Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2018/19 (Boldt, Rademacher)

Aufgaben[1], Blatt 1, 22.10.2018

1-1 Ein Rad vom Radius $r > 0$ rollt gleichmäßig auf einer Geraden ab. Ein fester Punkt auf der Lauffläche des Rads beschreibt eine Kurve c (*Zykloide*).

(a) Geben Sie eine Parametrisierung an und skizzieren Sie die Kurve.

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die einer Umdrehung entspricht.

1-2 Eine reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben durch $r = r(\varphi)$, d.h. in kartesischen Koordinaten durch $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, y(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$. Zeigen Sie:

(a) Die Länge $L(c)$ ist gegeben durch:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

(b) Die Krümmung ist gegeben durch:

$$\kappa = \kappa(\phi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{\left(r'^2 + r^2\right)^{3/2}}\,.$$

1-3 Berechnen Sie für $a, b > 0$ die Länge und Krümmung der logarithmischen Spirale $c : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$:

$$c(t) = (a\exp(-bt)\cos t, a\exp(-bt)\sin t).$$

[1] `www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/wintersemester2018.html`