Analysis 1

Wintersemester 2015/16
Aufgaben, Blatt **Nr. 5**

Abgabe: Dienstag, 24.11. vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

5-1 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \quad ; \quad (b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$(c)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{5k^5+3k^3+1}{7k^7+1} \quad ; \quad (d)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k^5+5}{k^6+6}$$

5-2 (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergieren:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ ; \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \, .$$

(b) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1 \, .$$

5-3 Gegeben ist $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (n^m \exp(-n)) = 0.$$

5-4 Zeigen Sie, dass für jede irrationale Zahl x die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = nx - [nx]$$

das Intervall $[0,1]$ ist.

Hierbei ist $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$.