Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 5, 19.11.2018

5-1 (a) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_x S^n$ der Sphäre S^n als Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Sei $\langle .,. \rangle_1$ das Lorentzprodukt, d.h. $\langle x, y \rangle_1 = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n+1}$. Bestimmen Sie den Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_1 = -1, x_1 > 0\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

5-2 Sei J die orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}^4$ mit $J^2 = -E_4$, die in der natürlichen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 des $\mathbb{R}^4$ gegeben ist durch $J(e_1) = e_2, J(e_2) = -e_1, J(e_3) = e_4, J(e_4) = -e_3$ bzw. durch die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung des Vektorfeldes $x \in \mathbb{R}^4 \mapsto J(x) \in \mathbb{R}^4$ auf die 3-dimensionale Sphäre $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4; \|x\|^2 = 1\}$ tangential ist und ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^3 definiert.

(Hinweis: Diese Konstruktion läßt sich auf jede ungerade-dimensionale Sphäre übertragen)

5-3 Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und sei $A : S^n \longrightarrow S^n$ die Antipodenabbildung mit $A(x) = -x$. Sei $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ die kanonische Projektion.

Beweisen Sie:

(a) A ist ein Diffeomorphismus.

(b) Für ein Vektorfeld V auf S^n gilt $dA_x(V(x)) = V(A(x))$ für jedes $x \in S^n$ genau dann, wenn es ein Vektorfeld W auf $\mathbb{R}P^n$ gibt mit $d\pi_x(V(x)) = W(\pi(x))$ für jedes $x \in S^n$.

(c) Es gibt ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf $\mathbb{R}P^3$.

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`