Analysis 1

Wintersemester 2015/16
Zusätzliche Aufgaben, Blatt **Nr. 9**

Abgabe: Dienstag, 05.01.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

Mit der Lösung dieser Aufgaben können Zusatzpunkte erworben werden, bei der Ermittlung der Gesamtzahl der durch die Lösung von Übungsaufgaben zu erlangenden Punkte gehen diese Aufgaben nicht ein!

9-1 Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

9-2 Untersuchen sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

9-3 Bestimmen Sie für $a > 0$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

9-4 Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{8k+2}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

9-5 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k^2+2^k}$$

und untersuchen Sie die Konvergenz am Rand des Konvergenzintervalls.

9-6 Zeigen Sie: Wenn für n gerade $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_k ist und wenn $a_0 a_n < 0$, dann besitzt das Polynom zwei Nullstellen.

Hinweis: Es ist zu zeigen, dass das Polynom mindestens zwei Nullstellen hat.

9-7 Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen an der Stelle $x_1 = 0$:

$$(a)\ \ f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{5x^2 + 1} \ \ ; \ \ (b)\ \ g(x) = \exp(\sin(x) + x^2)$$

9-8 Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \exp(x) & ; \ x > 0 \\ -x^2 + x + 1 & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

für $x_1 = 0$.

9-9 Zeigen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!},$$

dass die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$ irrational ist.

Hinweis: Wenn a_n eine monoton fallende Nullfolge ist und $a = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ dann gilt $\left| a - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Neue Jahr!