Analysis 1

Wintersemester 2015/16
Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur, Blatt **Nr. 13**

13-1 Beweisen Sie:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\cdot 2^{n-1}$$

13-2 Gegeben ist die Folge

$$a_1 = 1\,;\ a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge durch 4 beschränkt ist und monoton steigend ist.

(b) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

13-3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^5}{5^k} \quad ; \quad (b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{k^3-1} \quad ; \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$$

13-4 Gegeben ist die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Zeigen Sie:

(a) tanh ist monoton steigend.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty}\tanh(x) = \pm 1$.

(c) $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion erfüllt:

$$\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,.$$

13-5 Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\sin(x)) & ; \quad x \geq 0 \\ \exp(x) - 1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

13-6 Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Ausserdem existiere $c = \lim_{x \to a} f'(x)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass dann f in a differenzierbar ist mit $f'(a) = c$.

13-7 Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$(a) \quad \int_1^e x \ln(x)\, dx \;\; ; \quad (b) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\, dt$$

13-8 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$(a) \quad \int x \sin\left(x^2\right)\, dx \;\; ; \quad (b) \quad \int x^3 \exp\left(-x^2\right)\, dx$$

13-9 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine Darstellung der Funktion f als Potenzreihe