Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 07.12.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 8**

8-1 Zeigen Sie: Die elementaren Treppenfunktionen

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k}$$

mit $c_k \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots, n$ und Quadern $Q_k = [a_{k1}, b_{k1}] \times \ldots \times [a_{kn}, b_{kn}]$; $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ bilden eine abzählbare, dichte Teilmenge im Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen (bezüglich der L^1-Norm).

8-2 Für welche reellen Zahlen $a > 1$ ist die Funktion

$$f_a(x) = \sin(x^a)$$

auf $\mathbb{R}_+$ uneigentlich Riemann-integrierbar, bzw. Lebesgue-integrierbar?

8-3 Zeigen Sie: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0$$

fast überall.

8-4 Wenn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ eine Folge integrierbarer Funktionen ist, für die

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^1} < M \in \mathbb{R}^+$$

gilt, dann konvergiert die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{m} f_k\right)_{m\geq 1}$ fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und es gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{m} f_k \right\| = 0.$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/Analysis3.html
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper