Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 4, 11.11.2018

4-1 Zeigen Sie, dass die *spezielle lineare Gruppe*

$$SL(n) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n,n); \det A = 1\}$$

der $n \times n$ reellen Matrizen mit Determinante 1 als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefaßt werden kann. Wie ist die Dimension bzw. Kodimension?

4-2 Es seien $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i+k_i}, i = 1,2$ differenzierbare Untermannigfaltigkeiten der Dimension m_i und Kodimension k_i. Zeigen Sie, dass dann das Produkt $M_1 \times M_2 = \{(x_1,x_2); x_i \in M_i, i = 1,2\}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie ihre Dimension und ihre Kodimension.

4-3 Gegeben sei die Standardsphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\|^2 = 1\}$. Für jedes $i \in \{1,2,3\}$ setze $U_i^{\pm} = \{x \in S^2; \pm x_i > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die sechs Mengen $U_i^{\pm}$ Kartengebiete eines Atlas für die Sphäre S^2 bilden.

(b) Sei $p : x \in S^2 \to \{\pm x\} \in \mathbb{R}P^2$ die kanonische Projektion auf die reell-projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Zeigen Sie, dass die drei Mengen $p(U_i^+), i = 1,2,3$ Kartengebiete eines Atlas für $\mathbb{R}P^2$ bilden.

(Hinweis: Die analoge Konstruktion ergibt für Dimension $n \geq 2$ einen Atlas für S^n bzw. $\mathbb{R}P^n$ mit $2(n+1)$ bzw. $n+1$ Karten)

4-4 (a) Zeigen sie, dass

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beweisen Sie, dass M homöomorph zur Standardsphäre

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ist, d.h. es gibt eine bijektive stetige Abbildung $M \longrightarrow S^2$, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist.

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`