Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 23.11.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 6** Aufgabe 6-1 ausgetauscht

6-1 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph

$$G(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = f(x), x \in \mathbb{R}\right\}$$

von f eine Lebesgue-Nullmenge des $\mathbb{R}^2$ ist.

6-2 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, für die es reelle Zahlen a, b gibt, so dass $a \le f(x) < b$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wenn $U = \left\{(t_k)_{k=0,1,\ldots,m} \,;\, (\xi_k)_{k=0,1,\ldots,m-1}\right\}$ eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

des Intervalls $[a, b]$ mit Zwischenstellen $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ist, dann ist die *Lebesgue–Summe* $S(U, f)$ der Funktion f bezüglich der Unterteilung U mit Zwischenstellen definiert als

$$S(U, f) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k \cdot \mu\left(\{t_{k-1} \le f < t_k\}\right) .$$

Mit $\delta(U) = \max_{1 \le k \le m}(t_k - t_{k-1})$ wird die *Feinheit* der Unterteilung U bezeichnet.

Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{\delta(U) \to 0} S(U, f).$$

6-3 Gegeben ist der in Aufgabe 3-2 definierte Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$.

Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar genau dann, wenn es eine endliche oder abzählbare Teilmenge $A = A(f) \subset \mathbb{R}$ gibt und eine Zahl $c = c(f)$ gibt, so dass für alle $x \in A(f)^c$ gilt: $f(x) = c(f)$.

(b) Zeigen Sie, dass eine messbare Funktion integrierbar ist und es gilt:

$$\int_\mathbb{R} f d\mu = c(f) .$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper