Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 12**

12-1 Für glatte Funktionen $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist der lineare Differentialoperator L von Ordnung 2 gegeben durch:

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\,.$$

Bestimmen Sie den formal adjungierten Differentialoperator L^*.

12-2 Zeigen Sie, dass für jeden linearen Differentialoperator L der Ordnung k auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(L^*)^* = L.$$

12-3 Gegeben sind die lineare Differentialoperatoren L_1, L_2, M auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ der *Kommutator* der Operatoren L_1, L_2. Zeigen Sie:

(a) $[M, L_1 \circ L_2] = [M, L_1] \circ L_2 + L_1 \circ [M, L_2]$.

(b) $[[L_1, L_2], L_3] + [[L_2, L_3], L_1] + [[L_3, L_1], L_2] = 0$.

12-4 Zeigen Sie: Wenn L bzw. M ein linearer Differentialoperator der Ordnung k bzw. l ist, dann ist der Kommutator $[L, M]$ ein linearer Differentialoperator der Ordung $\leq k + l - 1$.

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper