Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 10, 17.01.2019

10-1 Für zwei symmetrische $(0,2)$-Tensoren h, k ist das Kulkarni-Nomizu Produkt definiert durch:

$$\begin{aligned} h \star k(X,Y,Z,U) = \frac{1}{2}\{ & h(X,U)k(Y,Z) + h(Y,Z)k(X,U) \\ & - h(X,Z)k(Y,U) - h(Y,U)k(X,Z)\} \end{aligned}$$

(a) Für welche symmetrischen $(0,2)$-Tensor h gilt: $h \star h = 0$?

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$h \star k(X,Y,Z,U) + h \star k(Y,Z,X,U) + h \star k(Z,X,Y,U) = 0$$

10-2 Zeigen Sie, dass für den Riemannschen Krümmungstensor folgende Identität gilt:

$$\begin{aligned} 6R(X,Y,Z,U) = & \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} R(X+sU, Y+tZ, Y+tZ, X+sU) \\ & - \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{s=t=0} R(X+sZ, Y+tU, Y+tU, X+sZ) \end{aligned}$$

(Daraus folgt, dass die Schnittkrümmungen den Krümmungstensor vollständig bestimmen)

10-3 Eine Kurve $c : I \to M$ auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Krümmungslinie*, falls für jedes $t \in I$ die Geschwindigkeit $c'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist. (Eine Hauptkrümmungsvektor ist ein Eigenvektor der Weingartenabbildung.) Wir nehmen an, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(a) Zeigen Sie: Wenn die Krümmungslinie eine Geodätische ist, so ist sie eben.

(b) Ist eine ebene Krümmungslinie eine Geodätische?

(c) Ist eine Geodätische, die eben ist, eine Krümmungslinie?

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`

10-4 Es sei $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ durch $\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2})$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Punkte, an denen diese Kurve regulär ist.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\alpha'(t)$ und der y-Achse. *(Hinweis: Sie benötigen die trigonometrische Formel* $2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t$*.)*

(c) Zeigen Sie: Die Länge des Segments der Tangente der Kurve α zwischen ihrem Berührungspunkt und der y-Achse ist konstant 1.

(d) Berechnen Sie die Gaußkrümmung der Rotationsfläche der Kurve α um die y-Achse.