Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 04.01.2017 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 10**

10-1 Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative messbare Funktion. Zeigen Sie:

Die Menge $A := \{(x, y) \in B \times \mathbb{R}\,;\, 0 \le y \le f(x)\}$ ist eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Funktion f ist integrierbar über B genau dann, wenn $\mathrm{vol}_{n+1}(A) < \infty$ und es gilt:

$$\mathrm{vol}_{n+1}(A) = \int_B f(x)\, d^n x.$$

10-2 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und sei

$$A := \left\{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2\,;\, y^2 + z^2 \le f(x)^2\right\}$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{vol}_3(A) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

10-3 Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts $Z_1 \cap Z_2$ der Zylinder

$$Z_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + z^2 \le 1\right\}\,;\, Z_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y^2 + z^2 \le 1\right\}.$$

10-4 Zeigen Sie, dass für die Faltung integrierbarer Funktionen $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

(a) $(f + g) * h = f * h + g * h\,,$

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)\,.$

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher www.math.uni-leipzig.de/~rademacher/Analysis3.html
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper