Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 2, 26.10.2018

2-1 Durch $c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, , c(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ist für $a \geq b > 0$ die Parametrisierung einer Ellipse gegeben. Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve.

2-2 Wenn $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve ist, für die c', c'' in jedem Punkt linear unabhängig sind, dann heißt die Gerade $s \in \mathbb{R} \longmapsto c(t_0) + se_2(t_0) \in \mathbb{R}^3$ die *Normale* an c in t_0. Zeigen Sie:

Wenn alle Normalen der Kurve c durch einen festen Punkt gehen, dann ist c Teil einer Kreislinie.

2-3 Bestimmen Sie die Gleichung einer nach der Bogenlänge parametrisierten, ebenen Kurve $c : t \in [0, a] \longrightarrow c(t) \in \mathbb{R}^2$, mit $c(0) = (0, 0)$ für deren Krümmung κ gilt: $\kappa(t) = t$ und skizzieren Sie die Kurve.

2-4 Sei $c : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve, für deren Krümmung gilt: Es gibt ein $k > 0$ so dass für alle $t \in [0, a] : \ 0 < \kappa(t) < k$.
Zeigen Sie, dass dann für die Umlaufzahl n_c und die Länge $L(c)$ die folgende Beziehung gilt:

$$L(c) > \frac{2\pi n_c}{k} \, .$$

[1] www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html