Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 7, 04.12.2018

7-1 Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und A ein $(0, s)$-Tensor auf N. Dann ist der *zurückgeholte* Tensor f^*A auf M erklärt durch:

$$f^*A(X_1, \ldots, X_s) = A(df(X_1), \ldots, df(X_s)).$$

Sei ω ein $(0, 1)$-Tensor auf der Standardsphäre S^2, d.h. eine Differential-1-Form.

Zeigen Sie: Wenn für alle $\phi \in S\mathbb{O}(3)$ gilt: $\phi^*(\omega) = \omega$, dann gilt $\omega = 0$.

7-2 Auf $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ mit den kartesischen Koordinaten (x, y) werden durch

$$(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \mapsto f(r, \phi) = (r \sin \phi; r \cos \phi) \in \mathbb{R}^2$$

Polarkoordinaten $(r, \phi) = (u_1, u_2)$ eingeführt. Bestimmen Sie die Darstellung

$$g_{ij}(r, \phi) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle ; i, j = 1, 2$$

der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten.

7-3 Auf dem n-Ball $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < 1\}$ ist die Metrik

$$g = 4 \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

gegeben und die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n; F(x) := p + \frac{2(x - p)}{\|x - p\|^2}$$

with $p = (-1, 0, \ldots, 0)$. Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus von D^n und dem oberen Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 > 0\}$ induziert und berechnen Sie die Metrik F^*g.

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`