Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 30.11.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 7**

7-1 Gegeben ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n : (0,4) \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad x \geq 1/n \\ \\ \sqrt{n} & ; \quad x < 1/n \end{cases} .$$

Untersuchen Sie die Folge auf punktweise Konvergenz und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,4)} f_n \, d\lambda^1$.

7-2 Berechnen Sie den Grenzwert $\int_{[0,1]} f_n \; d\lambda^1$ für die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, n \in \mathbb{N}.$$

7-3 Gegeben ist die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\; f_n = n\chi_{[0,1/n)}, n \in \mathbb{N}$.

(a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Kann man die Grenzwertbildung für $n \to \infty$ und die Integration über $[0,1]$ vertauschen?

(c) Gibt es für die Folge (f_n) eine Lebesgue-integrierbare Majorante?

7-4 Gegeben ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Folge $f_m : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, m \geq 1$ nicht-negativer messbarer Funktionen. Beweisen Sie:

$$\int_\Omega \left(\liminf_{m\to\infty} f_m \right) \, d\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega f_m \, d\mu.$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper