

Analysis II für Ingenieure

1. Vorlesung 18.10.10

Folien:

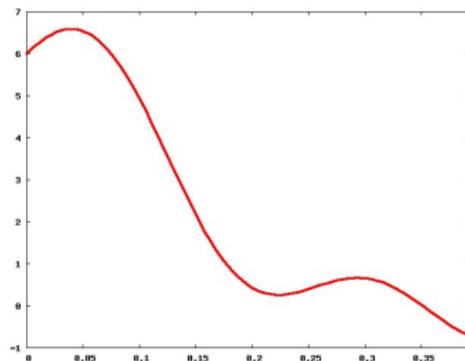
Max v. Renesse

nach Vorlagen von

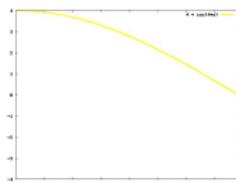
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Fourieranalysis - Die Idee

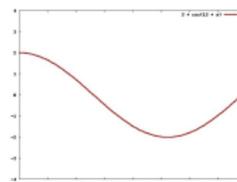


=



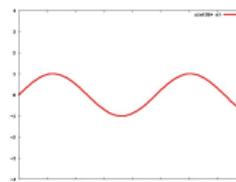
$4 \cos(4x)$

+



$2 \cos(12x)$

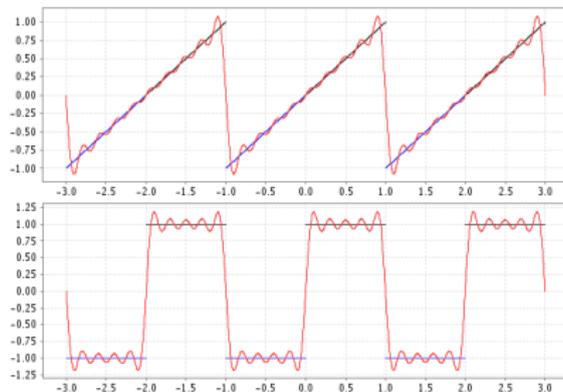
+



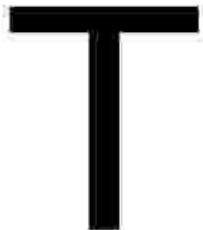
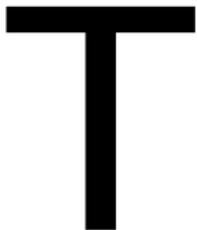
$\sin(26x)$

Anwendungsbeispiele

- ▶ “Willkürliche” Spannungen durch harmonische synthetisieren



- ▶ Kompressionsverfahren z.B. MP3, JPEG.



'Trigonometrische Polynome'

Trigonometrische Polynome vom Grad n :

$$t_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

mit der **Kreisfrequenz** $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und den **Koeffizienten** $\frac{a_0}{2}, a_k, b_k \in \mathbb{R}$,
für $k = 1, \dots, n$.

Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt **periodisch mit Periode T**

$$:\Leftrightarrow f(t + T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Falls $f : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, so existiert eine eindeutige
 T -periodische Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine T -periodische Funktion, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die **Fourierkoeffizienten** von f durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

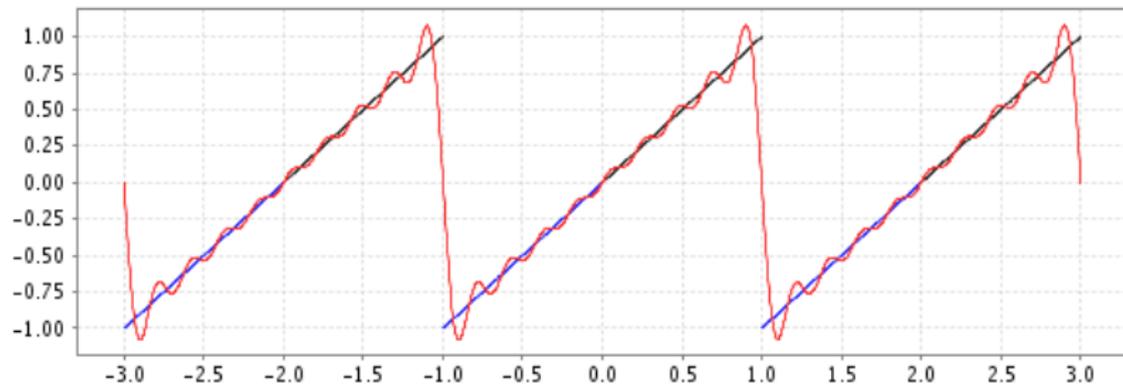
Das **Fourierpolynom n -ter Ordnung** von f ist

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

Generalvoraussetzung für die Fourieranalysis

Die Funktion f sei immer **stückweise monoton**.

Rechenbeispiel: Sägezahnkurve (s. Tafel)



'Orthogonalitätsrelationen'

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gilt:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = 0$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \\ 2, & \text{falls } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \text{ oder } k = l = 0 \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \end{cases}$$

Intepretation

Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}(\sin k\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}}(\cos k\omega t), k = 1, 2, \dots \right\}$ sind eine (vollständige) **Orthonormalbasis** bzgl. dem Skalarprodukt

$$u \bullet v := \int_0^T u(t) \cdot v(t) dt$$

Analysis II für Ingenieure

2. Vorlesung 21.10.10

Folien:

Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Wiederholung

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die **Fourierkoeffizienten** von f durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

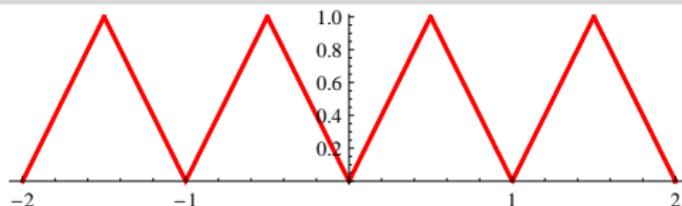
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Das **Fourierpolynom n -ter Ordnung** von f ist

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

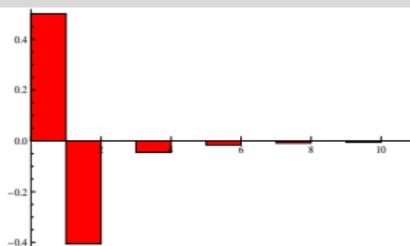
Beispiel: Rauschunterdrückung

Ausgangssignal



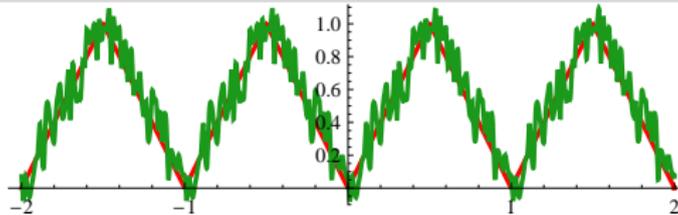
(1-periodische Fortsetzung f von $t \mapsto 2|t|$, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$.)

Spektrum (Amplituden)

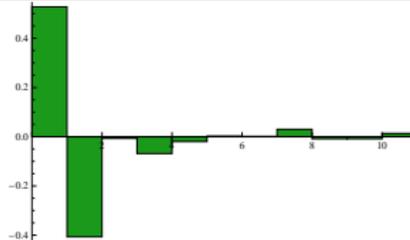


Beispiel: Rauschunterdrückung

Verrauschtes Signal

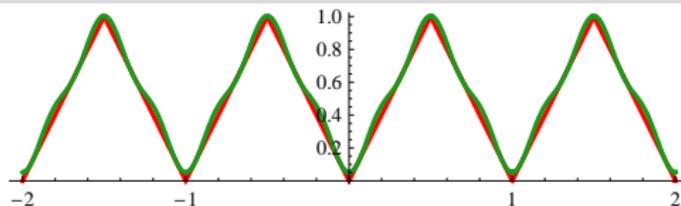


Spektrum (Amplituden)

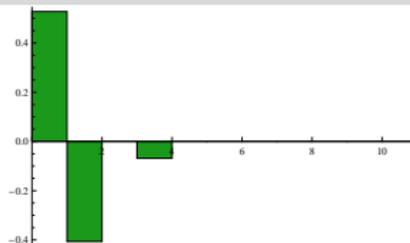


Beispiel: Rauschunterdrückung

Gefiltertes Signal (Amplituden $< 0,05$ abgeschnitten)



Spektrum (Amplituden)



Tricks beim Berechnen der Fourierkoeffizienten

1. Für eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

2. Für eine **ungerade** Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (z.B. $f(t) = \sin(t)$):

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 0.$$

3. Für eine **gerade** Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (z.B. $f(t) = \cos(t)$):

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 2 \cdot \int_0^L f(t) dt.$$

4. Für $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sei $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(t) := f(t)g(t)$, dann

- ▶ falls f und g gerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ gerade,
- ▶ falls f und g ungerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ gerade,
- ▶ falls f ungerade und g gerade $\Rightarrow h = f \cdot g$ ungerade.

'Orthogonalitätsrelationen'

Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gilt:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = 0$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \\ 2, & \text{falls } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \text{ oder } k = l = 0 \\ 1, & \text{falls } k = l > 0 \end{cases}$$

Intepretation

Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}(\sin k\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}}(\cos k\omega t), k = 1, 2, \dots \right\}$ sind eine (vollständige) **Orthonormalbasis** bzgl. dem Skalarprodukt

$$u \bullet v := \int_0^T u(t) \cdot v(t) dt$$

Approximation im quadratischen Mittel

Definition

Ein T -periodisches trigonometrisches Polynom ϕ approximiert eine gegebene T -periodische Funktion f im quadratischen Mittel optimal, wenn

$$\int_0^T (f(t) - \phi(t))^2 dt \quad \text{minimal.}$$

Satz

Sei f eine stückweise monotone T -periodische Funktion.

1. Das n -te Fourierpolynom ϕ_n von f ist die **beste Approximation von f im quadratischen Mittel unter allen trigonometrischen Polynomen der Ordnung n .**
2. Der Approximationsfehler $\int_0^T (f(t) - \phi_n(t))^2 dt$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null.

Abschließende Bemerkungen

1. Falls $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ **unstetig** in x_0 , d.h.

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f(x_0+) \neq f(x_0-) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x),$$

dann gilt für $\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

2. Falls $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ und T -periodisch kann man auch mit der **komplexen Fourier-Approximation** arbeiten: $\omega := \frac{2\pi}{T}$

$$\psi_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega t}$$

$$c_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt.$$

Analysis II f. Ingenieure

3. Vorlesung 25.10.10

Folien:

Max v. Renesse

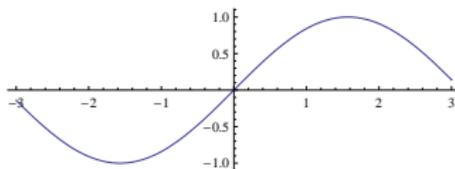
nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

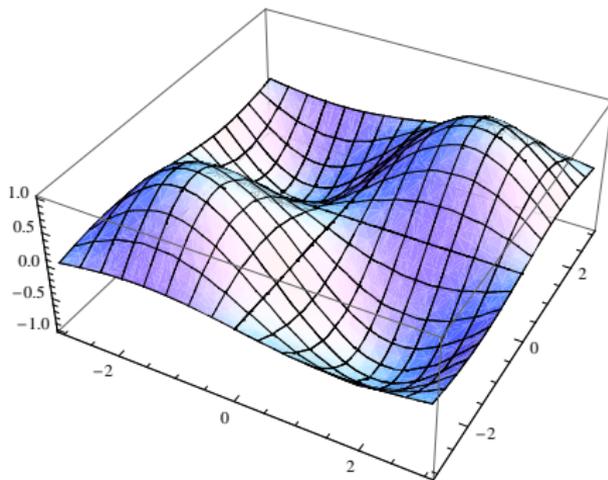
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$



Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

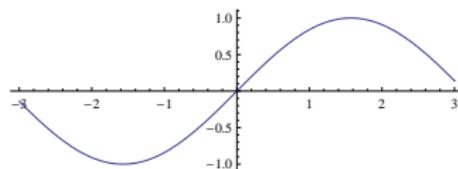
$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

Graph:



Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

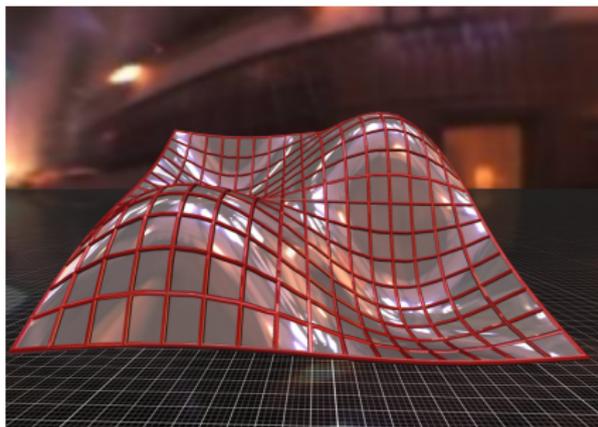
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$



Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

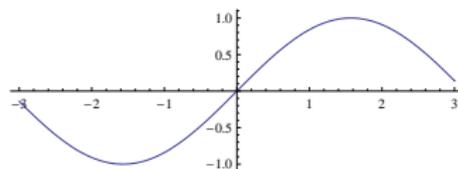
$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

Graph:



Analysis I: eine Variable, 1–dimensionale Funktionswerte

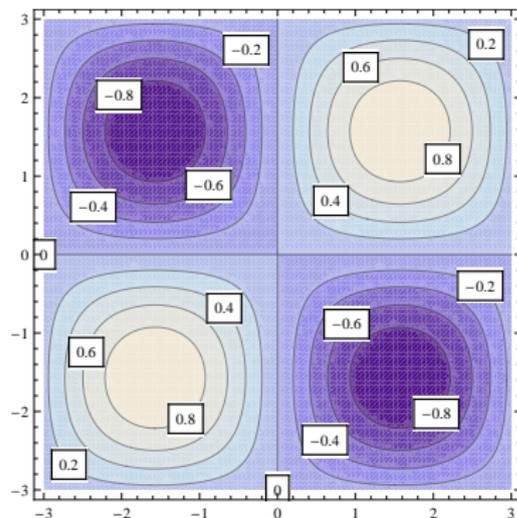
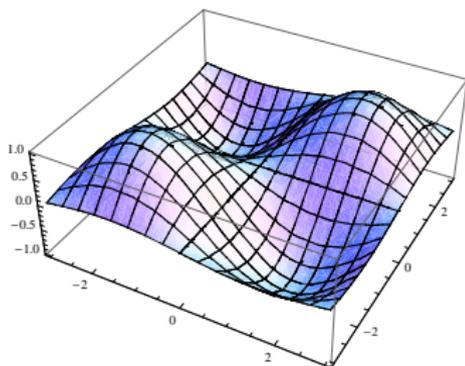
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$



Analysis II: mehrere Variablen, 1–dimensionale Funktionswerte

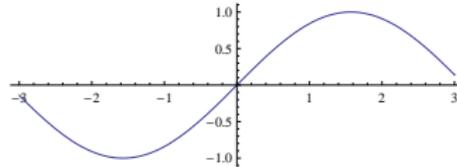
$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

Höhenlinien:



Analysis I: eine Variable, 1-dimensionale Funktionswerte

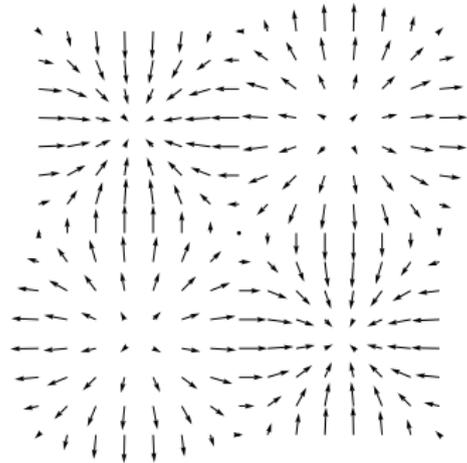
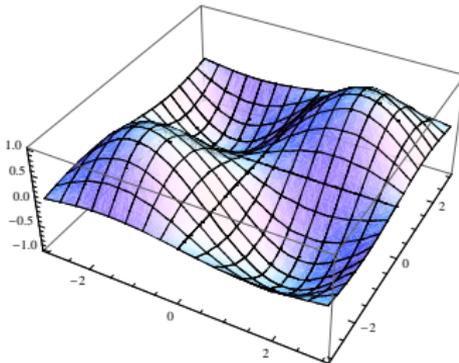
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$



Analysis II: mehrere Variablen, mehrdim. Funktionswerte

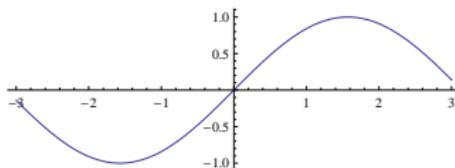
$$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \cos(y))$$

Vektorfeld:



