Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 26.10.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 2**

Aufgabe 2-4 korrigiert

2-1 Sei $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra auf Ω'. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{A} = f^{-1}\left(\mathcal{A}'\right) := \left\{f^{-1}(B)\ ;\ B \in \mathcal{A}'\right\}$$

eine σ-Algebra auf Ω ist.

2-2 In der Vorlesung wurde die Abbildung $\epsilon_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω mit $a \in \Omega$ definiert durch:

$$\epsilon_a(A) = \begin{cases} 1 & ;\quad a \in A \\ 0 & ;\quad a \notin A \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass ϵ_a ein Maß ist.

2-3 Gegeben ist die Mengenalgebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ für die $A \in \mathcal{A}$ gilt genau dann, wenn A oder das Komplement $A^c = \mathbb{N} - A$ endlich ist und die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^2} & ;\quad \#A < \infty \\ 2 - \sum_{n\notin A} \frac{1}{n^2} & ;\quad \#A = \infty \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) μ ist ein Inhalt.

(b) μ ist nicht σ-additiv.

2-4 Gegeben ist eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$. Sei $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ ist der Mengenring der endlichen Intervallsummen in $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau einen Inhalt $\mu_f : \mathcal{Q}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$.

(b) Der Inhalt μ_f ist genau dann σ-additiv, wenn f von links stetig ist, d.h. wenn für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{y\to x, y<x} f(y) = f(x).$$