Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 25.01.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 13**

13-1 Durch

$$\Phi : (r, u, v) \in \mathbb{R}^{>0} \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \mapsto r\,(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \in \mathbb{R}^3$$

sind räumliche Polarkoordinaten gegeben.

Bestimmen Sie den Laplace Operator Δ^{Φ} in diesen Koordinaten.

13-2 Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - y - z\,;\; g(x, y, z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\right\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3\,;\, \phi(t) = (t, t^2, t^3)$ eine Parametrisierung dieser Untermannigfaltigkeit ist.

13-3 Zeigen Sie: Wenn $M^k \subset \mathbb{R}^m$ bzw. $N^l \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale bzw. l-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $M \times N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine $(k + l)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.

13-4 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $a \in M$, und $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von der Untermannigfaltigkeit wobei $V = g(\Omega) \subset M$ eine offene Umgebung von $a = g(t)$ ist. Dann heißt $T_aM := dg_t(\mathbb{R}^k)$ der Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit in a.

Sei $M \cap U = f^{-1}(0)$, wobei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist mit definiert auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a mit $\mathrm{rg}(df_x) = n - k$ für alle $x \in M \cap U$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$T_aM = \ker df_a.$$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper