Maß- und Integrationstheorie

Wintersemester 2016/17

Abgabe: Mittwoch, 19.10.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Aufgaben, Blatt **Nr. 1**

Aufgabe 1.2 b) korrigiert)

1-1 Zeigen Sie, dass für die symmetrische Mengendifferenz Δ folgende Beziehungen gelten $(A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

(a) $A \setminus B = (A \cap B)\, \Delta A$

(b) $A \cup B = (A\Delta B)\, \Delta\, (A \cap B)$.

1-2 Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a) $A\Delta B = B\Delta A$; $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$; $A\Delta A = \emptyset$; $A\Delta\emptyset = A$

(b) Sei $A^c = \Omega \setminus A$ das Komplement von $A \subset \Omega$.

$$A^c\Delta B^c = A\Delta B;\ (A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

(c) Für zwei Familien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_i)_{i\in I}$ von Mengen gilt:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcup_{i\in I} A_i\Delta B_i.$$

1-3 Folgeren Sie mit Hilfe der Aufgabe 1-2:

Eine System $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ von Teilmengen von Ω ist genau dann ein Mengenring auf Ω, wenn $\mathcal{R}$ bezüglich der Verknüpfungen Δ (als Addition) und $\cap$ (als Multiplikation) ein kommutativer Ring im algebraischen Sinn ist.

1-4 Zeigen Sie, dass die Mengen $\{x \in \mathbb{R}; x < b\}, b \in \mathbb{Q}$ ein Erzeugendensystem der Borel-Algebra $\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ bilden.

Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher
Dr. Gabriele Benedetti
Philip Kupper