Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 6, 26.11.2018

6-1 Bestimmen Sie für die Vektorfelder $V(x,y) = y\exp(y^2)\partial_x$ und $W(x,y) = \exp(x^2+y^2)\partial_y$ in $\mathbb{R}^2$ die Lieklammer $[V,W]$.

6-2 Sei Y ein Vektorfeld auf $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, \|x\|^2 = 1\}$. Erweitere das Vektorfeld Y zu einem Vektorfeld $\tilde{Y}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. Y_1 auf $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ durch:

$$\tilde{Y}(x) = \|x\| Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\,;\; Y_1(x) = Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Sei V das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mit $V(x) = x/\|x\|$.

Berechnen Sie $[\tilde{Y}, V]$ und $[Y_1, V]$.

6-3 Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4; f([x]) = \left(x_1x_2, x_1x_3, \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2), x_2x_3\right)$$

wobei $p : x \in S^2 \longrightarrow [x] = \{\pm x\} \in \mathbb{R}P^2$ die kanonische Projektion ist (vgl. Aufgabe 4-3 b)).

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und injektiv ist.

(b) Beweisen Sie mittels des Atlas aus Aufgabe 4-3 b), dass die Abbildung f differenzierbar ist und das für jedes $[x] \in \mathbb{R}P^2$ das Differential

$$df_{[x]} : T_{[x]}\mathbb{R}P^2 \longrightarrow T_{f([x])}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$$

eine injektive lineare Abbildung ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow f(\mathbb{R}P^2)$ ein Homöomorphismus ist.

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`