Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 14.12.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 9**

9-1 Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 8-4, dass jede Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ (bezüglich der Norm $\|.\|_{L^1}$) konvergent ist.

9-2 Zeigen Sie, dass für jedes $h > 0, \alpha > 1$ die Funktion $f_{\alpha,h} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \exp(-hx)\sin(x^\alpha)$ Lebesgue-integrierbar ist und dass gilt:

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}_+} f_{\alpha,h}(x)dx = \int_0^\infty \sin(x^\alpha)\, dx,$$

wobei auf der rechten Seite das uneigentliche Riemann-Integral steht. (vgl. Aufgabe 8-2)

9-3 Für positive reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Menge

$$E(a_1, \ldots, a_n) := \left\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1^2/a_1^2 + \ldots + x_n^2/a_n^2 \le 1\right\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese Menge Borel-messbar ist und bestimmen Sie ihr Volumen.

9-4 Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir das System $\mathcal{A}$ von Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$, für die A oder das Komplement A^c endlich oder abzählbar ist. Für $\{0,1\}$ ist $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\{0,1\})$ die Potenzmenge von $\{0,1\}$. Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, vgl. Aufgabe 3-2.

Zeigen Sie:

(a) Die charakteristische Funktion $T : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\{0,1\}, \mathcal{A}')$ der irrationalen Zahlen (also $T(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ist messbar.

(b) Bestimmen Sie das Bildmaß $T_*\mu$.

****

ANKÜNDIGUNG DER FACHSCHAFT MATHEMATIK:

Der Fachschaftsrat Mathematik lädt zur alljährlichen Weihnachtsvorlesung am 15. Dezember um 19:00 Uhr in Hörsaal 3 ein. Holger Wuschke trägt zum Thema *MATHEMATISCHE GESCHICHTEN IN DER WEIHNACHTS-ZEIT* vor. Dazu gibt es weihnachtliche Getränke, Gebäck und festliche Stimmung.

Wir freuen uns auf euch!

****

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper