Analysis 1

Wintersemester 2015/16
Aufgaben, Blatt **Nr. 11**

Abgabe: Dienstag, 19.01.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

11-1 Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < x_o < b$ und seien $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, für die gilt: $f(x_0) = g(x_0) = 0$, und $g(x), g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b), x \neq x_0$.

Zeigen Sie: Wenn $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Hinweis: Wenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Aufgabe 10-3) an auf die Enschränkungen von f, g auf ein Intervall $[x_0, x_0 + h]$ bzw. $[x_0 - h, x_0]$

11-2 Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 11-2 die folgenden Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \; ; \; b) \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \; ; \; \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \; ;$$

11-3 Zeigen Sie: Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und $\int_a^b f = 0$ dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

11-4 Berechnen Sie das Integral $\int_a^b \exp(x)\, dx$ mit Hilfe einer Riemannschen Summe.