Analysis I: eine Variable, 1-dimensionale Funktionswerte

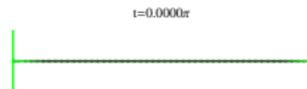
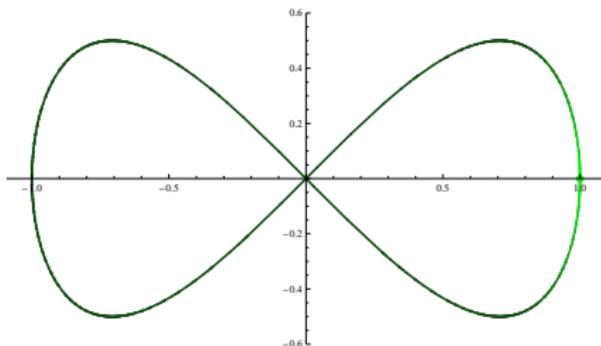
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$



Analysis II: eine Variable, mehrdimensionale Funktionswerte

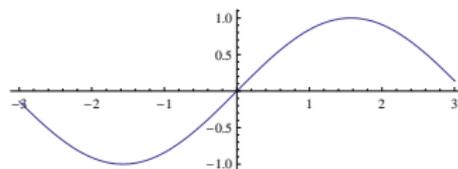
$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t/2), \sin(t)/2)$$

Kurve:



Analysis I: eine Variable, 1-dimensionale Funktionswerte

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$

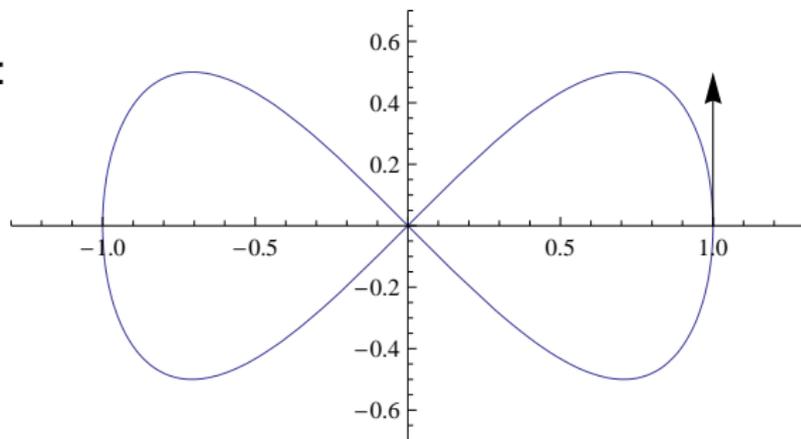


Analysis II: eine Variable, mehrdimensionale Funktionswerte

$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t/2), \sin(t)/2, -\sin(t/2)/2, \cos(t)/2)$$

Kurve mit

Geschwindigkeitsvektor:



Der n -dimensionale Euklidische Raum \mathbb{R}^n

- ▶ **Vektoren, Punkte:** $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- ▶ **Skalarprodukt:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- ▶ **Betrag, Länge, Norm:** $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

Für den Betrag gelten folgende Formeln ($c \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$)

- ▶ $|c\vec{x}| = |c||\vec{x}|$
- ▶ $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ Dreiecksungleichung.
- ▶ $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ Cauchy–Schwarzsche Ungleichung.
- ▶ **Abstand:** $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$.

Die Dreiecksungleichung ergibt für den Abstand

$$|\vec{x} - \vec{z}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y} - \vec{z}|$$

Begriffe aus der Topologie im \mathbb{R}^n

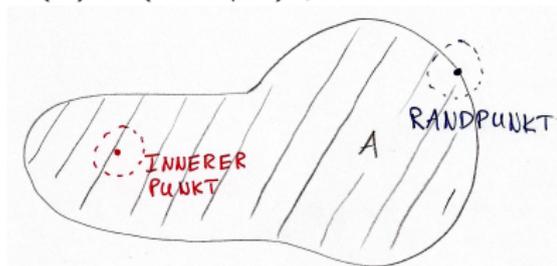
- ▶ **Offene Kugel** um \vec{a} mit Radius $r > 0$:

$$B_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \}.$$

- ▶ Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn für **alle** $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$B_r(\vec{a}) \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B_r(\vec{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$

- ▶ Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **innerer Punkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn für **ein** $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $B_r(\vec{a}) \subset A$.



- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn **kein** Randpunkt von A in A enthalten ist.
- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn **alle** Randpunkte von A in A enthalten sind.

Analysis II f. Ingenieure

4. Vorlesung 28.10.10

Folien:

Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

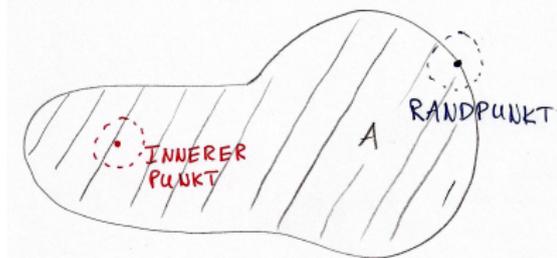
Fakultät II: Institut für Mathematik

Erinnerung:

- ▶ Offene Kugel um \vec{a} mit Radius $r > 0$:

$$B_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \}.$$

- ▶ Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn es in **allen** offenen Kugeln um \vec{a} solche Punkte gibt, die **in** A liegen und welche, die **nicht in** A liegen.
- ▶ Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt **innerer Punkt** einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn es **eine** offene Kugel um \vec{a} gibt, die in A **enthalten** ist.



- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn **kein Randpunkt** von A in A enthalten ist.
- ▶ $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn **alle Randpunkte** von A in A enthalten sind.

Satz 6 (Offenheitskriterium)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **offen**, wenn alle ihre Punkte **innere Punkte** sind.

Weitere Begriffe aus der Topologie im \mathbb{R}^n

- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung von $\vec{a} \in A$** , wenn \vec{a} innerer Punkt von A ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A \subset B_R(0)$ ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie **beschränkt** und **abgeschlossen** ist.

Satz 6 (Offenheitskriterium)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **offen**, wenn alle ihre Punkte **innere Punkte** sind.

Weitere Begriffe aus der Topologie im \mathbb{R}^n

- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung von $\vec{a} \in A$** , wenn \vec{a} innerer Punkt von A ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A \subset B_R(0)$ ist.
- ▶ Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie **beschränkt** und **abgeschlossen** ist.

Definition 9 (Konvergenz)

Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen \vec{a} , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k - \vec{a}| = 0.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}.$$

Satz 11 (Komponentenweise Konvergenz)

Eine Folge von Vektoren konvergiert genau dann, wenn **alle** Komponentenfolgen konvergieren.

Satz 15 (Folgenkompaktheit)

Jede Folge in einer **kompakten Teilmenge** $A \subset \mathbb{R}^n$ enthält eine **in A konvergente Teilfolge**.

Definition 17 (Grenzwert einer Abbildung)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann sagen wir

$\vec{f}(\vec{x})$ konvergiert gegen \vec{b} für \vec{x} gegen \vec{a} ,

wenn für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $G \setminus \{\vec{a}\}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}.$$

Wir schreiben kurz

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Definition 19 (Stetigkeit)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in G$. Dann heißt \vec{f} stetig in \vec{a} , wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$

Analysis II f. Ingenieure

5. Vorlesung 01.11.10

Folien:

Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 17 (Grenzwert einer Abbildung)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann sagen wir

$\vec{f}(\vec{x})$ konvergiert gegen \vec{b} für \vec{x} gegen \vec{a} ,

wenn für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $G \setminus \{\vec{a}\}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}.$$

Wir schreiben kurz

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Definition 19 (Stetigkeit)

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in G$. Dann heißt \vec{f} stetig in \vec{a} , wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$

Eine Abbildung heißt **stetig**, wenn sie in allen Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Stetigkeit *widerlegen*

Finde **eine** gegen \vec{a} konvergente Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in G , sodass $(\vec{f}(\vec{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ **nicht** oder **nicht gegen $\vec{f}(\vec{a})$ konvergiert**.

Stetigkeit *nachweisen*

Finde eine **stetige Funktion** $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(\vec{a}) = 0$, sodass

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})| \leq g(\vec{x}).$$

Beispiele

Beispiel 1

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

g ist stetig in $\vec{x} = \vec{0} = (0, 0)$, denn sei $(\vec{x}_k = (x_k, y_k))_{k \geq 0}$ eine beliebige Folge mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{0}$, dann

$$|g(\vec{0}) - g(\vec{x}_k)| = g(\vec{x}_k) = \frac{x_k^2}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \leq |x_k| \rightarrow 0,$$

d.h. für alle solche Folgen mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{0}$ gilt

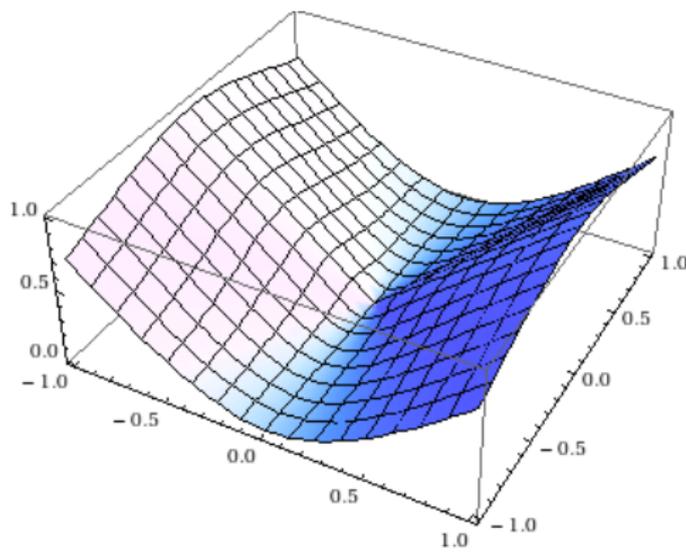
$$\lim g(\vec{x}_k) = g(\lim_k \vec{x}_k).$$

Beispiele

Beispiel 1 (Forts.)

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Beispiel 2

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

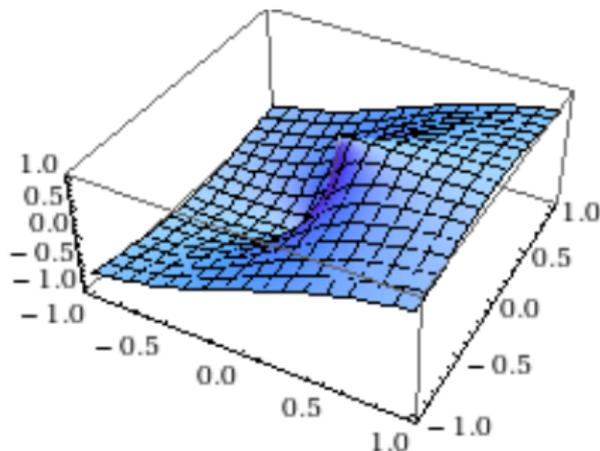
f ist nicht stetig in $\vec{x} = \vec{0} = (0, 0)$, denn sei z.B. $\vec{x}_k := (\frac{1}{k}, 0)$, dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = 1 \neq 0 = f(\vec{0}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k).$$

Beispiel 2

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Funktionsgraph:



Satz 22 (Komponentenweise Stetigkeit)

$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ ist genau dann **stetig**, wenn **alle** Komponentenfunktionen f_j stetig sind.

Rechnen mit stetigen Funktionen

- ▶ **Hintereinanderausführungen** stetiger Funktionen sind stetig.
- ▶ Insbesondere sind stetige **Verknüpfungen** stetiger Funktionen stetig.
- ▶ z.B.: Summe, Differenz, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Produkt einer skalaren Funktion mit einer vektorwertigen, Division durch eine nicht verschwindende Funktion.

Definition

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $M \in \mathbb{R}$ **Maximum** (bzw. **Minimum**) von f auf G , wenn für alle $\vec{x} \in G$ gilt $f(\vec{x}) \leq M$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq M$) und es ein $\vec{x}_m \in G$ gibt, sodass $f(\vec{x}_m) = M$.

Satz 25 (Extremwerte auf Kompakta)

Eine **stetige Funktion** nimmt auf einer nicht-leeren **kompakten Teilmenge** ihres Definitionsbereiches ihr **Maximum und Minimum an**.

Analysis II f. Ingenieure

6. Vorlesung 04.11.10

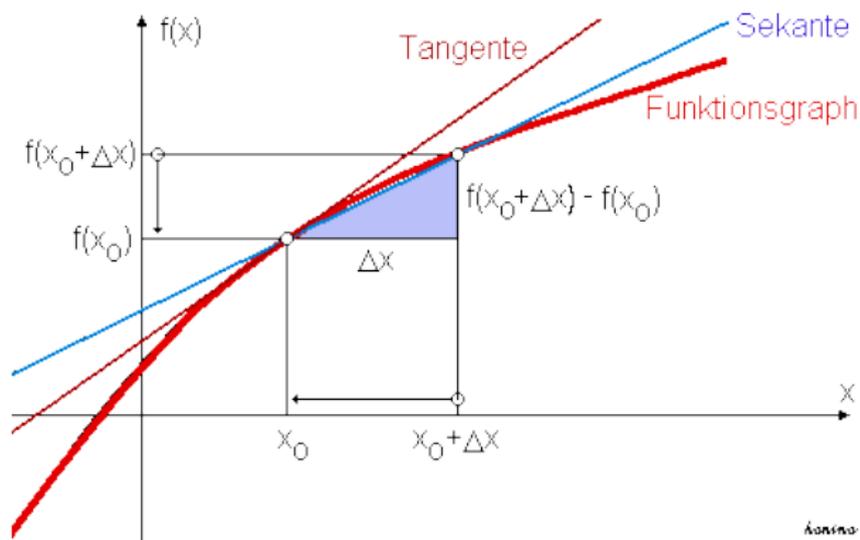
Folien:

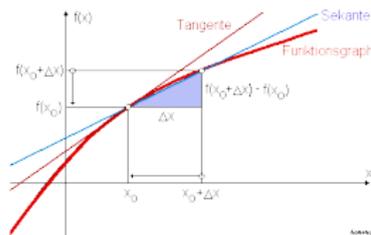
Max v. Renesse

nach Vorlagen von

G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 

Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 

Tangente an f im Punkte $x_0 =$ Gerade $g(x) = a + m \cdot x$ mit

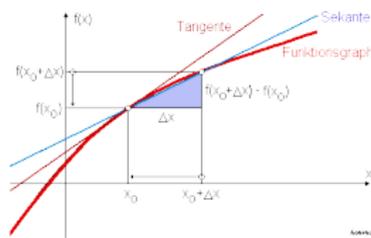
$$m = f'(x_0) \quad \text{und} \quad a = f(x_0) - mx_0$$

Approximationsfehler

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)| \leq |x - x_0| \cdot r(|x - x_0|)$$

mit

$$r(|x - x_0|) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow x_0.$$

Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 

Definition/Satz

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine geeignete Gerade $g(x) = a + m \cdot x$ gibt, so dass

$$|f(x) - g(x)| \leq |x - x_0| \cdot r(|x - x_0|) \text{ mit } r(|x - x_0|) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0$$

bzw. (\u00e4quivalent) falls ex. $m \in \mathbb{R}$, so dass

$$|f(x_0 + \Delta) - f(x_0) - m \cdot \Delta| \leq |\Delta| \cdot r(|\Delta|) \text{ mit } r(|\Delta|) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } \Delta \rightarrow 0.$$

Name: $m = 'f'(x_0)'$ Ableitung von f im Punkt x_0 . ($\Rightarrow a = f(x_0) - mx_0$).

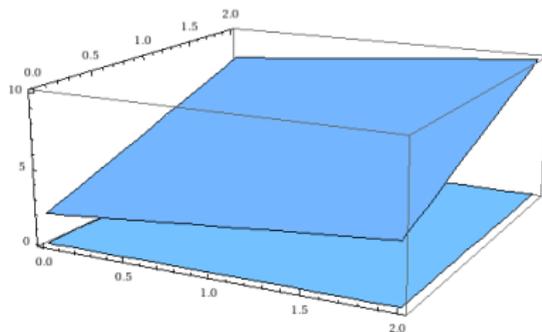
Affin-Lineare Funktionen auf \mathbb{R}^n

Definition

Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ der Form $g(\vec{x}) = a + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle$ mit festem $a \in \mathbb{R}$ bzw. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *affin-linear*.

Bemerkung: Verallgemeinerung von $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) = a + m \cdot x \in \mathbb{R}$.

Beispiel: $n = 2$, $a = 2$, $\vec{v} = (1, 3)$



Interpretation: $a =$ Achsenabschnitt, $v =$ Steigungsvektor

Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Definition

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ is differenzierbar in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn es eine geeignete affin-lineare Funktion $g(\vec{x}) = a + \langle v, \vec{x} \rangle$ gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - g(\vec{x})| \leq |\vec{x} - \vec{x}_0| \cdot r(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \text{ mit } r(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$$

bzw. (\u00e4quivalent) falls ex. $v \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$|f(\vec{x}_0 + \vec{\Delta}) - f(\vec{x}_0) - m \cdot \vec{\Delta}| \leq |\vec{\Delta}| \cdot r(|\vec{\Delta}|) \text{ mit } r(|\vec{\Delta}|) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } \vec{\Delta} \rightarrow 0.$$

Name: $v = 'df(\vec{x}_0)'$ Ableitung von f im Punkt \vec{x}_0 . ($\Rightarrow a = f(x_0) - \langle \vec{v}, \vec{x}_0 \rangle$).

Beispiel

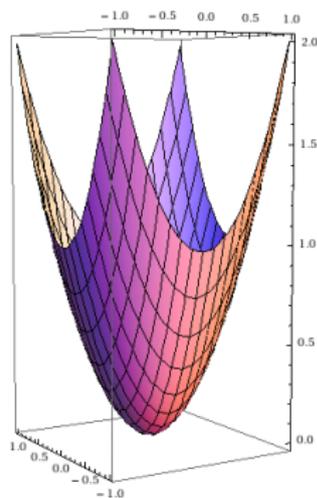
Rotationsparaboloid ($n = 2$): $f(\vec{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}_0 + \vec{\Delta}) &= f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y) \\
 &= x_0^2 + 2x_0\Delta_x + \Delta_x^2 + y_0^2 + 2y_0\Delta_y + \Delta_y^2 \\
 &= f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix} \right\rangle + |\vec{\Delta}|^2 \\
 &= f(\vec{x}_0) + \langle \vec{v}, \vec{\Delta} \rangle + |\vec{\Delta}|^2
 \end{aligned}$$

mit $\vec{v} := (2x_0, 2y_0) \in \mathbb{R}^2$. Folglich

$$|f(\vec{x} + \vec{\Delta}) - f(\vec{x}) - \langle \vec{v}, \vec{\Delta} \rangle| = |\vec{\Delta}|^2 = |\vec{\Delta}|r(|\vec{\Delta}|)$$

mit $r(|\vec{\Delta}|) := |\vec{\Delta}| \rightarrow 0$, falls $|\vec{\Delta}| \rightarrow 0$. \Rightarrow ist f diff'bar in $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ mit $df(\vec{x}_0) = (2x_0, 2y_0)$.



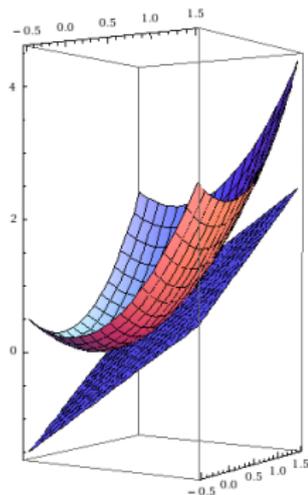
Beispiel (Forts.)

Rotationsparaboloid ($n = 2$): $f(\vec{x}) = f(x, y) = x^2 + y^2$
 Bestimmung der Tangente an f über Fußpunkt z.B. $\vec{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\mathbf{v} = (2x_0, 2y_0) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} a &= f(\vec{x}_0) - \langle \vec{v}, \vec{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) &= -\frac{1}{2} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x + y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Differenzierbarkeit von Abbildungen $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

Definition

Die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$ mit $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, ist

differenzierbar im Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann wenn jede der Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist.

Die Zeilenmatrix gebildet aus den Ableitungsvektoren der Komponentenfunktionen

$$\begin{pmatrix} df_1(\vec{x}) \\ df_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ df_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} =: d\vec{f}(\vec{x}_0)$$

heißt *totales Differential*, *Funktionalmatrix* oder *Ableitung* von \vec{f} im Punkt \vec{x}_0 .

Differenzierbarkeit von Abbildungen $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

Satz

Die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist genau dann differenzierbar in \vec{x}_0 mit Funktionalmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wenn

$$|\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta}) - \vec{f}(\vec{x}) - M \cdot \vec{\Delta}| = |\vec{\Delta}| r(|\vec{\Delta}|)$$

mit

$$r(|\vec{\Delta}|) \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } |\vec{\Delta}| \rightarrow 0.$$

Analysis II f. Ingenieure

7. Vorlesung 08.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz

Differenzierbare Abbildungen sind stetig.

Beweis

$$|f(\vec{x} + \vec{\Delta}) - f(\vec{x})| \leq |\langle df(\vec{x}), \vec{\Delta} \rangle| + |\vec{\Delta}|r(\Delta) \longrightarrow 0 \text{ für } \Delta \rightarrow \vec{0}.$$

Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. Bsp.: $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ stetig in $\vec{0}$ aber dort nicht diff'bar.

Richtungsableitung

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung.
Dann gilt

$$\vec{f}'(\vec{x})\vec{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{t}$$

für alle $\vec{x} \in G$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Ist \vec{v} ein Einheitsvektor, d.h. $|\vec{v}| = 1$, so heißt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) := \vec{f}'(\vec{x})\vec{v}$$

die Richtungsableitung von \vec{f} an der Stelle \vec{x} in Richtung \vec{v} .

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2$, $v = (1, 2)$

$$\begin{aligned} \vec{f}'(\vec{x})\vec{v} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + (y+2t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + 4yt + t^2 + 4t^2}{t} = 2x + 4y. \end{aligned}$$

Definition 35 (Partielle Ableitungen)

Die **partielle Ableitung** von $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle \vec{x} ist

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) := \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{e}_j}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - \vec{f}(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

Falls alle part. Ableitungen $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x})$, $j = 1, \dots, n$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ existieren heißt f dort *partiell differentierbar*.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x}_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + t^2}{t} = 2x \end{aligned}$$

Satz 36 (Bestimmung der Ableitungsmatrix aus partiellen Ableitungen)

Falls \vec{f} differenzierbar in \vec{x} , so ist \vec{f} auch partiell diffbar in \vec{x} und die Funktionalmatrix $f'(\vec{x}) = d\vec{f}(\vec{x})$ berechnet sich aus den partiellen Ableitungen gemäß:

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Satz 38 (Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit)

Existieren für $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ alle partiellen Ableitungen und sind diese als Funktionen auf in $\vec{x} \in G$ stetig so ist \vec{f} im Punkt \vec{x} differenzierbar.

Bemerkung: Alternative sprechweise: \vec{f} total differenzierbar.

Strategie zum Ableiten

- ▶ Stetig? Ja oder weiß nicht: weitermachen. Nein: Abbildung ist nicht differenzierbar (könnte aber partiell differenzierbar sein).
- ▶ Partielle Ableitungen bestimmen. Wenn das nicht geht: nicht differenzierbar.
- ▶ Partielle Ableitungen stetig?
 - ▶ Ja: Funktion ist differenzierbar, Ableitungsmatrix aus partiellen Ableitungen.
 - ▶ Nein: Fehlergrenzwert aus der Definition der Differenzierbarkeit untersuchen. Die Matrix A ist dabei durch die partiellen Ableitungen gegeben.

Beispiel 1: $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = 2x =: g(x, y)$$

$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto g(x, y) = 2x$ stetige Funktion ✓

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = 2y =: h(x, y)$$

$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto h(x, y) = 2y$ stetige Funktion ✓

$\Rightarrow f$ differenzierbar in jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $df(\vec{x}) = (2x, 2y)$.

Beispiel 2: $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) := \begin{cases} xy/\sqrt{x^2+y^2} & \text{f. } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{f. } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$

in $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =: g(x, y)$$

in $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Also z.B. für $\vec{x}_k = (1/k, 1/k) \rightarrow \vec{0}$

$$\begin{aligned} \lim_k \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_k) &= \lim_k g(\vec{x}_k) = \lim_k \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{k})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{k})^2}{2(\frac{1}{k})^2} \\ &= \lim_k \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\lim \vec{x}_k) \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Funktion $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ ist im Punkt $\vec{x} = \vec{0}$ nicht stetig, d.h. hinreichendes Kriterium nicht anwendbar.

Beispiel 2 (Forts.): $f(x, y) = xy / \sqrt{x^2 + y^2}$

Analog: in $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Behauptung: f ist tatsächlich nicht diffbar in $\vec{x} = \vec{0}$,
denn andernfalls muss also (nach Satz 36)

$$df(\vec{0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) \right) = (0, 0)$$

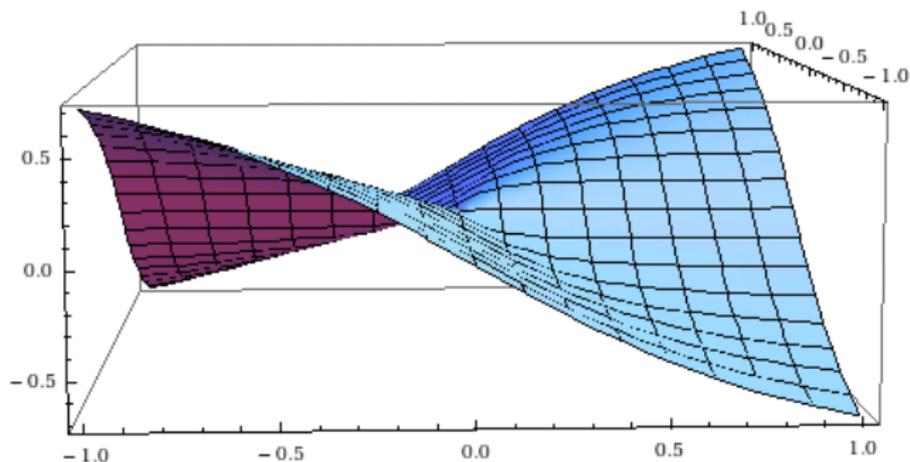
Sei nun z.B. $\vec{\Delta} = (\Delta, \Delta) \in \mathbb{R}^2$, dann

$$\begin{aligned} |f(\vec{0} + \vec{\Delta}) - f(\vec{0}) - \langle df(\vec{0}), \vec{\Delta} \rangle| &= |f(\vec{\Delta})| = |\Delta| \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= |\vec{\Delta}| r(\vec{\Delta}) \text{ mit } r(\vec{\Delta}) := 2 \not\rightarrow 0 \text{ f\"ur } \Delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist partiell differenzierbar in $\vec{x} = \vec{0}$ aber dort nicht (total) differenzierbar.

Beispiel 2 (Forts.): $f(x, y) = xy / \sqrt{x^2 + y^2}$

Funktionsgraph:



('Doppelknick') \rightsquigarrow keine Tangentialebene über $\vec{x} = \vec{0}$.

Analysis II f. Ingenieure

8. Vorlesung 11.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 40 (Gradient)

Der **Gradient** einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Ableitung $f'(\vec{x})$ interpretiert als Vektor oder, genauer, Vektorfeld:

$$\text{grad}_{\vec{x}} f := \nabla_{\vec{x}} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)^T$$

Gradient und Richtungsableitung

Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| = 1$, dann gilt für die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \text{grad}_{\vec{x}} f \cdot \vec{v} = |\text{grad}_{\vec{x}} f| \cos(\angle(\text{grad}_{\vec{x}} f, \vec{v}))$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + tv_1)^2 + (y + tv_2)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2txv_1 + t^2v_1^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2}{t} = 2xv_1 + 2yv_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Satz 41 (Bedeutung des Gradienten)

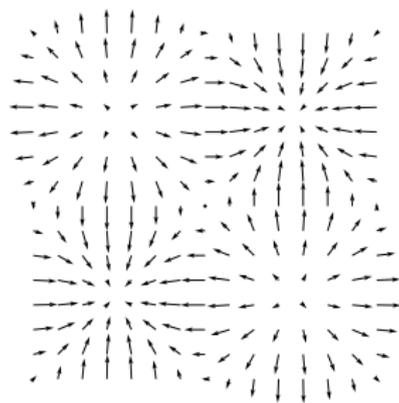
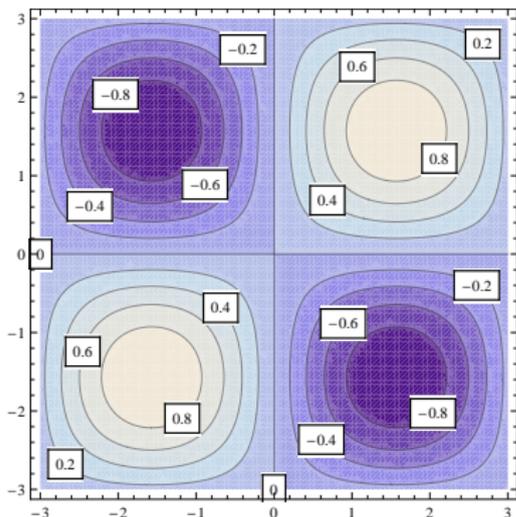
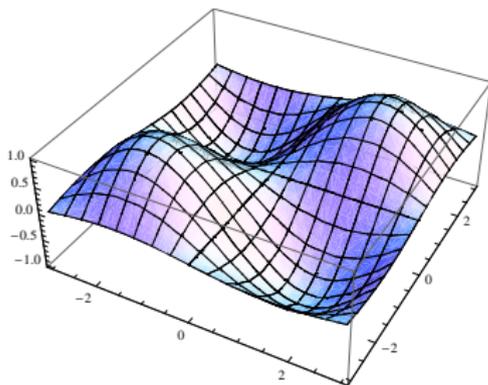
Der **Gradient** einer Funktion f (eines skalaren Feldes) weist in die **Richtung des stärksten Anstiegs** von f . Er steht **senkrecht auf den Niveaus** von f .

$$N_c := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = c \}$$

heißt das **c -Niveau** ($n = 2$: **Höhenlinie**, $n = 3$: **Niveaufläche**) von f , $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$$

$$\text{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$



Anwendungen des Gradienten (I)

- ▶ Kraft auf einen Ladungsträger im Elektrischen Potentialfeld

$$\mathbb{R}^d \ni \boldsymbol{p} \mapsto \varphi(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}$$

$$\vec{F}(\vec{p}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{p})$$

- ▶ Horizontale Geschwindigkeit eines ('überdämpften') Massekörpers in Höhenlandschaft $\mathbb{R}^d \ni \boldsymbol{p} \mapsto \varphi(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}$

$$\vec{v}(\vec{p}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{p})$$

- ▶ Flächennormale einer Fläche

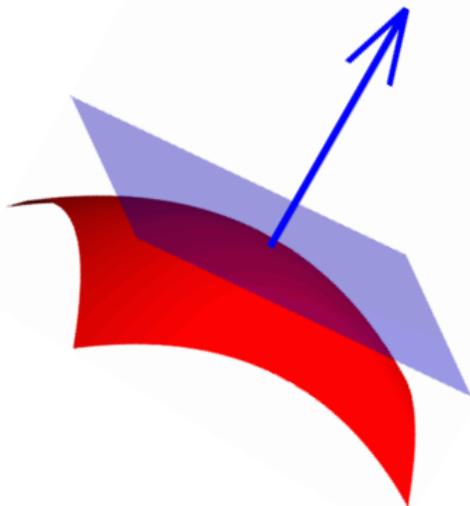
$$\mathcal{F} = \{\vec{z} = (x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1} \text{ im Punkt } z = (\boldsymbol{p}, \varphi(\boldsymbol{p}))$$

$$\nu_{\mathcal{F}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\boldsymbol{p})|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\varphi(\boldsymbol{p}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Illustration

$$\mathcal{F} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

$$\nu_{\mathcal{F}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(p)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\varphi(p) \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Anwendungen des Gradienten (II): Gradient und Messfehler

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \approx \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}'(\vec{x})\vec{\Delta x}$$

Beispiel 37: Daumenregel für Wirkung von (Mess-)Fehlern

- ▶ Messdaten $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit Fehlern $\vec{\Delta x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.
- ▶ Eine differenzierbare Formel $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ für eine interessante Größe.
- ▶ Daumenregel für die Auswirkung $\vec{\Delta f} = \vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) - \vec{f}(\vec{x})$ der Messfehler auf die interessante Größe \vec{f} :

$$\vec{\Delta f} \approx \vec{f}'(\vec{x})\vec{\Delta x} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x})\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x})\Delta x_n$$

Satz 58: Fehlerschrankensatz

$f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, G offen, $\vec{x}, \vec{y} \in G$ und ihre Verbindungsstrecke $\overline{\vec{x}\vec{y}} \subset G$. Existieren Schranken M_1, \dots, M_n , sodass für alle $\vec{z} \in \overline{\vec{x}\vec{y}}$ gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{z}) \right| \leq M_j.$$

Dann gilt

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq \sum_i M_i |x_i - y_i|.$$

Auswirkung von Messfehlern

$$|\Delta f| \leq \sum_i M_i |\Delta x_i|.$$

Analysis II f. Ingenieure

9. Vorlesung 15.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Summe und Skalarprodukt mit Konstanten

Seien $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $\vec{f} + \vec{g}$ und $c\vec{f}$ differenzierbar und $(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$, $(c\vec{f})' = c\vec{f}'$.

Produktregeln

- $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{g}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ diff.bar:

$$f\vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial f\vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \vec{g} + f \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$

- $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ diff.bar:

$$\vec{f} \cdot \vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial \vec{f} \cdot \vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \cdot \vec{g} + \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$

- $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ diff.bar:

$$\vec{f} \times \vec{g} \text{ diff.bar und } \frac{\partial \vec{f} \times \vec{g}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}$$

Satz 50 (Kettenregel mit partiellen Ableitungen)

$$\frac{\partial \vec{f} \circ \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{g}(\vec{x})) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x})$$

Satz 49 (Kettenregel mit Ableitungsmatrizen)

Hat man differenzierbare Abbildungen $\vec{g}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{f}: \mathbb{R}^m \supset \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^p$, so ist die **Komposition** $\vec{f} \circ \vec{g}$ dort wo sie definiert ist **differenzierbar** und

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) \vec{g}'(\vec{x})$$

Rechenregeln für den Gradienten

$$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g$$

$$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \text{ grad } g$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Analysis II f. Ingenieure

10. Vorlesung 18.11.10

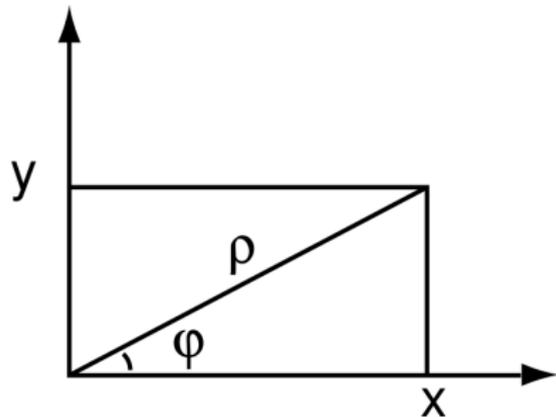
Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

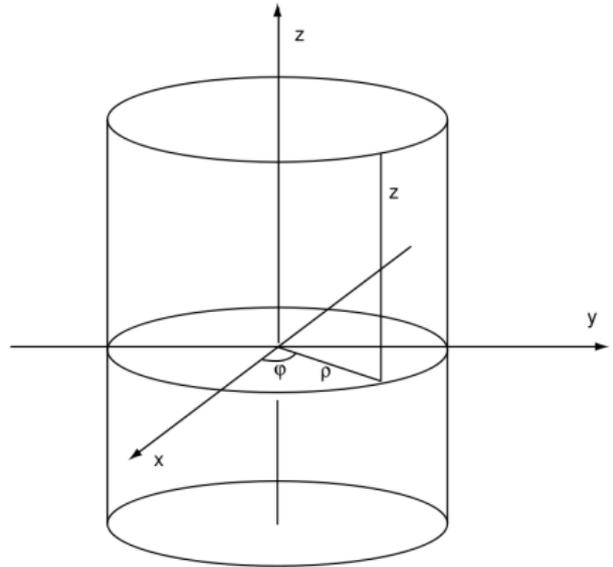
Ebene Polarkoordinaten

- ▶ Radius ρ , Winkel ϕ :
- ▶ $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$,
- ▶ $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi$, $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi$,
- ▶ $\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi$, $\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi$.
- ▶ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- ▶ $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$,
- ▶ $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}$.



Zylinderkoordinaten

- ▶ Radius ρ , Winkel ϕ , Höhe z :
- ▶ $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$.



Kugelkoordinaten

► Radius r , geographische Breite θ , Länge ϕ :

► $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$,

► $\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi$, $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi$,

► $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \phi$, $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \phi$, $\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi$,

► $\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta$, $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta$, $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$.

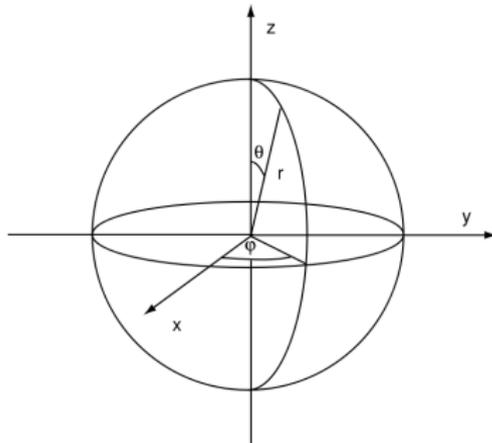
► $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

► $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$,

► $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}$,

$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r}$,

► $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.



Analysis II f. Ingenieure

11. Vorlesung 22.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Höhere Ableitungen

Definition 61

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$. Die **zweiten partiellen Ableitungen** von f sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}$$

falls $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ nach x_i partiell differenzierbar ist.

Satz von Schwarz

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Satz 62 (Taylorformel 2. Ordnung)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x} \in G$.
Dann gibt es ein $t \in]0, 1[$, sodass

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x} + t \overrightarrow{\Delta x}) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Es gilt darüber hinaus

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j + \text{Fehler}$$

$$f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) = \underbrace{f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j}_{\text{Taylorpolynom}} + \text{Fehler}$$

mit

$$\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow 0} \frac{\text{Fehler}}{|\overrightarrow{\Delta x}|^2} = 0.$$

Hesse-Matrix

Bezeichnung

Die Matrix

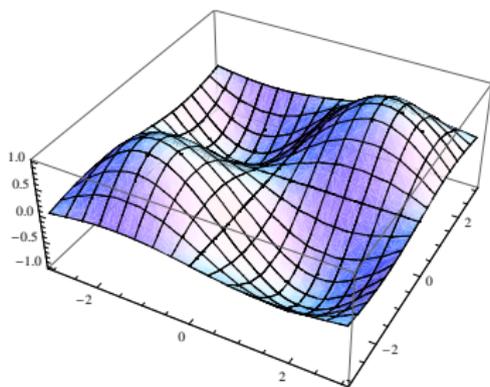
$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

wird auch **Hesse-Matrix** $\text{Hess}_{\vec{x}_0}(f)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (an der Stelle $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$) genannt.

Taylorformel 2.Ordnung – Kurzschreibweise

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta}) \approx f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{\Delta} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\Delta}, \text{Hess}_{\vec{x}}(f) \vec{\Delta} \rangle.$$

Beispiel: $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$



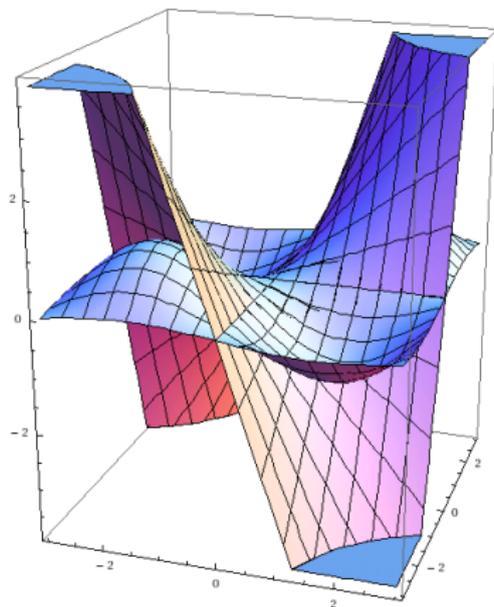
$$\text{grad}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & \sin(x) (-\sin(y)) \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.):

$$\vec{x}_0 = (0, 0),$$

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta}) \approx f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{\Delta} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\Delta}, \text{Hess}_{\vec{x}}(f) \vec{\Delta} \rangle = 0 + 0 + xy$$



12. Vorlesung 25.11.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition: Hessematrix

Die Matrix

$$\text{Hess}_{\vec{x}_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

heißt **Hessematrix** von f in \vec{x}_0 .

Definition: Hesseform

Die Abbildung

$$\text{hess}_{\vec{x}_0} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) := \langle \vec{u}, \text{Hess}_{\vec{x}_0} f \cdot \vec{u} \rangle$$

heißt **Hesseform** von f in \vec{x}_0 .

Satz 62 (Taylorformel 2. Ordnung)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar,

$\vec{x}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) \subset G$. Dann gibt es ein $t \in]0, 1[$, sodass

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x} + t\vec{\Delta x}) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Es gilt darüber hinaus

$$f(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = f(\vec{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j}_{\text{Taylorpolynom}} + \text{Fehler}$$

$\overbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \Delta x_i}^{\text{grad}_{\vec{x}} f \cdot \vec{\Delta x}}$
 $\overbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j}^{\vec{\Delta x}^T f''(\vec{x}) \vec{\Delta x}}$

mit

$$\lim_{\vec{\Delta x} \rightarrow 0} \frac{\text{Fehler}}{|\vec{\Delta x}|^2} = 0.$$

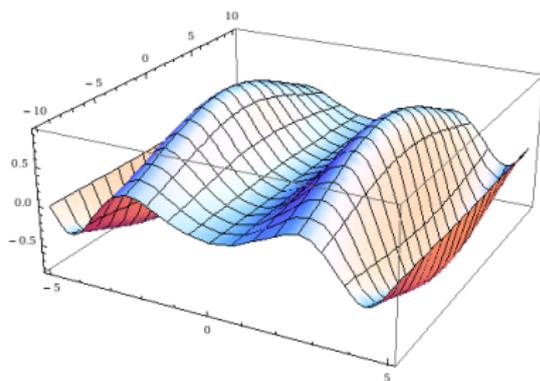
Definition (Extrema)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat f in $\vec{x}_0 \in G$ ein **lokales Maximum** (bzw. **Minimum**), wenn für alle $\vec{x} \in G$ in einer Umgebung von \vec{x}_0 gilt

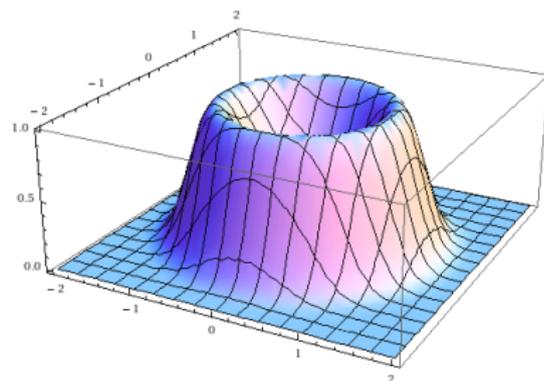
$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})).$$

Sie heißen **strikt**, falls man \geq durch $>$ (bzw. \leq durch $<$) für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ ersetzen kann, und **schwach** falls dies nicht möglich ist. Gelten die Ungleichungen auf ganz G so heißt das Extremum **global**.

Beispiele



2 strikt. glob. Max., 1 Sattelst.
 ∞ -viele strikt. lok. Max. und Min.



Ein strikt. lok. Min.
 ∞ -viele schw. lok. Max.

Notwendiges Kriterium

Satz 63 (notwendiges Kriterium, kritische Punkte)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f in einem inneren Punkt \vec{x}_0 von G ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann ist

$$\text{grad}_{\vec{x}_0} f = 0.$$

Punkte in denen der Gradient verschwindet heißen kritische Punkte.

Satz 64 (Lokale Extrema: hinreichendes Kriterium)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ **offen**, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\vec{x}_0 \in G$ und

$$\text{grad}_{\vec{x}_0} f = 0.$$

- (i) Gilt $\text{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) > \mathbf{0}$ für alle $\vec{u} \neq 0$, dann hat f in \vec{x}_0 ein striktes lokales Minimum.
- (ii) Gilt $\text{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u}) < \mathbf{0}$ für alle $\vec{u} \neq 0$, dann hat f in \vec{x}_0 ein striktes lokales Maximum.
- (iii) Wechselt $\text{hess}_{\vec{x}_0} f(\vec{u})$ für verschiedene \vec{u} das **Vorzeichen**, dann hat f in \vec{x}_0 kein lokales Extremum.
- (iv) Sonst liefert dieses Kriterium keine Auskunft.

Die Hesseform heißt im Fall (i) **positiv**, im Fall (ii) **negativ definit**, im Fall (iii) **indefinit** und in den Fällen (iv) **positiv** bzw. **negativ semidefinit**.

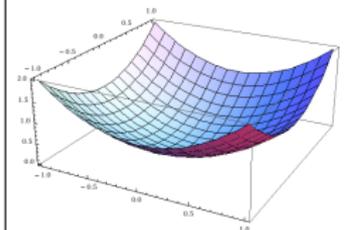
Bedeutung von pos. bzw. neg. bzw. in- definit

Beispiel: Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ setze $f(\vec{x}) = f(x, y) = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$.

Funktionsgraphen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

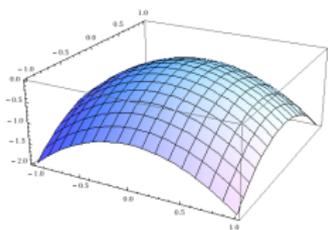
(pos. def.)



↪ *Minimum*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

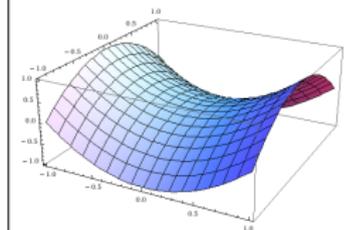
(neg. def.)



↪ *Maximum*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(indef.)



↪ *Sattel*

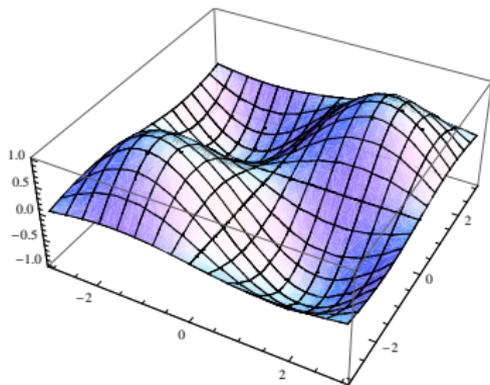
Satz 65 (Spezialfall 2 Variablen)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ **offen**, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $(x_0, y_0) \in G$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

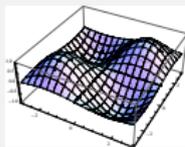
- (i) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein striktes **lokales Minimum**.
- (ii) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein striktes **lokales Maximum**.
- (iii) Wenn $\det(f''(x_0, y_0)) < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) **kein lokales Extremum**.

Beispiel: $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$



$$\text{grad}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}_{(x,y)} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & \sin(x) (-\sin(y)) \end{pmatrix}$$



Beispiel (Forts.): $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$

Kritische Punkte: $\vec{x} = (\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2l+1}{2}\pi)$ bzw. $\vec{x} = (k\pi, l\pi)$, $k, l \in \mathbb{N}$.

$$\det \text{Hess}_{(x,y)} f = \sin^2(x) \sin^2(y) - \cos^2(x) \cos^2(y)$$

In den kritischen Punkten

$$\det(\text{Hess}_{(x,y)} f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (x, y) = (\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2l+1}{2}\pi) \\ & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Extremstelle} \\ -1 & \text{falls } (x, y) = (k\pi, l\pi). \\ & \rightsquigarrow \text{Sattelstelle.} \end{cases}$$

Vorzeichenkriterium für $(\text{Hess}_{(x,y)} f)_{11} = -\sin(x) \sin(y)$

$$(\text{Hess}_{(x,y)} f)_{11} = \begin{cases} -1 & \text{für } (x, y) = ((2k + \frac{1}{2})\pi, (2l + \frac{1}{2})\pi) \text{ bzw.} \\ & (x, y) = ((2k + \frac{3}{2})\pi, (2l + \frac{3}{2})\pi) \\ & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Maximalstelle, sogar global} \\ +1 & \text{für } (x, y) = ((2k + \frac{1}{2})\pi, (2l + \frac{3}{2})\pi) \text{ bzw.} \\ & (x, y) = ((2k + \frac{3}{2})\pi, (2l + \frac{1}{2})\pi) \\ & \rightsquigarrow \text{lok. (strikt.) Minimalstelle, sogar global} \end{cases}$$

13. Vorlesung 29.11.10

Folien:

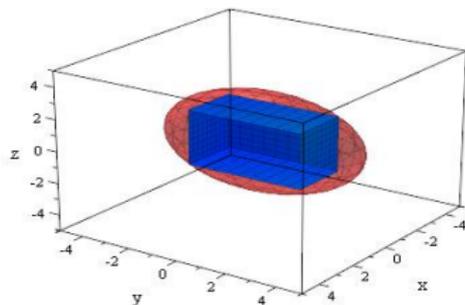
Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiel: Finde Volumen-maximalen Quader innerhalb des Ellipsoids

$$E = \left\{ \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Klar: Die acht Eckpunkte liegen am besten auf dem Rand von E .

↪ Teil-Problem im 1. Quadranten $\{x > 0, y > 0, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$:

Diagonal-Eckpunkt habe die Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$.

↪ Volumen-Funktion $f(x, y, z) = 8xyz$

↪ Nebenbedingung $g(x, y, z) \stackrel{!}{=} 0$ mit $g(x, y, z) = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1$

⇒ *Finde Maximum von f unter Nebenbedingung $\{g = 0\}$!*

Satz 69 (Lagrange–Methode)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ **offen**, $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Wenn f in $\vec{x} \in G$ ein **lokales Extremum** unter der **Nebenbedingung** $g = 0$ hat, dann

Fall 1: gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\text{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \text{grad}_{\vec{x}} g, \quad g(\vec{x}) = 0,$$

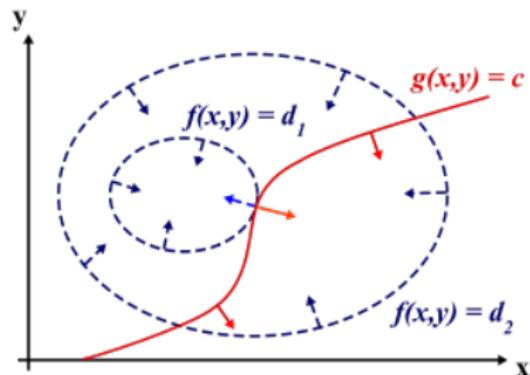
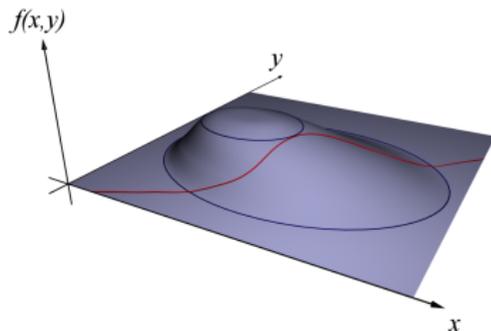
oder

Fall 2:

$$\text{grad}_{\vec{x}} g = 0, \quad g(\vec{x}) = 0.$$

Der Faktor λ aus Fall 1 heißt **Lagrange–Multiplikator**.

Geometrische Bedeutung



- ↪ Finde alle Niveaus $d \in \mathbb{R}$, so dass zugeh. Niveauline $\{f = d\}$ die Menge der zulässigen Punkte $\{g = c\}$ (tangential) berührt.
- ↪ Berührungspunkte = Kandidaten für lok. Extremstellen von f auf der Menge $\{g = c\}$.

Beispiel (Forts.) – Volumenmax. Quader in Ellipsoid

$$\nabla f(x, y, z) = 8 \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Notw. Bedingung für lok. Extrema \vec{x}_* : Es ex. $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \lambda \nabla f(\vec{x}_*) &= \nabla g(\vec{x}_*) \\ g(\vec{x}_*) &= 0 \end{aligned}$$

(Vier Gleichungen für vier Unbekannte x, y, z, λ .) Lösungen:

1. Fall: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$:

$$x_* = \sqrt{\frac{A}{3}}, y_* = \sqrt{\frac{B}{3}}, z_* = \sqrt{\frac{C}{3}}, \lambda = \frac{\sqrt{27}}{12\sqrt{A \cdot B \cdot C}}.$$

2. Fall: $z = 0, \lambda = 0$ und x, y bel. so dass $x^2/A + y^2/B = 1$

3. Fall: $y = 0, \lambda = 0$ und x, z bel. so dass $x^2/A + z^2/C = 1$

4. Fall: $x = 0, \lambda = 0$ und y, z bel. so dass $y^2/B + z^2/C = 1$

Vergleich: $f(\vec{x}_*) > 0$ in Fall 1 und $f(\vec{x}) = 0$ in Fällen 2 – 4.

⇒ Fall 1 liefert Maximum.

Zusammenfassung Extrema

$$f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}.$$

- ▶ f stetig und G kompakt, dann werden Maximum und Minimum auf G angenommen.
- ▶ Lokales Maximum / Minimum im Inneren von G erfüllt $\text{grad } f = 0$.
Typ des lokalen Extremums über 2. Ableitung.
- ▶ Auf dem Rand: auflösen, parametrisieren oder Lagrange-Methode.

14. Vorlesung 02.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 69 (Lagrange–Methode)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ **offen**, $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Wenn f in $\vec{x} \in G$ ein **lokales Extremum** unter der **Nebenbedingung $g = 0$** hat, dann

Fall 1: gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\text{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \text{grad}_{\vec{x}} g, \quad g(\vec{x}) = 0,$$

oder

Fall 2:

$$\text{grad}_{\vec{x}} g = 0, \quad g(\vec{x}) = 0.$$

Der Faktor λ aus Fall 1 heißt **Lagrange–Multiplikator**.

Bezeichnung

Falls einer der beiden Fälle in \vec{x} eintritt, heißt \vec{x} '**kritisch(-er Punkt)**'.

Alternative Formulierungen

Variante 2 (Bedingungen an $\text{grad } f$).

Ein Punkt \vec{x} mit $\mathbf{g}(\vec{x}) = \mathbf{0}$ heißt kritisch falls $\text{grad}_{\vec{x}} f = 0$ oder $\mu \text{grad}_{\vec{x}} f = \text{grad}_{\vec{x}} g$, für ein geeignetes $\mu \in \mathbb{R}$.

Variante 3 (Symmetrische Bedingungen an $\text{grad } f$ und $\text{grad } g$).

Ein Punkt \vec{x} mit $\mathbf{g}(\vec{x}) = \mathbf{0}$ heißt kritisch falls $\text{grad}_{\vec{x}} f = 0$ oder $\text{grad}_{\vec{x}} g = 0$ oder falls $\mu \text{grad}_{\vec{x}} f = \text{grad}_{\vec{x}} g$, für ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Variante 4 (Ohne Multiplikator.)

Ein Punkt \vec{x} mit $\mathbf{g}(\vec{x}) = \mathbf{0}$ heißt kritisch falls dort

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Alle diese Formulierungen sind äquivalent. Insbesondere ist der Zahlwert von λ bzw. μ irrelevant (vergl. Variante 4).

Beispiel

Gegeben: Punkt $\vec{q} = (2, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 + y^2$.

Gesucht: Minimaler Abstand von \vec{q} zum Funktionsgraphen von h .

\rightsquigarrow Zielfunktion (Quadrat des Abstands von (x, y, z) zu \vec{q})

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

und Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0.$$

Lagrange-Bedingung für krit. Punkte x_* : Es ex. ein $\lambda_* \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla g(\vec{x}_*) \quad \& \quad g(x_*) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-2) \\ 2(z-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad x^2 + y^2 = z$$

(Gleichungen (1)-(3) (zeilenweise) und (4).)

Division $\frac{(1)}{(3)} \rightsquigarrow \frac{x-2}{z-2} = -2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{2z-3}$; analog $\frac{(2)}{(3)} \rightsquigarrow y = \frac{2}{2z-3}$.

Einsetzen in (4) $\rightsquigarrow \left(\frac{2}{2z-3}\right)^2 + \left(\frac{2}{2z-3}\right)^2 = z \Leftrightarrow z(2z-3)^2 = 16$

Beispiel (Forts.)

Cardano-Formeln für Gleichung 3. Grades

$$\rightsquigarrow z_* = \frac{1}{2} \left(2 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3} \right) \approx 2.41$$

Rückeinsetzen für x, y

$$\rightsquigarrow x_* = y_* = \frac{2}{-1 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3}} \approx 1.098$$

Funktionswert von f an krit. Stelle \vec{x}_*

$$\begin{aligned} f(x_*, y_*, z_*) &= (x_* - 2)^2 + (y_* - 2)^2 + (z - 2)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(-2 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3} \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(2 - \frac{2}{-1 + (7 - 4\sqrt{3})^{1/3} + (7 + 4\sqrt{3})^{1/3}} \right)^2 \\ &\approx 1.76 \end{aligned}$$

(Bem.: λ_* kann aus x_* und (1) bestimmt werden, hier irrelevant.)

(x_*, λ_*) ist die einzige Lösung, d.h. \vec{x}_* ist der einzige kritische Punkt.

Wegen $f(x, y, z) \rightarrow \infty$ für $x, y, z \rightarrow \infty$ muss \vec{x}_* Minimalstelle sein.

Bemerkung zur Wahl der Funktion g

Beispiel: Finde Minimum der Funktion $f(x, y) = x(1 + y)$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus dem Einheitskreis $S_1(\vec{0}) \subset \mathbb{R}^2$.

Beachte: Unendlich viele Möglichkeiten, den Einheitskreis $S^1(\vec{0})$ als Null-Niveaumenge $\{g = 0\}$ einer Funktion darzustellen, z.B.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \text{oder} \quad \tilde{g}(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$$

↪ Mehrere Ansätze in der Lagrange-Methode möglich

Beispiel: (Lagrange-Ansatz mit g)

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla g(\vec{x}_*) \quad \& \quad g(\vec{x}_*) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \& \quad x^2 + y^2 = 1$$

Bestimmung der Lösungsmenge: Drei Paare von Lösungen (λ_*, \vec{x}_*) . ↪ drei kritische Stellen

$$\vec{x}_*^{(1)} = (0, 1), \quad \vec{x}_*^{(2)} = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right), \quad \vec{x}_*^{(3)} = \left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$$

Vergleich der Funktionswerte ↪ $\vec{x}_*^{(2)}$ Minimalstelle, $\vec{x}_*^{(3)}$ Maximalstelle.

Beispiel (Forts.): Selbe Aufgabe, doch diesmal Lagrange-Ansatz mit \tilde{g} :

$$\lambda_* \nabla f(\vec{x}_*) = \nabla \tilde{g}(\vec{x}_*) \quad \& \quad \tilde{g}(\vec{x}_*) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2+y^2-1)2x \\ (x^2+y^2-1)2y \end{pmatrix} \quad \& \quad (x^2+y^2-1)^2 = 0$$

Bestimmung der Lösungsmenge: Unendlich vielen Lösungen der Form

$$(\lambda_*, \vec{x}_*) = (0, \vec{x}), \quad \text{falls } \vec{x} \in S_1(\vec{0}) \text{ d.h. falls } x^2 + y^2 = 1.$$

Jeder zulässige Punkt $\vec{x} \in S_1(\vec{0})$ ist ein kritischer Punkt \vec{x}_* , d.h. insbesondere unendlich viele kritische Stellen. Vergleich aller zugeh. Funktionswerte (häufig) nicht durchführbar.) \rightsquigarrow Lagrange-Methode mit \tilde{g} liefert keinen Informationsgewinn!.)

Zur Verbesserung der Lagrange-Methode:

$$\rightsquigarrow \text{Wähle } g \text{ so, dass } \{\nabla g = \vec{0}\} \cap \{g = 0\} \text{ möglichst 'klein'!}$$

15. Vorlesung 06.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition (Klassische Differentialoperatoren)

- ▶ **Nabla:** $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$.
- ▶ **Gradient:** $\mathbf{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$.
- ▶ **Divergenz:** $\mathbf{div} \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$, $\vec{v}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Gilt $\mathbf{div} \vec{v} = 0$, so heißt \vec{v} **quell-** oder **divergenzfrei**.

- ▶ **Rotation:** $\mathbf{rot} \vec{v} := \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Gilt $\mathbf{rot} \vec{v} = 0$, so heißt \vec{v} **wirbel-** oder **rotationsfrei**.

Produktregeln

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{w}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\blacktriangleright \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f.$$

$$\blacktriangleright \operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \nabla \cdot \vec{v}.$$

$n = 3$:

$$\blacktriangleright \operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\nabla \times (f\vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f \nabla \times \vec{v}$$

$$\blacktriangleright \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = (\operatorname{rot} \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}$$

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w})$$

Physikalische Bedeutung der Divergenz

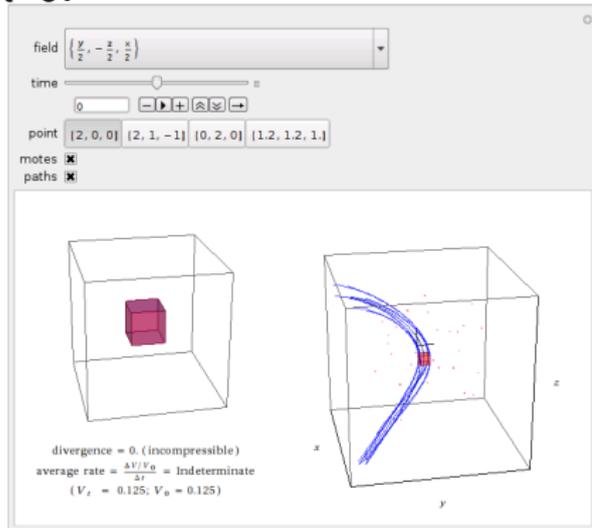
- ▶ Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
= Geschwindigkeitsfeld einer (stationären) Strömung.
- ▶ Zu $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sei $Q_h(\vec{x})$ Würfel mit Kantenlänge $h > 0$ und Mittelpunkt \vec{x} .
- ▶ Für $t \geq 0$ sei $Q_h(\vec{x}, t)$ die 'Blase', die durch Fließen von $Q_h(\vec{x})$ mit der Strömung entstanden ist.
- ▶ Dann ist

$$\operatorname{div}(\vec{v})(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\operatorname{Vol}(Q_h(\vec{x}, t)) - \operatorname{Vol}(Q_h(\vec{x}))}{\operatorname{Vol}(Q_h(\vec{x}))}$$

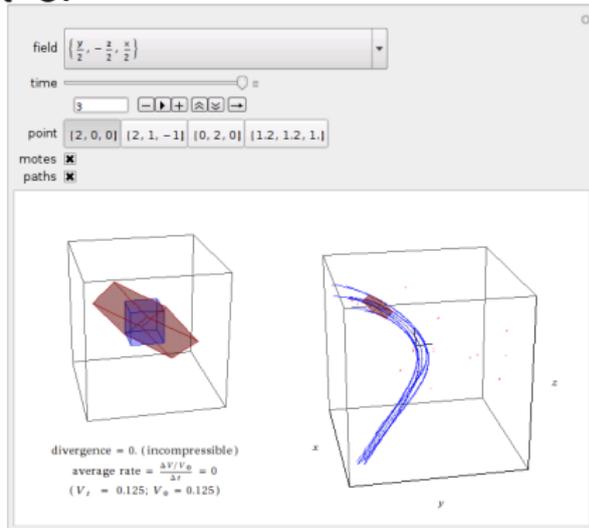
\rightsquigarrow Divergenz = Relative Volumenänderung von Volumenelementen die gemäß Geschwindigkeitsfeld \vec{v} durch den Raum strömen.

Beispiel

t=0:



t=3:



Quelle: <http://demonstrations.wolfram.com/ExpansionAndDivergence/>

16. Vorlesung 09.12.10

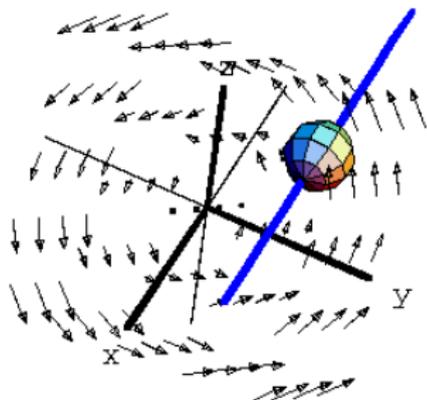
Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Physikalische Bedeutung der Rotation

- ▶ Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 =$
Geschwindigkeitsfeld einer
Strömung
- ▶ Gegeben: Position \vec{x} im
Strömungsfeld
 \vec{a} Einheits-Richtungsvektor
- ▶ $B_h(\vec{x}) =$ (Masseloser) Testballon,
Radius h , Mittelpunkt \vec{x} ,
Drehachse \vec{a}
- ▶ Reibung an der Oberfläche von B
 \rightsquigarrow B rotiert .



$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Drehfrequenz von } B_r(\vec{x})}{\text{Oberfläche von } B_r(\vec{x})} = \langle \text{rot } v(\vec{x}), \vec{a} \rangle.$$

Kanonische Zerlegung von (Ableitungs-) Matrizen

Matrix-Fall. Gegeben $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A^* + A^\#$$

Mit A^* symmetrisch und $(A^\#)^T = -A^\#$ antisymmetrisch
 $\rightsquigarrow A^\# \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$

Vektorfeld-Fall. Gegeben $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$du(\vec{x}) = \frac{1}{2}(du + du^T) + \frac{1}{2}(du - du^T) = du^* + du^\#$$

Mit du^* symmetrisch und $(du^\#)^T = -du^\#$ antisymmetrisch
 $\rightsquigarrow \boxed{du^\# \vec{x} = \text{rot}(\vec{u}) \times \vec{x}}$

Quellenfrei und Wirbelfrei

Definition

- ▶ $\vec{v} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ 'quellenfrei' (oder auch 'inkompressibel'), falls
$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$
- ▶ $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ 'wirbelfrei', falls
$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$$

Beispiele: $\vec{v} = \operatorname{rot}(\vec{u})$ quellenfrei und $\vec{v} = \nabla\phi$ wirbelfrei.

Satz. (Kanonische Zerlegung von Vektorfeldern)

Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar. Dann existieren ein $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und ein quellenfreies $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\vec{u} = \nabla\phi + \vec{v}$$

Kanonische Zerlegung von Vektorfeldern (Forts.)

Eigenschaften der Kanon. Zerlegung

Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar s.d.

$$\vec{u} = \nabla\phi + \vec{v}$$

mit $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ quellfrei.

- ▶ $du^* = \nabla^2\phi$; $du^\# \vec{x} = \text{rot}(\vec{v}) \times \vec{x}$.
- ▶ $\text{div } \vec{u} = \text{div}(\nabla\phi)$ und $\text{rot}(\vec{u}) = \text{rot}(\vec{v})$.
- ▶ $\nabla\phi$ heißt 'Quellanteil' von \vec{u} .
- ▶ \vec{v} heißt 'Wirbelanteil' von \vec{u} .

Anwendungen von grad, div, rot in der Technik

- ▶ Kraft auf Punktladung e in \vec{x} in elektr. Potentialfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\text{grad}_{\vec{x}}\phi$$

- ▶ Änderungsrate für Dichteverteilung $\vec{x} \mapsto \rho(t, \mathbf{x})$ durch Strömung

$$\dot{\rho}(\vec{x}) = -\text{div}(\rho\vec{v})(\vec{x})$$

- ▶ Magnetfeld induziert von Ladungsfluss \vec{j}

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{j})$$

Grad, Div, Rot in anderen Koordinaten

Beispiel Zylinderkoordinaten

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z,$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} v_\rho,$$

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} v_\phi \right) \vec{e}_z,$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Analysis II f. Ingenieure

17. Vorlesung 13.12.10

Folien:

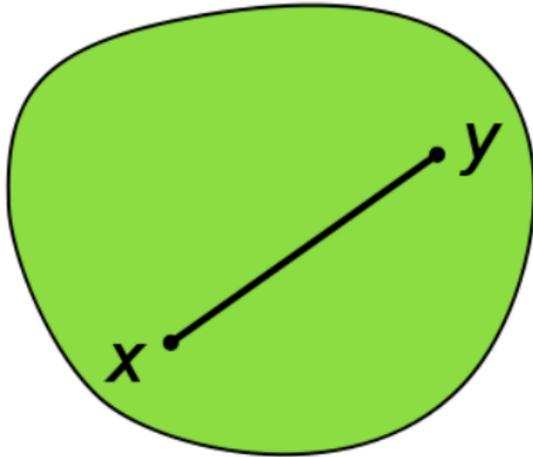
Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

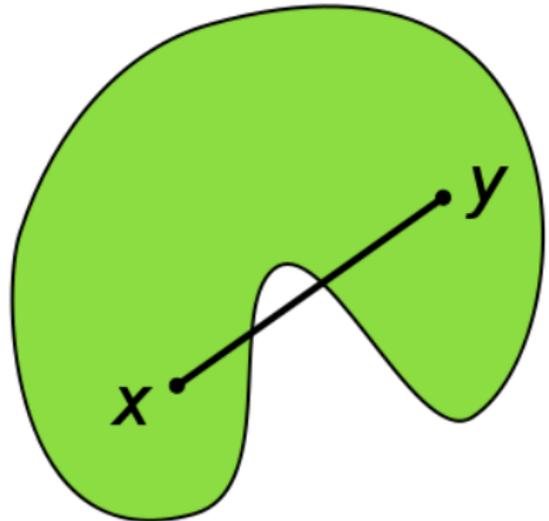
13. Dezember 2010

Konvexe Mengen

Konvex

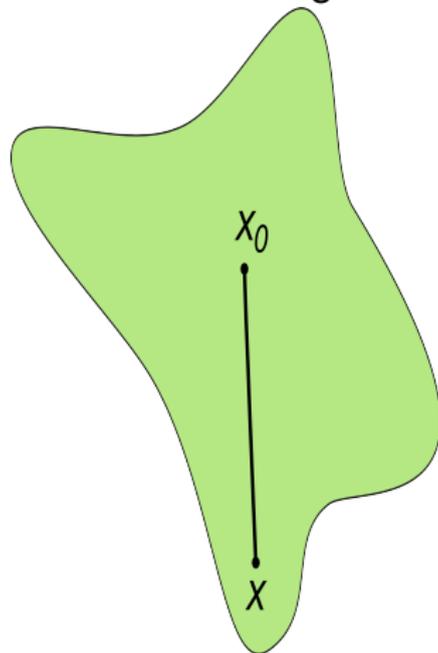


Nicht konvex

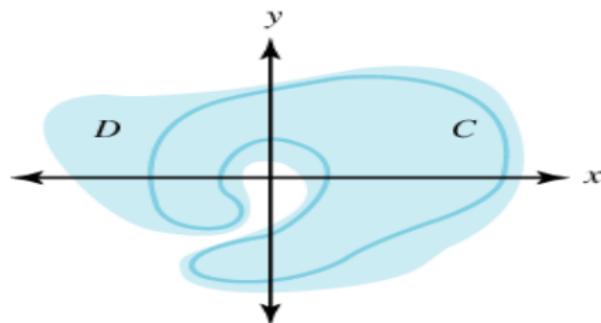


Sternförmig und Einfach-Zusammenhängend

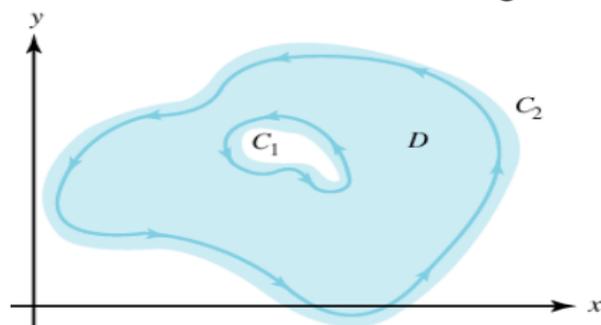
Sternförmig



Einf. Zusammenhängend



Nicht Einf. Zusammenhängend



Beobachtung

Sei $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar.
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0.$

Definition (Vektorpotential)

Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Ein Vektorfeld $\vec{w}: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v},$$

heißt **Vektorpotential** von \vec{v} .

Satz 92

G offen, $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar:

\vec{v} besitzt Vektorpotential $\implies \operatorname{div} \vec{v} = 0$
 \iff und G konvex (sternförmig, einfach zusammenhängend)

Kanonische Zerlegung eines Vektorfelds (Teil II)

Satz. (Kanonische Zerlegung von Vektorfeldern)

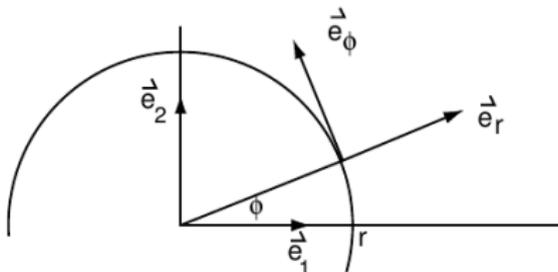
Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar und für ein geeignetes $R > 0$ gelte $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $|\vec{x}| \geq R$.

Dann existieren ein $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und ein $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{w}$$

Differentiation in Nicht-Euklidischen Koordinaten

Beispiel Polarkoordinaten



► $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Differentialoperatoren in Polarkoordinaten

► $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

► $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho} \sin \phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \cos \phi.$$

► $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$,

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} v_\rho, \quad \vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\phi \vec{e}_\phi$$

- Ähnliche Formeln in Zylinder- und Kugelkoordinaten im Skript (dann auch Formeln für die Rotation).

Der Laplace-Operator

Definition: Laplace-Operator

$$\Delta \mathbf{u} := \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_n^2}$$

Anwendungen in der Technik

- ▶ Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

- ▶ Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \lambda \Delta \mathbf{u}$$

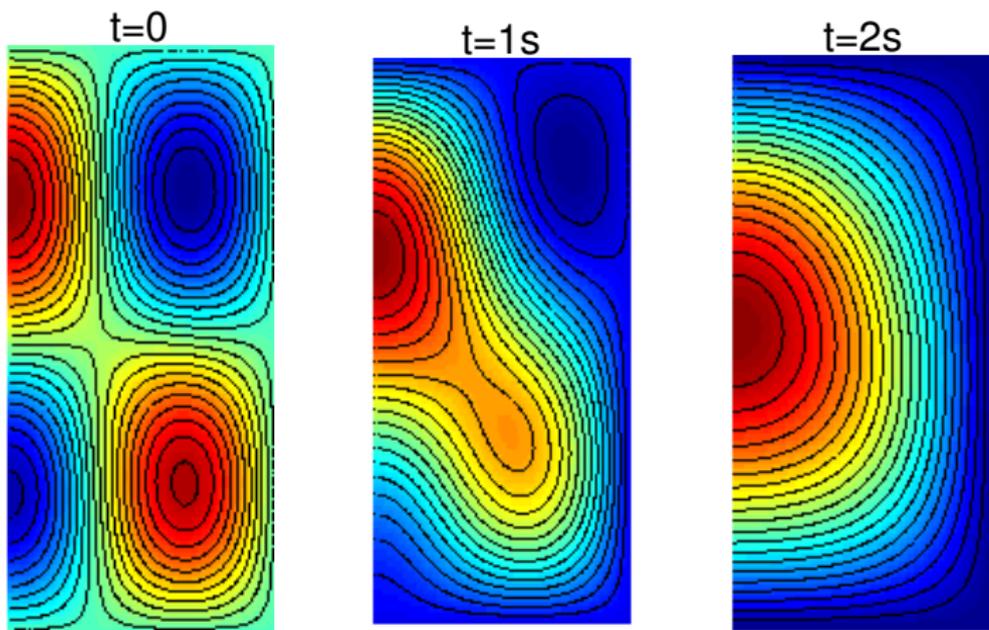
- ▶ Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta \phi = -\rho.$$

(Elektrisches Feld ϕ induziert von Raumladungsdichte ρ)

Beispiel Wärmeausbreitung

Rechteckige Platte, linke Kante isoliert, alle anderen Kanten auf 0 Grad Celsius.



Analysis II f. Ingenieure

17. Vorlesung 13.12.10

Folien:

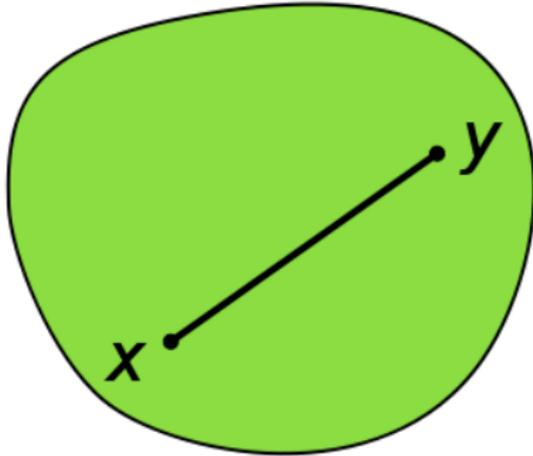
Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

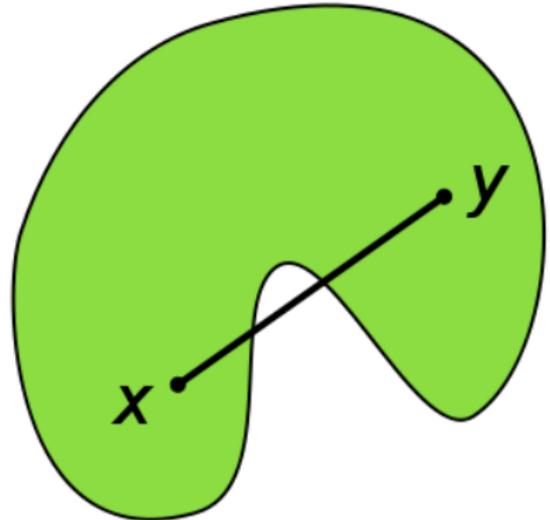
13. Dezember 2010

Konvexe Mengen

Konvex

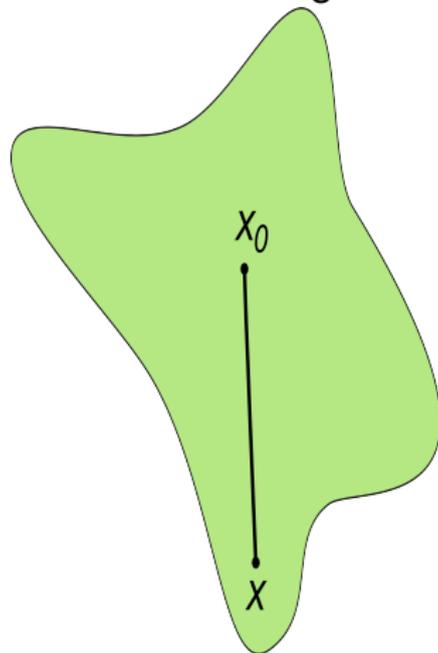


Nicht konvex

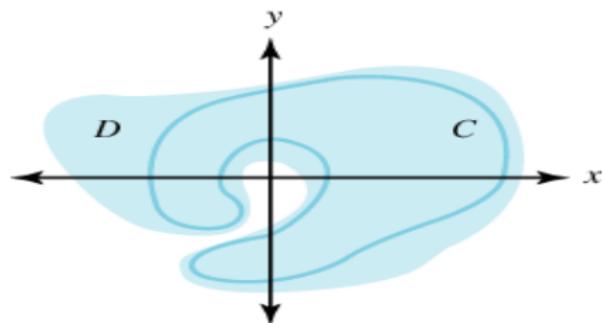


Sternförmig und Einfach-Zusammenhängend

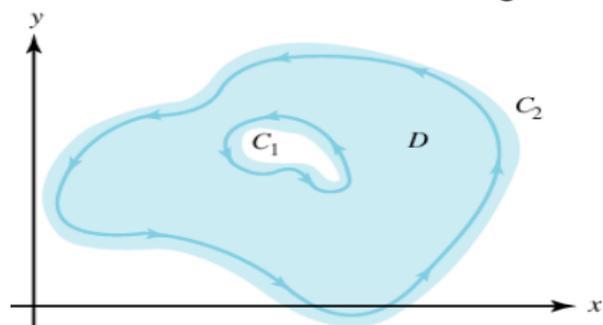
Sternförmig



Einf. Zusammenhängend



Nicht Einf. Zusammenhängend



Beobachtung

Sei $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig partiell differenzierbar.
 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0.$

Definition (Vektorpotential)

Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Ein Vektorfeld $\vec{w}: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v},$$

heißt **Vektorpotential** von \vec{v} .

Satz 92

G offen, $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar:

\vec{v} besitzt Vektorpotential $\iff \operatorname{div} \vec{v} = 0$
 \iff und G konvex (sternförmig, einfach zusammenhängend)

Kanonische Zerlegung eines Vektorfelds (Teil II)

Satz. (Kanonische Zerlegung von Vektorfeldern)

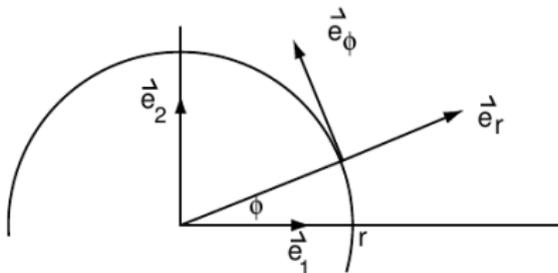
Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zwei Mal stetig differenzierbar und für ein geeignetes $R > 0$ gelte $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $|\vec{x}| \geq R$.

Dann existieren ein $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ und ein $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, s.d.

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{w}$$

Differentiation in Nicht-Euklidischen Koordinaten

Beispiel Polarkoordinaten



► $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Differentialoperatoren in Polarkoordinaten

► $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

► $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi$,

$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \phi$,

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho} \sin \phi$,

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \cos \phi$.

► $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$,

$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} v_\rho$, $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\phi \vec{e}_\phi$

- Ähnliche Formeln in Zylinder- und Kugelkoordinaten im Skript (dann auch Formeln für die Rotation).

Der Laplace-Operator

Definition: Laplace-Operator

$$\Delta \mathbf{u} := \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_n^2}$$

Anwendungen in der Technik

- ▶ Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

- ▶ Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \lambda \Delta \mathbf{u}$$

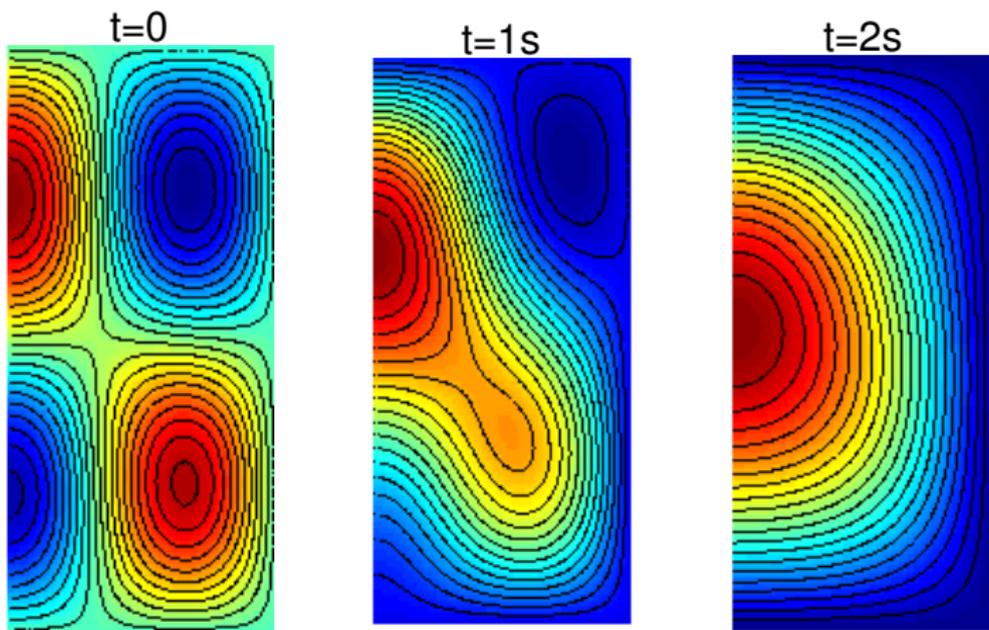
- ▶ Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta \phi = -\rho.$$

(Elektrisches Feld ϕ induziert von Raumladungsdichte ρ)

Beispiel Wärmeausbreitung

Rechteckige Platte, linke Kante isoliert, alle anderen Kanten auf 0 Grad Celsius.



Analysis II f. Ingenieure

18. Vorlesung 16.12.10

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 99 (Kurvenintegral von Vektorfeldern)

Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}: [a, b] \rightarrow G$ definiert man das **Kurvenintegral** durch

$$\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \underbrace{\dot{\vec{x}}(t) dt}_{=: d\vec{s}}.$$

Das Kurvenintegral **hängt nur von der Kurve ab** und nicht davon, wie sie durchlaufen wird. Nur das Vorzeichen ändert sich, wenn man die Durchlaufrichtung ändert.

Beispiel

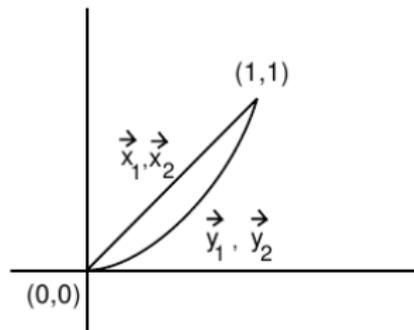
Beispiel 106. Sei $\vec{F}(x, y) = (x^2y, x + y)$.

Wir betrachten vier Kurven zwischen $(0, 0)$ und $(1, 1)$, nämlich

$$\vec{x}_1(t) := (t, t), \quad \vec{x}_2(t) := (1 - t, 1 - t),$$

$$\vec{y}_1(t) := (t, t^2), \quad \vec{y}_2(t) := (\sqrt{t}, t)$$

für $0 \leq t \leq 1$.



Satz 103

Falls $\vec{x}: [a, b] \rightarrow G$ und

$$\vec{F} = -\text{grad } u$$

so gilt

$$\int_{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = u(\vec{x}(a)) - u(\vec{x}(b)).$$

Das Kurvenintegral von Potential- bzw. konservativen Feldern ist insbesondere **wegunabhängig**, d.h., es hängt nur von **Anfangs-** und **Endpunkt** der Kurve \vec{x} ab.

Satz 104

Sind **alle Kurvenintegrale** eines Vektorfeldes **wegunabhängig**, so ist das Vektorfeld ein **Potentialfeld**.

Definition (Kurvenintegral von skalaren Funktionen)

Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}: [a, b] \rightarrow G$ definiert man das **Kurvenintegral** durch

$$\int_{\vec{x}} f ds := \int_a^b f(\vec{x}(t)) \underbrace{|\dot{\vec{x}}(t)|}_{=: ds} dt.$$

Das Kurvenintegral **hängt nur von der Kurve ab** und nicht davon, wie sie durchlaufen wird.

Satz (Bogenlänge einer Kurve)

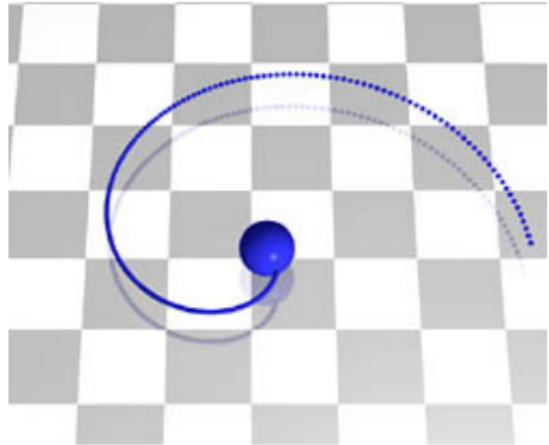
Für eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{x}: [a, b] \rightarrow G$ ist die **Bogenlänge gegeben** durch

$$L(\vec{x}) = \int_{\vec{x}} 1 ds := \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)| dt$$

Beispiel: Archimedische Spirale

$$\vec{x}(t) = r(1-t) \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

$$t \in [0, 1]$$



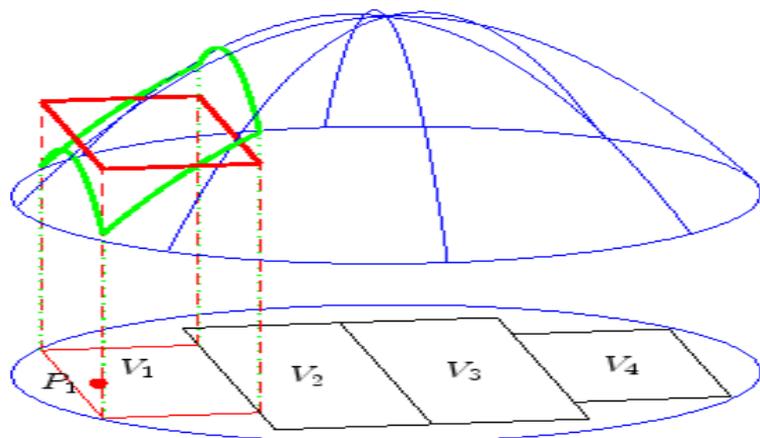
19. & 20. Vorlesung 03.& 06.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Mehrdimensionale Integration



Definition

$$\iint_P f(x, y) dx dy := \lim_{\max_i \|V_i\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M f(x_{V_i}, y_{V_i}) \text{Vol}(V_i)$$

Warnung: Existiert nicht immer! **Entwarnung:** Existiert, falls f nicht 'sehr unstetig' und falls P nicht 'sehr krummlinig'.

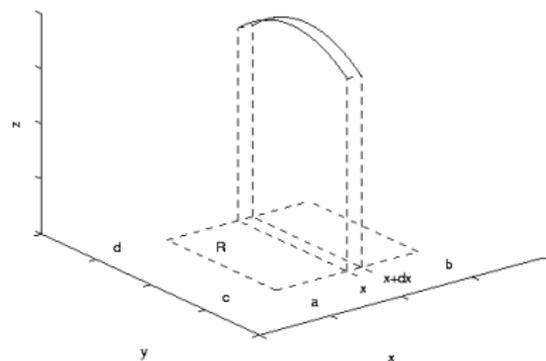
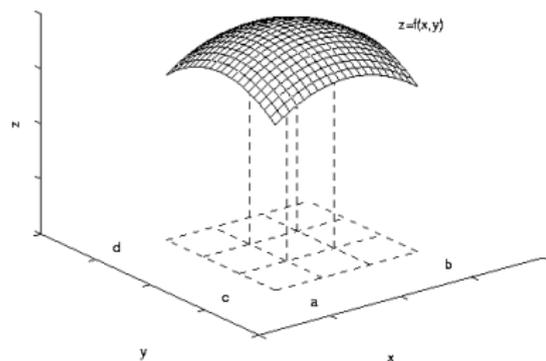
$$dF := dx dy \quad dV := dx dy dz$$

Satz (Elementare Eigenschaften)

- ▶ $\iint_B f(x, y) + g(x, y) dF = \iint_B f(x, y) dF + \iint_B g(x, y) dF.$
- ▶ $\iint_B \lambda f(x, y) dF = \lambda \iint_B f(x, y) dF$, falls $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant.
- ▶ $\iint_B f(x, y) dF \leq \iint_B g(x, y) dF$, falls $f \leq g$.
- ▶ $\left| \iint_B f(x, y) dF \right| \leq \iint_B |f(x, y)| dF.$
- ▶ $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ enthalten in endlich vielen glatten Kurven:

$$\iint_B f(x, y) dF = \iint_{B_1} f(x, y) dF + \iint_{B_2} f(x, y) dF.$$
- ▶ In 3D, 4D alles analog ...

Berechnung durch Mehrfach-Integration



↪ Berechnung durch Summation von Querschnittsflächen

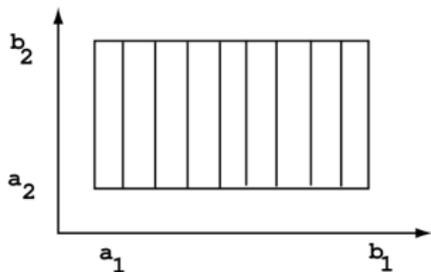
Beispiel in 2D: Rechteck

Sei

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iint_R f(x, y) dF = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$



Satz 112 (Mehrfach-Integration 2D)

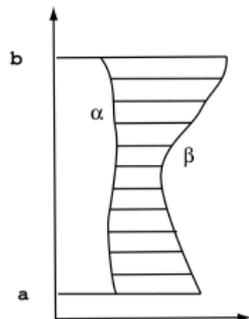
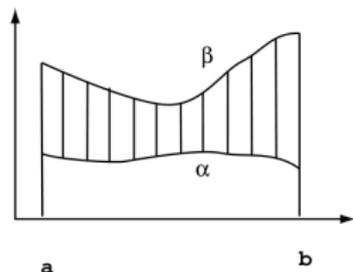
Seien $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$,

$$B = \{ (x, y) \mid x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iint_B f(x, y) dF = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Durch **Vertauschen der Variablen** kann man auch in x -Richtung krummlinig begrenzte **Normalbereiche** integrieren. Andere Bereiche muss man **zerlegen**.



Satz 115 (Mehrfach-Integration 3D)

Seien $B^* \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $\alpha, \beta: B^* \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $\alpha \leq \beta$,

$$B = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B^*, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \}$$

und $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig dann gilt:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_{B^*} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dF.$$

Durch **Vertauschen der Variablen** kann man auch andere **Normalbereiche** integrieren. Andere Bereiche muss man **zerlegen**.

21. & 22. Vorlesung 10.& 13.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 119 (Transformationsformel 2D)

Seien $B, R \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$\vec{x} = (x, y): R \rightarrow B, \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

eine stetig partiell differenzierbare, **surjektive** und (mit Ausnahme von Randpunkten) **injektive** Abbildung – eine **Koordinatentransformation**.
Dann gilt

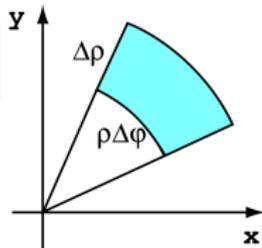
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{|\det(\vec{x}'(u, v))|}_{dF} du dv$$

dF wird **Flächenelement** in den Koordinaten (u, v) genannt.

Satz 122 (Integration in Polarkoordinaten)

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi), \quad dF = \rho d\rho d\phi,$$

$$\rho \in [0, \infty[, \quad \phi \in [0, 2\pi].$$



Satz 125 (Transformationformel 3D)

Seien $B, R \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$\vec{x} = (x, y, z): R \rightarrow B, \quad (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

eine stetig partiell differenzierbare, **surjektive** und (mit Ausnahme von Randpunkten) **injektive** Abbildung – eine **Koordinatentransformation**.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_R f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \underbrace{|\det(\vec{x}'(u, v, w))|}_{dV} du dv dw \end{aligned}$$

Transformationsformel als Merkregel

Gegeben: $B \subset \mathbb{R}^d$ (Integrationsbereich), $f : B \mapsto \mathbb{R}$ eine (Integrand).

Ferner: Reparametrisierung (Koordinatentransformation) $\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$, d.h.

$$\mathbb{R}^d \supset B \ni \vec{x} \longleftrightarrow \vec{y} \in \tilde{B} \subset \mathbb{R}^d$$

Dann gilt

$$\iiint_B f(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_N = \iint_{\tilde{B}} \tilde{f}(\vec{y}) \left| \frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} \right| dy_1 \cdots dy_N$$

mit

$$\tilde{f}(y_1, \dots, y_N) := f(\vec{x}(y_1, \dots, y_N))$$

und

$$\left| \frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} \right| := \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix} \right|$$

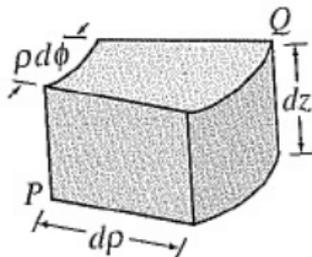
'Volumenelement' der Koordinaten $x \leftrightarrow y$

Volumenelement dV in den neuen Koordinaten $x \leftrightarrow y$

$$dV = dx_1 \cdots dx_N \stackrel{\wedge}{=} \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix} \right| dy_1 \cdots dy_N$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten $(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \phi, z)$:

$$dx dy dz \stackrel{\wedge}{=} \rho d\rho d\phi dz$$



Beispiele: Spezielle Koordinatensysteme in 3D (I)

Integration in Zylinderkoordinaten

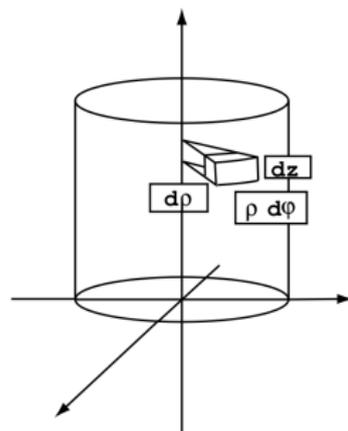
$$x = \rho \cos(\phi),$$

$$y = \rho \sin(\phi),$$

$$z = z,$$

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\rho \in [0, \infty[, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$



Tafelbeispiel: Berechnung des Volumens des Schraubenkörpers (s. Vorlesung)

Beispiele: Spezielle Koordinatensysteme in 3D (II)

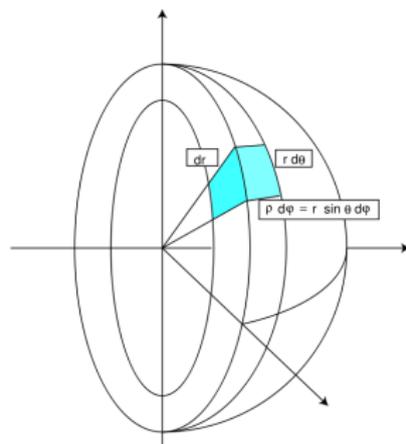
Integration in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad dV = r^2 \sin(\theta) dr d\phi d\theta$$

$$z = r \cos(\theta),$$

$$r \in [0, \infty[, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi].$$



Tafelbeispiel: Berechnung des Kugelvolumens (s. Vorlesung)

23. & 24. Vorlesung 17.& 20.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Definition 129 (parametrisierte Fläche)

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$. Eine stetig partiell differenzierbare, **surjektive** und (mit Ausnahme von Randpunkten) **injektive** Abbildung

$$\vec{x}: B \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{mit der Eigenschaft} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$$

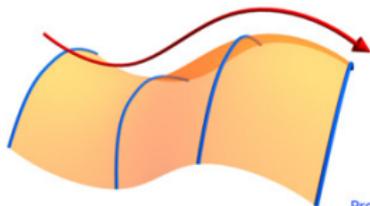
(außer in Bandpunkten)

heißt **Parametrisierung**. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ nennt man **Fläche**, wenn es für \mathcal{F} eine solche Parametrisierung gibt.

Veranschaulichung

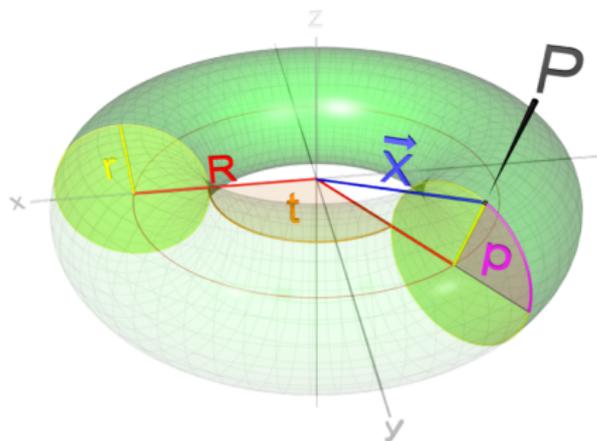
\mathcal{F} ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 , die mit einem 2D-krummlinigen Koordinatensystem \vec{x} , d.h.

$$\mathbb{R}^2 \supset B \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{x}(u, v) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$$



beschrieben werden kann.

Beispiel – Torusfläche



Parametrisierung: $B = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$\vec{x}(t, p) = \begin{pmatrix} x(t, p) \\ y(t, p) \\ z(t, p) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \cdot \cos p \\ \sin t \cdot \cos p \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos p) \cos t \\ (R + r \cos(p)) \sin t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es gibt (unendlich viele) andere Parametrisierungen.

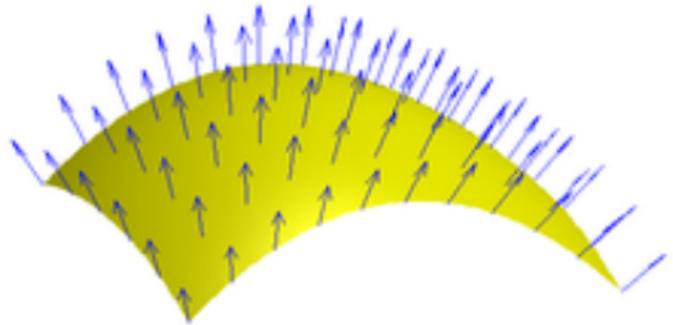
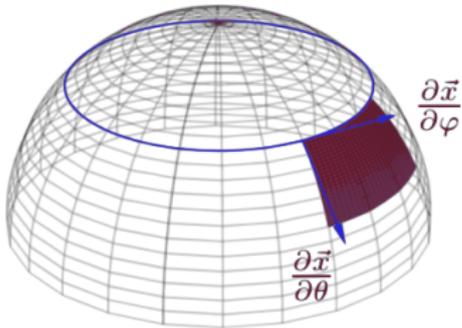
Vektoriell und Skalares Flächenelement

Definition Vektoriell Oberflächenelement

Das **vektorielle Oberflächenelement** der Parametrisierung $\vec{x}: B \rightarrow \mathcal{F}$ ist

$$d\vec{O} := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} du dv$$

Geometrische Bedeutung: $\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \rightsquigarrow$ **Flächennormalenvektor**



Länge $|\vec{n}| \rightsquigarrow$ **Flächeninhalt** eines in finitesimalen Flächenstücks.

Vektorieller und Skalares Flächenelement

(Skalares) Oberflächenelement

Das **skalare Oberflächenelement** der Parametrisierung $\vec{x}: B \rightarrow \mathcal{F}$ ist

$$dO := \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv$$

Formaler Zusammenhang zw. Vektorieller und Skalarem Flächenelement

$$dO = |d\vec{O}|$$

Beispiel (Forts) – Torus

Flächennormalenvektor

$$\vec{n} = \frac{d\vec{X}}{dt} \times \frac{d\vec{X}}{dp} = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \cos(p) \\ \sin(t) \cdot \cos(p) \\ \sin(p) \end{pmatrix} \cdot r \cdot (r \cdot \cos(p) + R)$$

Skalares Flächenelement

$$dA = |\vec{n}| \cdot dt \cdot dp = r \cdot (r \cdot \cos(p) + R) \cdot dt \cdot dp$$

Definition 132 (Skalares Oberflächenintegral)

Sei $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige skalare Funktion, dann wird das skalare Oberflächenintegral von f über \mathcal{F} folgendermaßen definiert:

$$\iint_{\mathcal{F}} f dO := \iint_{\vec{x}} f dO := \iint_B f(\vec{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv.$$

Wichtiger Spezialfall: $f(\vec{x}) = 1 = \text{const.}$

$$\iint_{\mathcal{F}} 1 dO = \text{Flächeninhalt der Fläche } \mathcal{F}$$

Beispiel (Forts) Torusfläche

1) Bestimmung des Flächeninhalts:

$$\iint_{\mathcal{F}} 1 dO = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos(\phi)) dt d\phi = 4\pi^2 R \cdot r.$$

2) Bestimmung des Trägheitsmoments bei Rotation um die z-Achse:

$$T_z^{\mathcal{F}} := \iint_{\mathcal{F}} f dO \text{ mit } f(\vec{x}) = f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

Berechnung des Integrals:

$$f(\vec{x}(t, \phi)) = x^2(t, \phi) + y^2(t, \phi) = (R + r \cos(\phi))^2$$

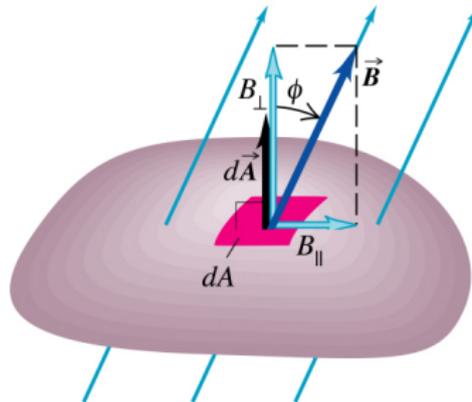
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} 1 f dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r \cos(\phi))^2 \cdot r(R + r \cos(\phi)) dt d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos(\phi))^3 dt d\phi = 2\pi^2 r^2 \cdot R \left(\frac{3}{4} r^2 + R^2 \right) \end{aligned}$$

Definition 136 (Flussintegral)

Sei \vec{v} ein stetiges Vektorfeld auf \mathcal{F} . Dann wird das **Integral** oder **Flussintegral** von \vec{v} über \mathcal{F} folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{O} &:= \iint_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{O} := \iint_B (\vec{v} \circ \vec{x}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv \\ &= \iint_B \det \left(\vec{v} \circ \vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv \end{aligned}$$

Anschauliche Bedeutung des Flussintegrals



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$\iint_{\mathcal{F}} \vec{B} \cdot d\vec{O} \hat{=} \text{Strömung (Einheit: } m^3/\text{sec)} \text{ durch eine Membran } \mathcal{F} \text{ im Strömungsfeld } \vec{B}.$

Beispiel

$F \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch Parametrisierung $\vec{x} : B \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$B = [0, 1] \times [0, 1]; \quad \vec{x}(s, t) = (s^2, s + t, t^2) \in \mathbb{R}^3$$

Vektorfeld \vec{v}

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(x, y, z) = (x, 1, yz)^t \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = (2s, 1, 0), \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = (0, 1, 2t), \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = (2t, -4st, 2s) = \vec{n}(s, t)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} s^2 \\ 1 \\ (s+t)t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -4st \\ 2s \end{pmatrix} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2s^2t - 4st + 2s^2t^2 + 2st^3) ds dt = -\frac{7}{36}. \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

- ▶ Das skalare Oberflächenintegral ist **unabhängig** von der Parametrisierung, d.h., es hängt nur von \mathcal{F} und nicht von \vec{x} ab.
- ▶ Beim Flussintegral hängt nur das **Vorzeichen** von der Parametrisierung ab. Die **Richtung von $d\vec{O}$** zählt **positiv**.

Flächen aus mehreren glatten Teilen

Besteht eine Fläche aus **mehreren glatten Teilen**, so **addiert** man die **einzelnen Integrale**.

25. Vorlesung 24.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 139 (Integralsatz von Gauß, Divergenzsatz)

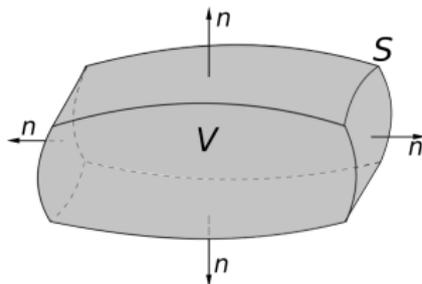
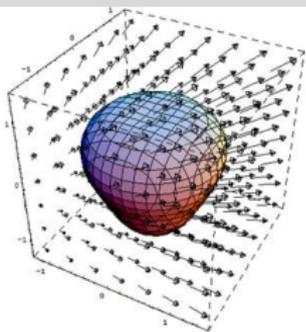
Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter Bereich, dessen Rand ∂B aus endlich vielen glatten Flächen besteht. Sei $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Dabei muss $d\vec{O}$ aus B heraus zeigen. Andernfalls muss das entsprechende Oberflächenintegral negativ gerechnet werden.

Erläuterungen

Physikalische Bedeutung



$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV \hat{=} \text{(Gesamt-)Volumen erzeugt im Inneren von } B \text{ pro Zeitschritt durch Quellen bzw. Senken von } \vec{V}$$

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O} \hat{=} \text{(Gesamt-)Durchfluss von Volumen gemäss } \vec{V} \text{ durch Randmembran } \partial B \text{ pro Zeitschritt}$$

Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differentialgleichung':

$$\int_a^b f'(s) ds = f(b) - f(a)$$

entspricht in höheren Dimensionen

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v} dV = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Dh.

$\operatorname{div} \vec{v}$ entspricht f'

und

$f(b) - f(a)$ entspricht $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

Satz von Gauß – Rechenbeispiel

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, xy, z^3), \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Berechnung der linken Seite im Gauss'schen Satz:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 1 + x + 3z^2$$

Berechnung des 3D-Integrals mittels Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} & \iiint_K (1 + x + 3z^2) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + r \sin \theta \cos \phi + 3 \cos^2 \theta) r^2 \sin^2(\theta) d\theta d\phi dr \\ &= \frac{4}{3}\pi + 0 + 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi r^4 (3 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta dr \\ &= \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, xy, z^3), \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Berechnung der rechten Seite im Gauss'schen Satz:

Wähle z.B. Standard-Parametrisierung der Kugeloberfläche:

$$\vec{X} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto \partial K; \quad \vec{X}(\phi, \theta) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

$$\rightsquigarrow \vec{O}(\phi, \theta) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} = \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \vec{V}(\vec{X}(\phi, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta \\ \cos^3 \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{V}(\vec{X}(\phi, \theta)) \cdot \vec{O}(\phi, \theta) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \sin^3 \theta + \cos^4 \theta) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4}{3}\pi + 0 + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$



26. Vorlesung 27.01.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

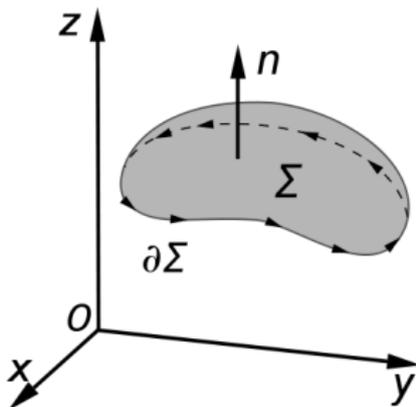
Fakultät II: Institut für Mathematik

Satz 143 (Integralsatz von Stokes)

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte **Fläche** mit stückweise glatter **Randkurve** $\vec{\gamma}$ und $\vec{v}: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

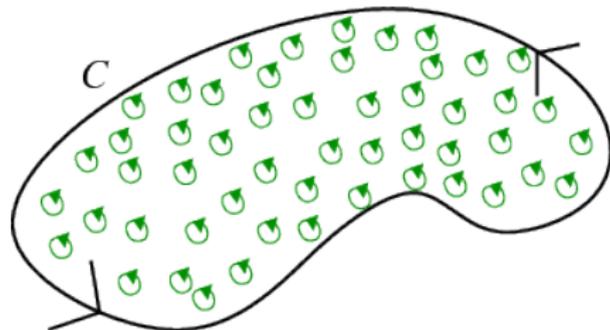
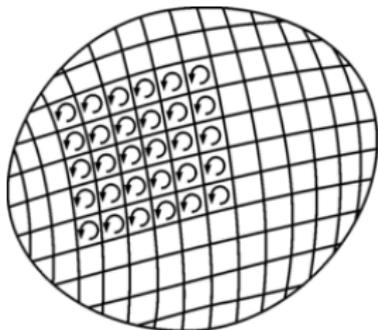
$$\iint_F \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Veranschaulichung:



Anmerkungen

1) Beweisidee/Plausibilisierung: Kompensation der Wirbelströme an den gemeinsamen Rändern von infinitesimalen Flächenelementen \rightsquigarrow Gesamttrotation = Randintegral.



2) Auf der rechten Seite von Stokes muss die Randkurve $\vec{\gamma}$ in **positiver Richtung** durchlaufen werden. Andernfalls muss das Kurvenintegral **negativ** gerechnet werden. **Positive Richtung** bedeutet dabei:

- ▶ **links rum**, wenn man sich in Richtung von $d\vec{O}$ auf die Fläche stellt, oder
- ▶ **die Fläche liegt links**, wenn man den Rand in positiver Richtung durchläuft und dabei in Richtung $d\vec{O}$ auf dem Flächenrand steht.

'Positive Normale bzw. Randkurve mit pos. Umlaufsinn' aus Parametrisierung

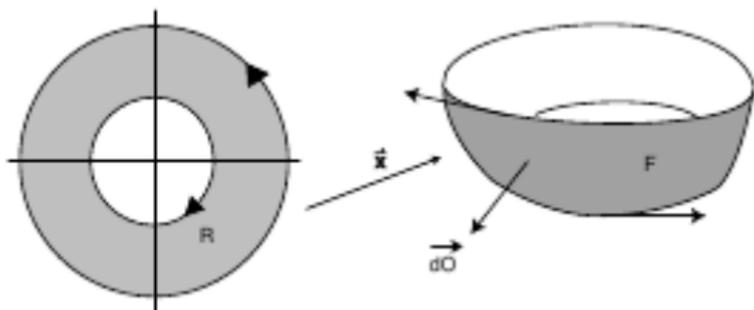
Sei $\mathbb{R}^2 \supset B \ni (u, v) \rightarrow \vec{X}(u, v) \in \mathcal{F}$ eine Parametrisierung von \mathcal{F}
dann erhält man die *positive Flächennormale* durch

$$\vec{\eta}(u, v) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right|}$$

sowie eine Randkurve $\gamma \in \partial \mathcal{F}$ mit *pos. Umlaufsinn* durch

$$t \rightarrow \gamma(t) := \vec{X}(\beta(t))$$

wobei $t \rightarrow \beta(t) \in \partial B$ eine Randkurve des Parameterbereiches $B \subset \mathbb{R}^2$
ist, die das Innere des Parameterbereichs B 'auf der linken Seite' lässt.



Beispiel

Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (y^3, x^2, z)$, Fläche \mathcal{F} = obere Hemisphäre mit Radius R .

Flächenrand $\partial\mathcal{F}$ = Kreisbogen mit Radius R in der (x, y) -Ebene, pos. Parametrisierung: $[0, 2\pi] \rightarrow \gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t))$

Satz v. Stokes rechte Seite:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt = \begin{pmatrix} R^3 \sin^3 t \\ R^2 \cos^2 t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-R^4 \sin^4 t + R^3 \cos^3 t) dt = -\frac{3}{4}\pi R^4 \end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

Parametrisierung der oberen Kugelschale durch Kugelkoordinaten mit $r = R$

$$[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \ni (\theta, \phi) \mapsto X(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$$

Zugeh. vektorielles Oberflächenelement $d\vec{O} = R \sin \theta \vec{X}(\theta, \phi) d\theta d\phi$.
 Rotation des Vektorfeldes $\text{rot } \vec{v} = (0, 0, 2x^2 - 3y^2)$

Satz v. Stokes linke Seite:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2R \sin \theta \cos \phi - 3R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix} \cdot \left(R \sin \theta \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \right) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin \theta \cos \phi (2R \sin \theta \cos \phi - 3R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) d\theta d\phi = -\frac{3}{4} \pi R^4 \end{aligned}$$

27. & 28. Vorlesung 07.& 10.02.11

Folien:

Max v. Renesse
&
G. Paul Peters

Fakultät II: Institut für Mathematik

Unendliche Reihen

Eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Form

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

heißt **Reihe** mit den **Gliedern** oder **Summanden** $a_k \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) und den **Partialsummen** s_n . Man schreibt kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

für die Reihe sowie für ihren Grenzwert.

geometrische Reihe

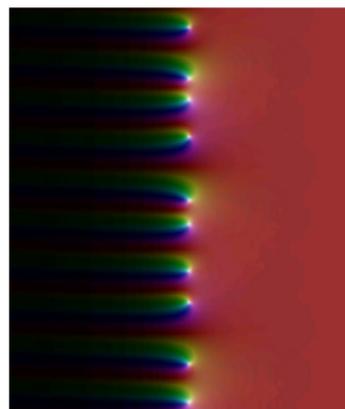
$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

harmonische Reihe, Riemannsche Zetafunktion

▶ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt **harmonische Reihe**. Sie ist **divergent**.

▶ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ ist für $s > 1$ **konvergent** und **sonst divergent**. Die dadurch beschriebene Funktion $]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemannsche Zetafunktion**.



Wikipedia

Notwendiges Kriterium

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist a_k eine Nullfolge.

Integralkriterium

Für $a_k = f(k)$ mit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn für ein t_0 gilt, dass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{t_0}^R f(s) ds < \infty$.

Absolute Konvergenz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und jede ihrer Umordnungen (und zwar immer gegen denselben Zahlwert).

Majorantenkriterium

Falls $|a_k| \leq b_k$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Quotientenkriterium

- ▶ Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
- ▶ Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Wurzelkriterium

- ▶ Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
- ▶ Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Leibniz-Kriterium

- ▶ Wenn die Folge a_k eine **monoton fallende Nullfolge** ist, so **konvergiert** die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

- ▶ Der **Grenzwert** der Reihe liegt immer zwischen zwei aufeinander folgenden Partialsummen.

Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt **Potenzreihe** mit den **Koeffizienten** $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und dem **Entwicklungspunkt** z_0 in der **Variablen** z .

Konvergenzradius

Es gibt genau eine reelle Zahl $R \in [0, \infty]$ ($R = \infty$ ist auch erlaubt), sodass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- ▶ $|z - z_0| < R$ konvergiert,
- ▶ $|z - z_0| > R$ divergiert.

Potenzreihen ableiten

Potenzreihen kann man innerhalb des Konvergenzradius **differenzieren**, in dem man die **Summanden einzeln differenziert**. Die Potenzreihe der Ableitung hat denselben **Konvergenzradius** wie die Ausgangsreihe.

Exponentialfunktion

$$e^z := \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Sinus- und Kosinusfunktion

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Taylorreihe

Die **Taylorreihe** einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f im Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sie **konvergiert** in x genau dann gegen $f(x)$, wenn das **Restglied** aus dem Satz von Taylor für $n \rightarrow \infty$ **gegen Null konvergiert**.