Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur, Blatt **Nr. 14**

Masse, messbare Mengen und Funktionen

1. Es sei $(a_{hk})_{h,k\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge, deren Elemente zu $[0,\infty]$ gehören. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{h\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{hk}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{h\in\mathbb{N}} a_{hk}\Big).$$

2. Sei $(X,\mathcal{A})$ ein Messraum und sei $\mu_n : \mathcal{A}\to[0,\infty]$ eine Folge von Maßen. Zeigen Sie mittels der vorherigen Aufgabe, dass

   a)
   $$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A),$$
   für $A\in\mathcal{A}$, ein Maß definiert.

   b) wenn $f : X\to[0,\infty]$ eine messbare Funktion ist, dann gilt:
   $$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f\,d\mu_n.$$

   c) eine Funktion $f : X\to\mathbb{R}$ genau dann μ-integriebar ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f|\,d\mu_n < \infty$. Außerdem, falls f μ-integriebar ist, dann gilt:
   $$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f\,d\mu_n.$$

3. Es sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Sei (A_k) eine Folge messbarer Mengen für die $\sum_k \mu(A_k) < \infty$ gilt.
(a) Zeigen Sie, dass

$$(\star)\qquad \mu\Big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\Big[\bigcup_{k\geq m} A_k\Big]\Big) = 0.$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper

(b) Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ durch

$$I_x := \{k \in \mathbb{N} \mid x \in A_k\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von ($\star$), dass für fast alle $x \in \Omega$ die Menge I_x endliche Kardinalität hat. (Anders gesagt: Zeigen Sie, dass jeder Punkt aus Ω in höchstens endlichen vielen Mengen der Folge enthalten ist.)

Bemerkung: Dies ist das sogenannten Lemma von Borel-Cantelli.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion ist.

Konvergenzsätze

5. Berechnen Sie die Grenzwerte

a)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{n}} (1 + \sin x) dx,$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-nx^2} \sin\Big(\frac{\pi n^2}{x}\Big) dx.$$

6. Zeigen Sie, dass die Folge

$$n \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad \int_0^n \frac{1}{x^{-n} + x^2}\, dx$$

konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Satz von Fubini

7. Betrachten Sie die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

definiert auf $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1, y \geq 1\}$. Ist diese Funktion integrierbar auf D?

Hinweis: Diese Aufgabe soll zeigen, dass die Annahme der Integriebarkeit im Satz von Fubini nicht weggelassen werden kann.

8. Sei A eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit endlichem Maß. Der Schwerpunkt von A ist der Punkt $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, dessen Koordinaten durch die Integrale
$$p_i := \frac{1}{\lambda^n(A)} \int_A x_i d\lambda^n,$$
gegeben sind. Hierbei ist $x_i : A \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenfunktion. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge A
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 4 - x_1^2\},$$
und der des 3-Simplex B
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}.$$

9. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \geq 0$. Man berechne das Volumen der Menge
$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + cy^2 - f(z)^2 \leq 0,\ z \in [a, b]\right\},$$
wobei c eine positive reelle Zahl ist.

Variablentransformation

10. Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ der Ball mit Radius 1 um den Ursprung und sei $|\mathbf{x}| : B_1(0) \to [0, \infty)$ die Norm. Für welche Werte der reellen Zahl α ist die Funktion $|\mathbf{x}|^\alpha$ integrierbar über $B_1(0)$?

11. Sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ x^2 \leq y \leq 3x^2,\ x \leq y \leq 2x\}$.
Berechnen Sie das Integral
$$\int_A \frac{x}{y} d\lambda^2.$$
Hinweis: Die Transformation $(x, y) \mapsto (xy, y/x)$ könnte helfen.

Integration auf Untermannigfaltigkeiten

12. Sei $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass Γ_f eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit (mit Rand) des $\mathbb{R}^2$ ist und finden Sie eine Formel für das Volumen von Γ_f.

    Durch diese Formel berechnen Sie explizit das Volumen von Γ_f, wobei $f : [0, \log 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cosh x$.