Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 8, 11.12.2018

8-1 Für zwei beliebige Zusammenhänge $\nabla, \overline{\nabla}$ auf einer Mannigfaltigkeit definieren wir für zwei Vektorfelder X, Y :

$$D(X,Y) = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass D ein Tensorfeld definiert, d.h. dass für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ und Vektorfelder X, Y gilt: $D(fX, Y) = D(X, fY) = fD(X, Y)$

(b) Zeigen Sie: Falls die beiden Zusammenhänge torsionsfrei sind, ist D symmetrisch.

8-2 Eine Riemannsche Metrik auf einer parametrisierten Fläche sei durch $(g_{ij}(u_1, u_2))_{1\le i,j\le 2}$ gegeben, wir setzen $g(u) = \det(g_{ij}(u_1, u_2))$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \log g(u) = 2\sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ki}\,.$$

8-3 Bestimmen Sie für Polarkoordinaten $(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$ für $\mathbb{R}^2$ (siehe Aufgabe 7-2) die Christoffelsymbole Γ^k_{ij}.

8-4 Es sei auf dem Rechteck $R_1 = [0,1]\times[0,1]$ mit den Koordinaten (x_1, x_2) eine Riemannsche Metrik $g(x_1, x_2) = (g_{ij}(x_1, x_2))_{1\le i,j\le 2}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jedes $(x_1, x_2) \in R_1$ und alle $(a, b) \in\ \mathbb{R}^2$ mit $0 \le x_1 \le x_1 + a \le 1, 0 \le x_2 \le x_2 + b \le 1\}$ gilt für das Rechteck $[x_1, x_1 + a] \times [x_2, x_2 + b]$ dass die gegenüberliegenden Seiten in Bezug auf die Metrik g die gleiche Länge besitzen.

(ii) In R_1 gilt:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\,.$$

[1] www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html

(b) Sei $(x_1, x_2) \in R_1 \longmapsto (y_1, y_2) = \left(\int \sqrt{g_{11}} dx_1, \int \sqrt{g_{22}} dx_2\right)$ eine Koordinatentransformation. Zeigen Sie, dass dann bezüglich der Koordinaten (y_1, y_2) die Metrik g die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Dabei ist θ der Winkel zwischen den Koordinatenlinien.