Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 9, 17.12.2018

9-1 Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche (mit der induzierten Metrik) und $c : I \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve. Wenn dann $\nu : M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld ist, für das $(c'(t), \nu(t)) = (c'(t), \nu(c(t)))$ eine positiv orientierte orthonormale Basis des Tangentialraums ist, dann heißt die Funktion $\kappa_g : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\nabla}{dt}\, c'(t) = \kappa_g(t) \cdot \nu(t)$$

die *geodätische Krümmung.* Zeigen Sie:

(a) c ist eine Geodätische genau dann, wenn $\kappa_g(t) = 0$ für alle t.

(b) Es gilt:
$$\frac{\nabla}{dt}\, \nu(t) = -\kappa_g(t)\, c'(t).$$

9-2 Gegeben ist der Rotationstorus mit der Parametrisierung:

$$f(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

für $0 < b < a$

(a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Christoffelsymbole, welche der Parameterkurven $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$ Geodätische sind.

9-3 Zeigen Sie, dass die Schraubenlinien $c(t) = (\cos t, \sin t, at)$ für $a \in \mathbb{R}$ Geodätische auf dem Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

(mit der induzierten Metrik) sind.

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`