Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 09.11.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 4**

Aufgabe 4-3 korrigiert

4-1 Sei A eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(A) > 0$ und sei a eine reelle Zahl mit $0 < a < \lambda^n(A)$. Zeigen Sie, dass es eine kompakte Menge $K \subset A$ gibt mit $\lambda^n(K) = a$.

4-2 Gegeben ist eine konvexe Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren $\mathring{A} \neq \emptyset$ und $\lambda^n(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass A beschränkt ist.

4-3 Gegeben ist ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Dann heißt eine Teilmenge $A \subset \Omega$ *Caratheòdory-meßbar* bezüglich μ^*, wenn für alle $X \subset \Omega$ gilt:

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \setminus A) .$$

Zeigen Sie:

Wenn $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist mit zugehörigem äußeren Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, dann ist jede Menge $A \in \mathcal{A}$ *Caratheòdory-meßbar* bezüglich μ^*.

4-4 Wir definieren die Menge $C_n \subset [0,1], n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $C_1 = [0,1]$ und

$$C_{n+1} = \left\{ \frac{x}{3} ; x \in C_n \right\} \cup \left\{ \frac{2}{3} + \frac{x}{3} ; x \in C_n \right\}$$

und definieren $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Zeigen Sie:

(a) C ist überabzählbar.

(b) C ist eine Nullmenge (bzgl. des Lebesgue-Maßes).

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper