Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Korrektur von Aufgabe 3-3 *Abgabe: Mittwoch, 02.11.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!*

Aufgaben, Blatt **Nr. 3**

3-1 Für eine endliche Menge Ω sei $\zeta : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $\zeta(A) := \# A, A \subset \Omega$. Sei außerdem $\epsilon_a : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ das Maß aus Aufgabe 2-2. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\zeta = \sum_{a \in \Omega} \epsilon_a$.

(b) Jedes Maß μ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist von der Form:

$$\mu = \sum_{a \in \Omega} \mu(\{a\}) \epsilon_a.$$

3-2 Sei $\mathcal{A}$ das System der Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$, für die A oder A^c endlich oder abzählbar ist. Wir definieren $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \{0, 1\}$ durch $\mu(A) = 1$, falls A unendlich und nicht abzählbar ist und $\mu(A) = 0$ falls A endlich oder abzählbar ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und μ ist ein Maß.

(b) Bestimmen Sie das zugehörige äußere Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

(c) Zeigen Sie, dass μ^* kein Inhalt ist.

3-3 Sei $\mathcal{A}$ der Mengenring der Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$, für die A oder das Komplement A^c endlich ist. Dann ist $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ein Inhalt definiert durch $\mu(A) = 0$ für eine endliche Menge A und $\mu(A) = 1$ für eine Menge A mit endlichem Komplement. Bestimmen Sie die Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\mu^*(X) := \inf \{\mu(A) ; A \supset X, A \in \mathcal{A}\}$.

Abgabe auch erst mit den Lösungen zu Blatt Nr. 4 nächste Woche möglich

3-4 Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ 2 & ; \quad A \neq \emptyset, A \text{ beschränkt} \\ \infty & ; \quad A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

ein äußeres Maß, aber kein Maß.

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper