

## Analysis 1

Wintersemester 2015/16

Aufgaben, Blatt **Nr. 8**

*Abgabe: Dienstag, 15.12. vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!*

8-1 Gegeben ist die Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{2^k}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und entwickeln sie diese Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 1, d.h. geben sie eine Folge  $a_k$  an, so dass gilt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

8-2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k}{k^3 + 1} x^k \quad ; \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k + 1}{b^k + 1} x^k, \quad a, b > 0$$
$$(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 + 3^k} \quad ; \quad (d) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2^k}\right)^k$$

8-3 Sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  die Funktionenfolge:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & ; \quad 0 \leq x \leq 1/(2n) \\ 2 - 2nx & ; \quad 1/(2n) < x \leq 1/n \\ 0 & ; \quad 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie  $f_n(x)$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $f_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  stetig ist.
- (c) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

8-4 (a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$  gleichmäßig stetig ist.

(b) Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle  $x, y \in D$ .

Zeigen Sie: Eine Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  aus Teil a) nicht Lipschitz-stetig ist.

### **Ankündigung des Fachschaftsrats Mathematik:**

Der Fachschaftsrat Mathematik lädt zur alljährlichen Weihnachtsvorlesung am **17.12. 15:45 Uhr im HS 8** ein. Professor Dr. Finis trägt zum Thema *Algebraische Zahlentheorie: Barocke Träumereien und moderne Märchen* vor. Dazu gibt es Glühwein, Gebäck und festliche Stimmung. Wir freuen uns auf euch!