# Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

*Wegen des Buß-und Bettages: Abgabe: Dienstag, 15.11.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!*

Aufgaben, Blatt **Nr. 5**

5-1 Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

5-2 Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Quadersummen $X, Y \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $X \subset A \subset Y$ und $\mathrm{vol_n(Y) - vol_n(X)} < \epsilon$. Sei $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ das System der Jordan-messbaren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann heisst $J(A) := \mathrm{sup\{vol_n(X)\,;\, X \subset A; X \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)\}}$ der *Jordan-Inhalt* von $A$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Mengenring auf $\mathbb{R}^n$ und $J : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt.

(b) Jede Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch Lebesgue-messbar und es gilt $J(A) = \lambda^n(A)$.

5-3 Zeigen Sie:

(a) Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand $\partial A$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

*Bemerkung:* Der Rand einer Menge ist definiert als: $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, dabei ist $\overline{A}$ der Abschluss und $\mathring{A}$ das Innere der Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist eine Lebesgue-messbare Menge, die nicht Jordan-messbar ist.

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper