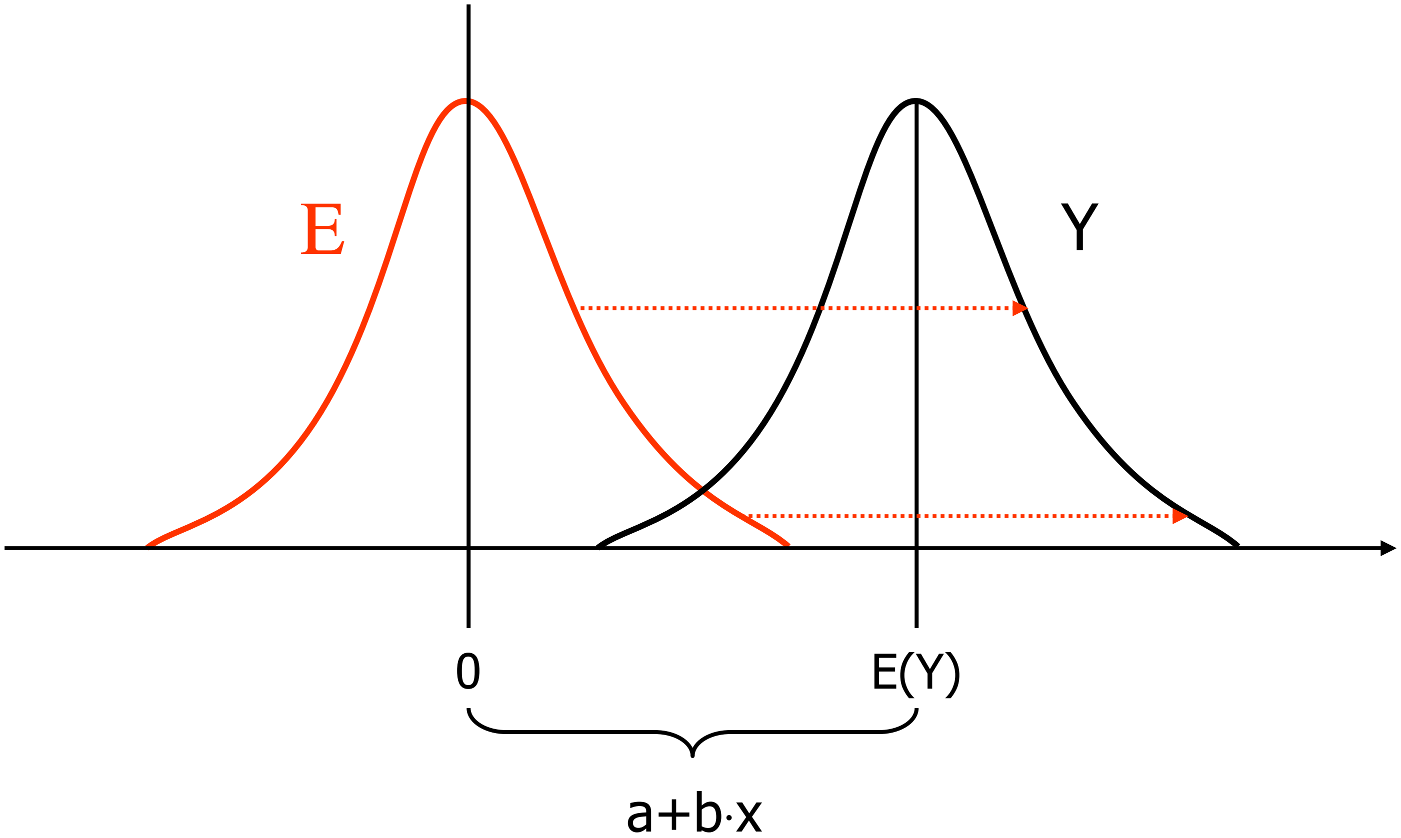
X: Einflussgröße

E: Zufallsfehler

Für E wird im Allgemeinen eine $N(0,\sigma^2)$-Verteilung mit unbekanntem σ^2 unterstellt.

$$\boxed{Y = a + b \cdot x + \mathrm{E}}$$

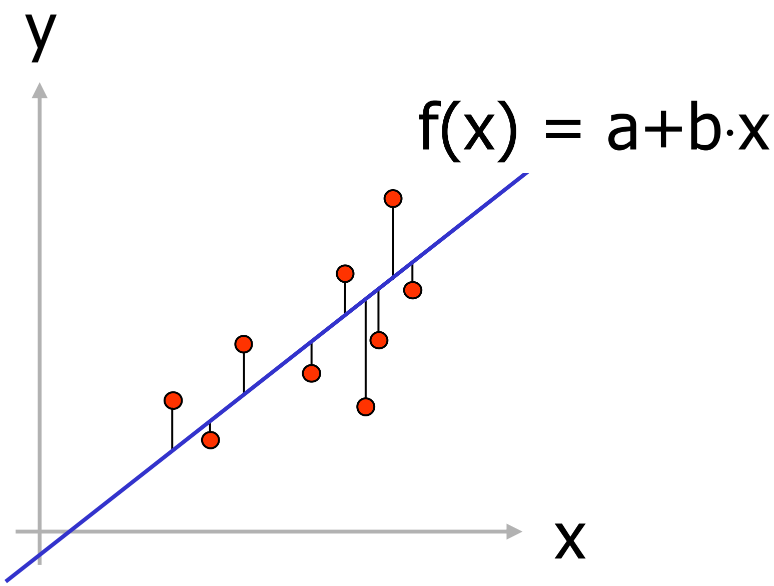
Lineare Regression



Kleinste-Quadrate-Prinzip

(lineare Regression)

Wähle a und b so, dass $\sum_{i=1}^{n}(a + b \cdot x_i - y_i)^2$ minimal ist!



Das Kleinste-Quadrate-Prinzip stellt sicher, dass die Schätzer von a und b bei Angemessenheit eines linearen Modells unverzerrt sind.

Lineare Regression

$$\sum_{i=1}^{n}(a + b \cdot x_i - y_i)^2 \quad \text{minimal!}$$

$$\frac{\delta}{\delta a}\sum_{i=1}^{n}(a + b \cdot x_i - y_i)^2 = 0 \qquad \frac{\delta}{\delta b}\sum_{i=1}^{n}(a + b \cdot x_i - y_i)^2 = 0$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad \text{und} \quad \hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x}$$

Miss America 1984 - 2002

$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
-3.8″	-18.6 lbs
1.2″	1.4 lbs
2.2″	-4.6 lbs
1.2″	-2.6 lbs
3.2″	12.4 lbs
-3.8″	-10.6 lbs
1.2″	-0.6 lbs
-0.8″	-8.6 lbs
4.2″	26.4 lbs
2.2″	14.4 lbs
-2.8″	-0.6 lbs
-3.8″	-8.6 lbs

$$\bar{x} = 66.8\ ''$$

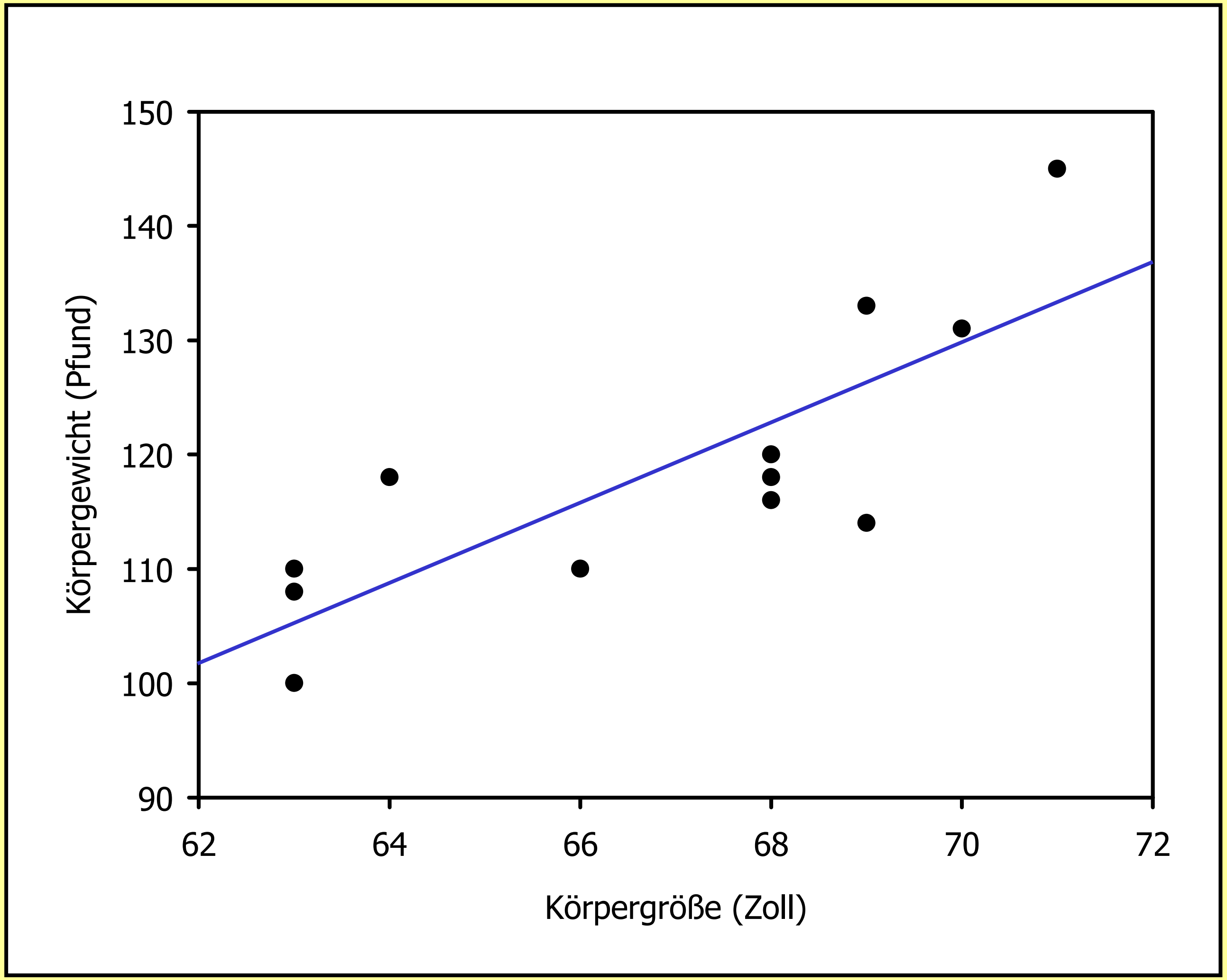
$$\bar{y} = 118.6 \text{ lbs}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 322.16$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 93.68$$

$$\boxed{\hat{a} = -111.29 \quad \hat{b} = 3.44}$$

Miss America 1984 - 2002



Bestimmtheitsmaß

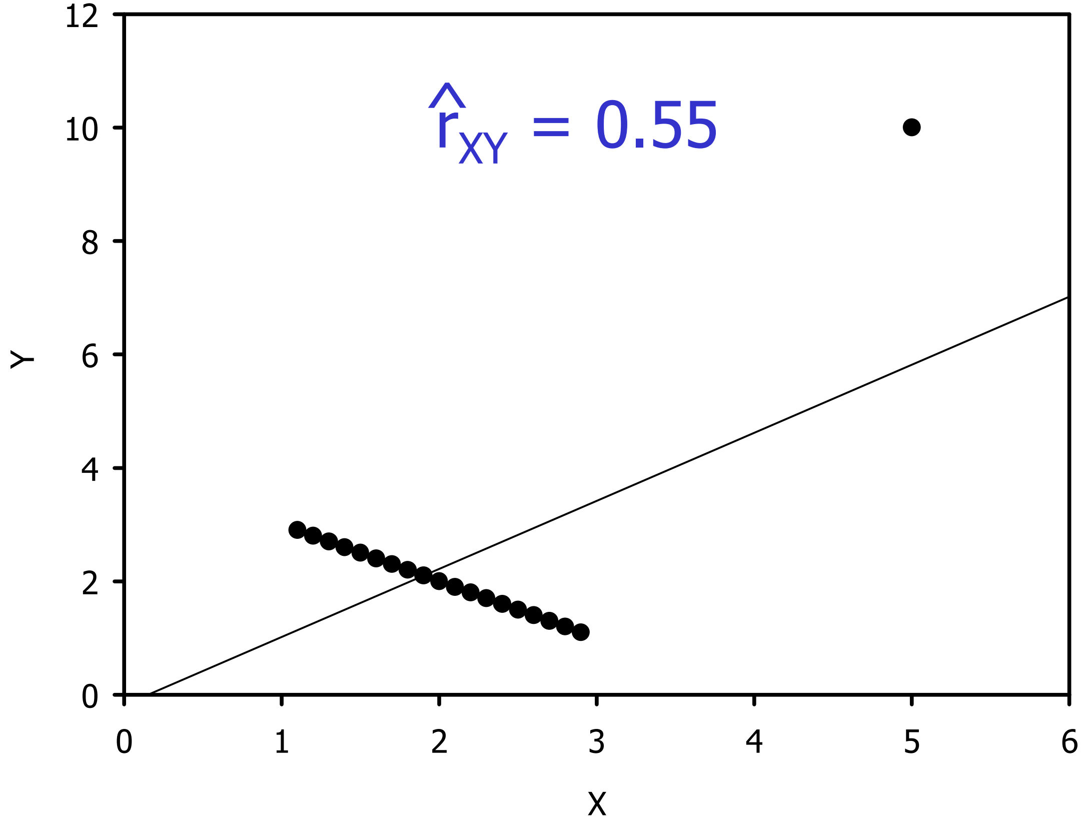
Es seien (X,Y) ein Paar von Zufallsvariablen und $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ eine Stichprobe aus n unabhängigen Realisierungen von (X,Y).

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-\overline{y}]^2}{\sum_{i=1}^{n}[y_i-\overline{y}]^2}$$

R^2 bezeichnet den Anteil an der Variation der Zielgröße, der durch das Regressionsmodell f(x) erklärbar ist.

Pearson Korrelationskoeffizient

$\hat{r}_{XY}$ ist anfällig gegen Ausreißer!



Spearman Rang-Korrelationskoeffizient

Es seien rg[x_i] und rg[y_i] die Ränge von x_i bzw. y_i, wobei Bindungen durchschnittliche Ränge zugewiesen werden.

Ersetze x_i durch rg[x_i] und y_i durch rg[y_i].

Berechne den Pearson Korrelationskoeffizient für rg[x_i] und rg[y_i].

Charles E. Spearman
(1863-1945)

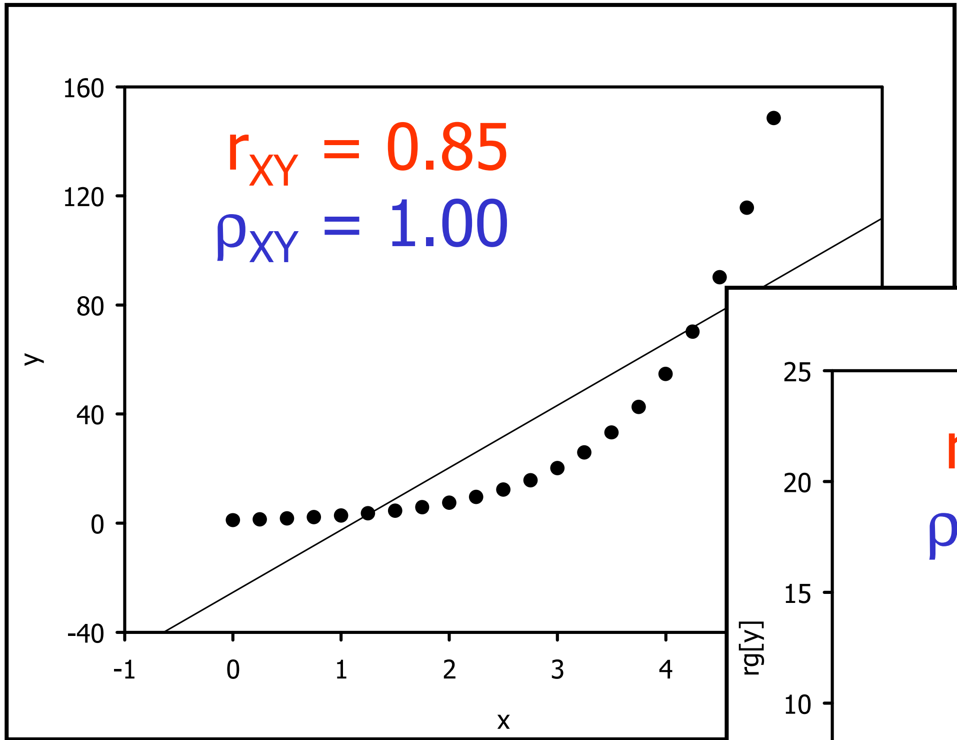
Spearman Rang-Korrelationskoeffizient

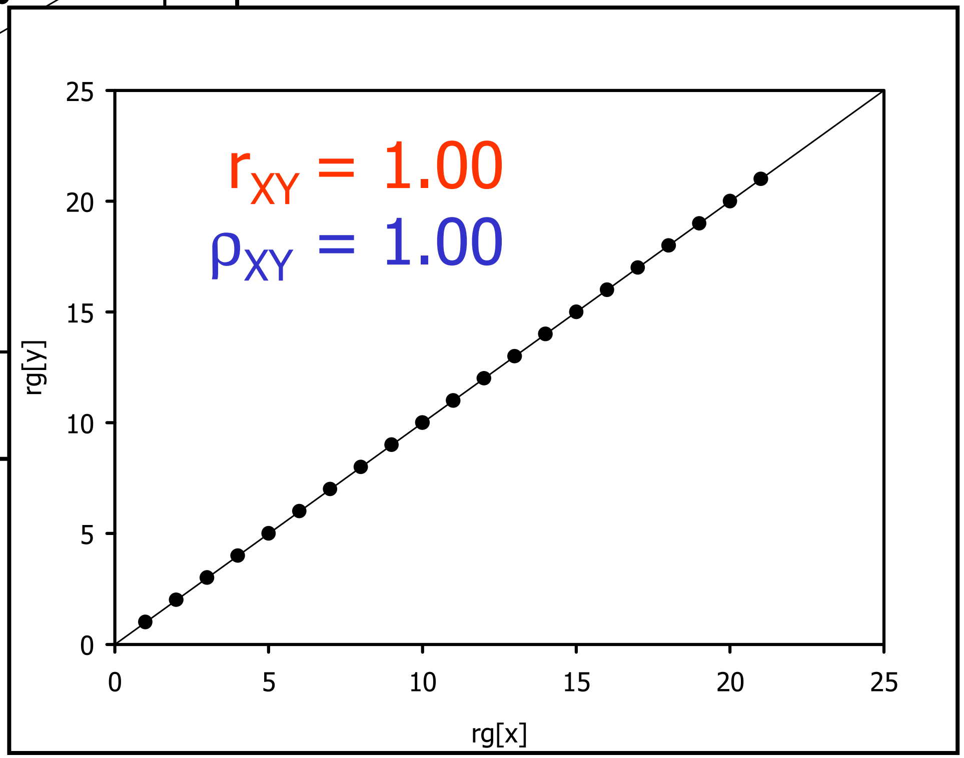
$$\hat{\rho}_{XY} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(rg[x_i] - rg[y_i])^2}^{d_i^2}}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

$-1 \leq \rho_{XY} \leq +1$ ist dimensionslos

ρ_{XY} misst die Stärke und Richtung des
monotonen Zusammenhangs zwischen X und Y.

Spearman Rang-Korrelationskoeffizient





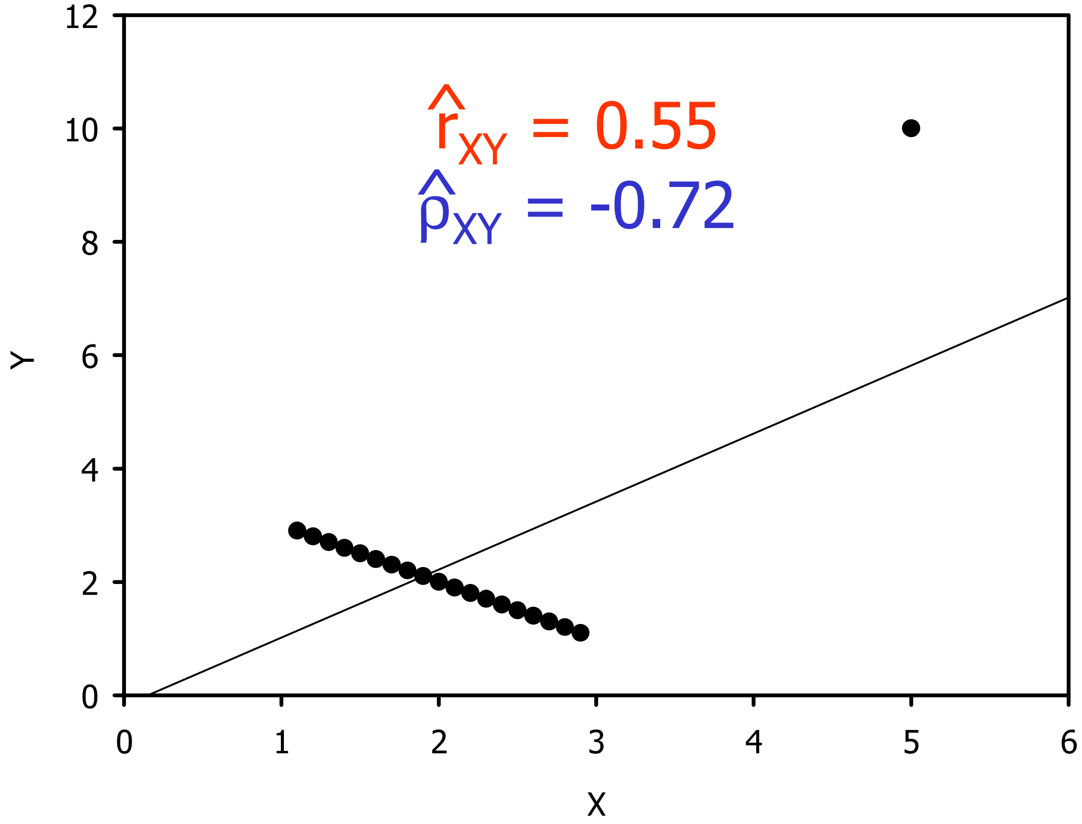
Miss America 1984 - 2002

x_i	y_i	$rg[x_i]$	$rg[y_i]$	d_i^2
63″	100 lbs	2	1	1
68″	120 lbs	7	9	4
69″	114 lbs	9.5	5	20.25
68″	116 lbs	7	6	1
70″	131 lbs	11	10	1
63″	108 lbs	2	2	0
68″	118 lbs	7	7.5	0.25
66″	110 lbs	5	3.5	2.25
71″	145 lbs	12	12	0
69″	133 lbs	9.5	11	2.25
64″	118 lbs	4	7.5	12.25
63″	110 lbs	2	3.5	2.25

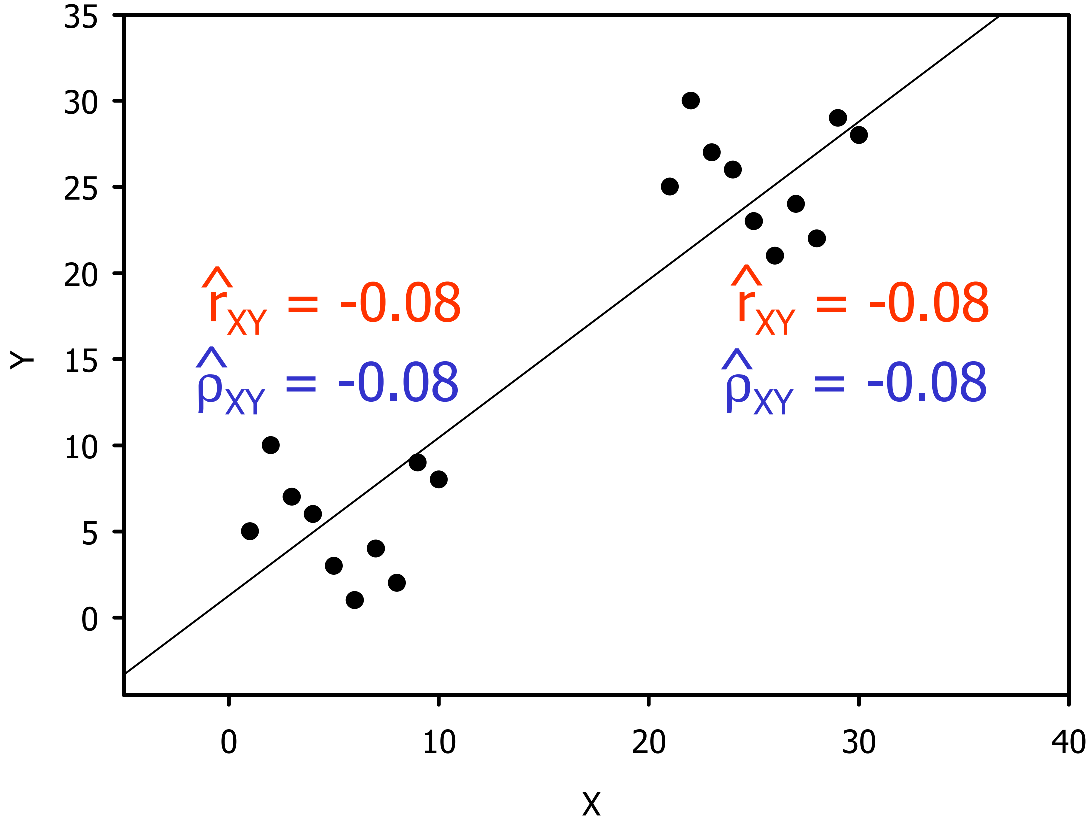
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 46.5$$

$$\hat{\rho}_{XY} = 0.84$$

Spearman Rang-Korrelationskoeffizient

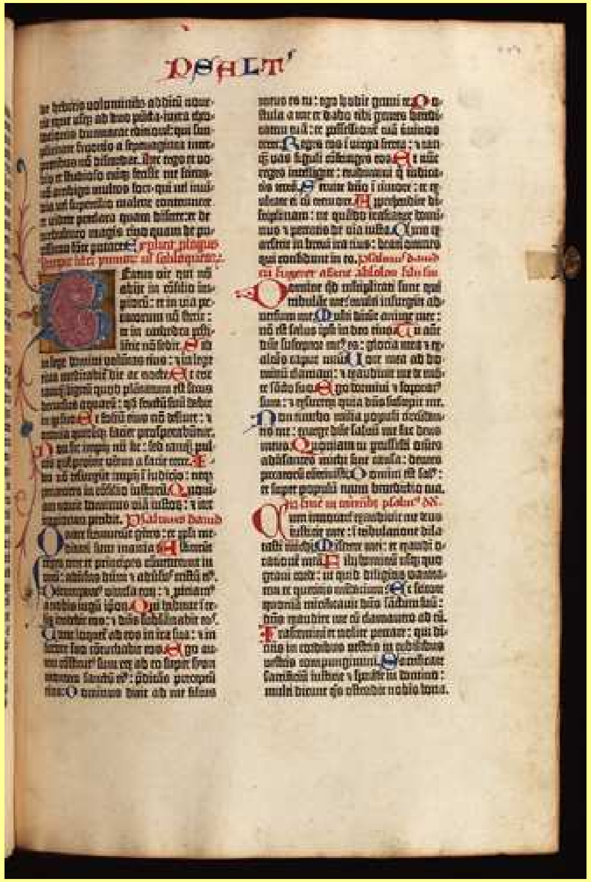


Korrelation durch Inhomogenität



$\hat{r}_{XY} = 0.92$

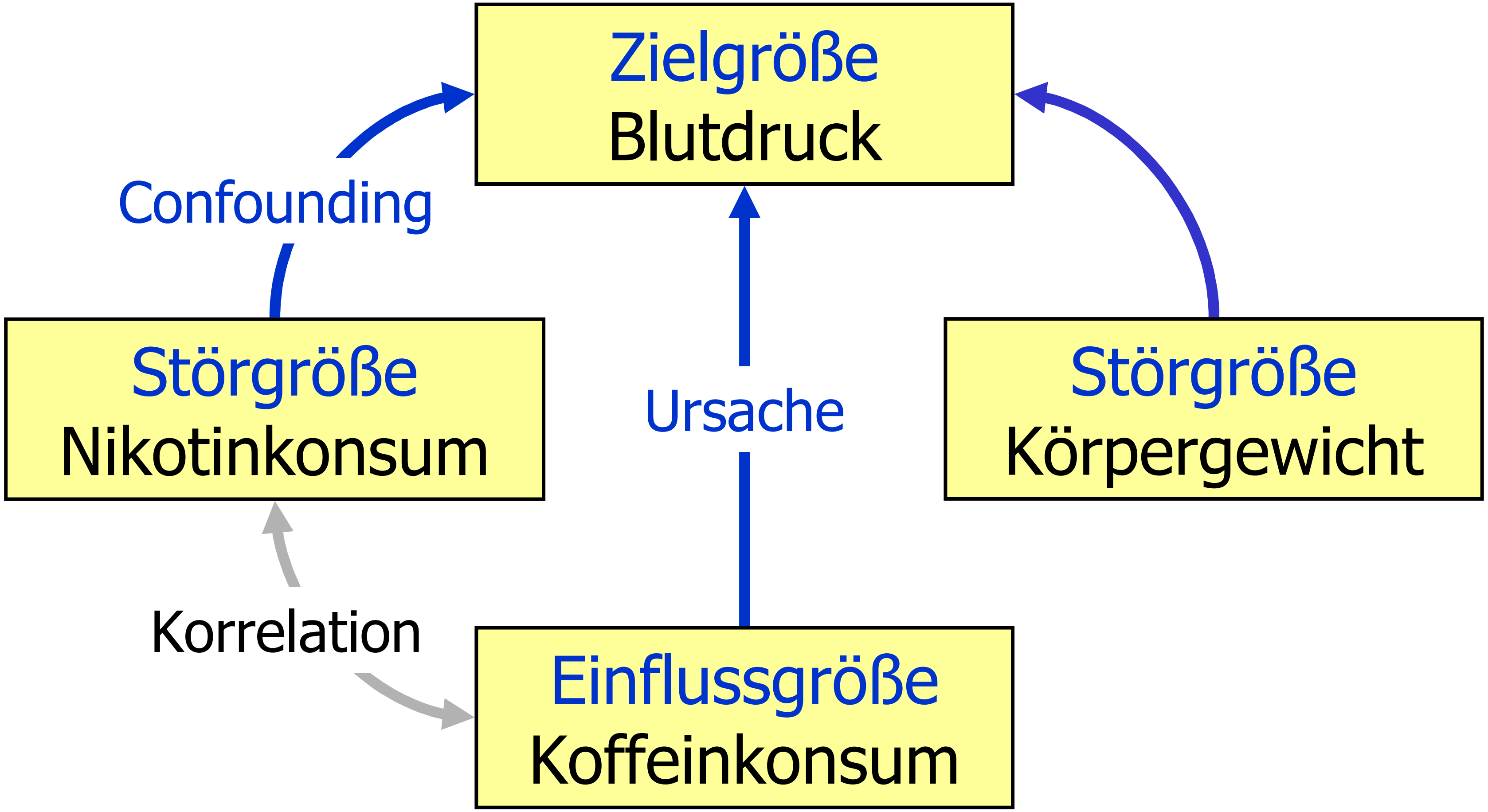
$\hat{\rho}_{XY} = 0.73$



Let them be confounded and troubled for ever;
yea, let them be put to shame, and perish.

Psalm 83:17

Ursache und Confounding



Confounding

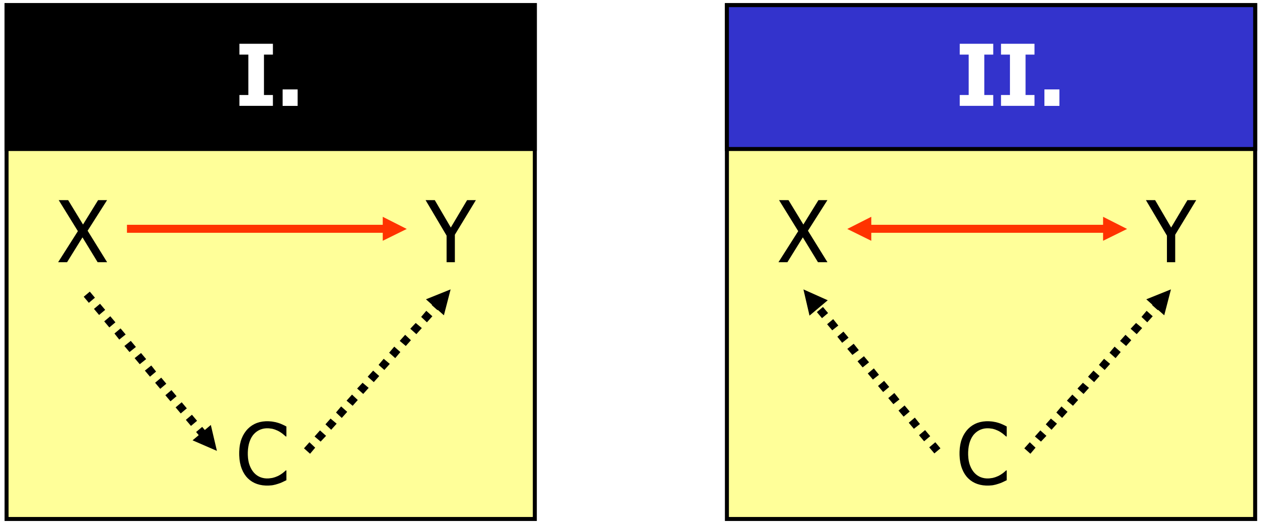
Eine Störgröße wird als Confounder des Zusammenhangs zwischen Einfluss- und Zielgröße bezeichnet, wenn sie

C1: entweder die Zielgröße beeinflusst oder das Surrogat einer Einflussgröße ist,

C2: mit der Einflussgröße korreliert ist, und

C3: keinen Zwischenschritt in der Kausalkette zwischen Einfluss- und Zielgröße darstellt.

Confounding



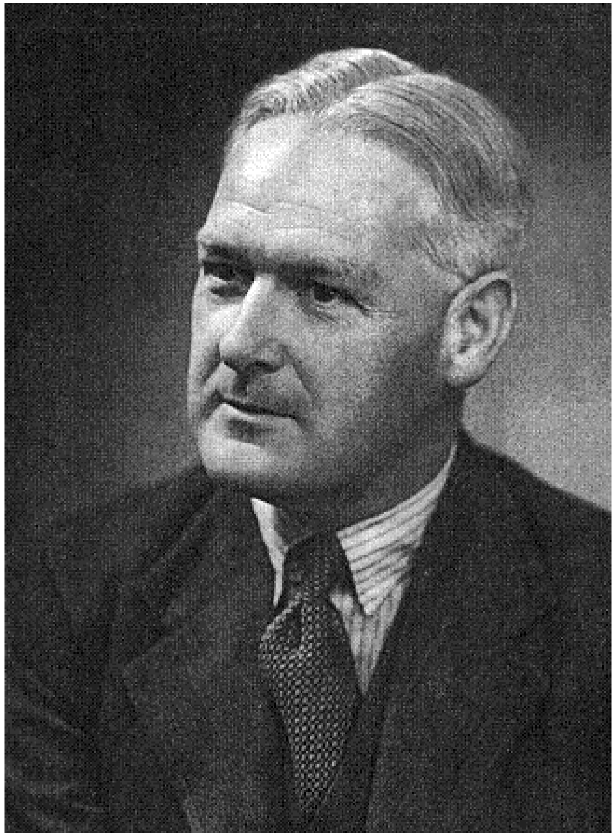
X: Geschlecht, Y: Verhalten, C: Bildung

X: Therapie, Y: Morbidität, C: Mobilität

X: Ernährung, Y: Lebenserwartung, C: Sozialisation

X: Mobiltelefon, Y: Schlafstörungen, C: Lebensstil

Kausalitätskriterien



Sir Austin Bradford Hill
(1897-1991)

"Wissenschaftliches Arbeiten bleibt immer unvollständig - egal ob observational oder experimentell. Jede wissenschaftliche Arbeit läuft Gefahr, durch fortschreitendes Wissen überholt oder überflüssig zu werden. Dies erlaubt es uns aber nicht, derzeitiges Wissen zu ignorieren oder Maßnahmen, die heute ergriffen werden müssen, in die Zukunft zu verschieben."

Austin Bradford Hill, "The Environment and Disease: Association or Causation?," Proceedings of the Royal Society of Medicine, 58 (1965), 295-300.

Kausalitätskriterien

Zeitliche Beziehung (1)

Ursache geht Wirkung voran

Stärke (2)

stärkerer Zusammenhang = wahrscheinlichere Kausalität

Dosis-Wirkungs-Beziehung (3)

stärkere Exposition erhöht Wirkung oder Risiko

Konsistenz (4)

wiederholbar bei unterschiedlichen Methoden und Umständen

Plausibilität (5)

mit derzeitigem Wissen erklärbar

Kausalitätskriterien

Alternative Erklärungen (6)

Erwägen und Verwerfen alternativer Erklärungen

Experiment (7)

Wirkung ist experimentell steuerbar

Spezifität (8)

eine einzelne Ursache für eine gegebene Wirkung

Kohärenz (9)

vereinbar mit vorliegenden Fakten und Theorien

Zusammenfassung

- Die Stärke und Richtung der Assoziation zwischen zwei quantitativen Zufallsvariablen wird durch ihre Kovarianz gemessen.
- Der Pearson Korrelationskoeffizient misst die Stärke und Richtung des linearen Zusammenhangs zwischen zwei quantitativen Zufallsvariablen.
- Regressionsanalysen erzeugen mathematische Modelle für den quantitativen Zusammenhang zwischen Zufallsvariablen.
- Kausalität folgt nicht notwendigerweise aus dem Vorliegen einer Korrelation, sondern bedarf zusätzlicher Evidenz (z.B. gemäß Bradford-Hill-Kriterien).