Analysis 1

Wintersemester 2015/16
Aufgaben, Blatt **Nr. 10**

Abgabe: Dienstag, 12.01.2016 vor der Vorlesung, bitte Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppenzeit angeben!

10-1 Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge von $\mathbb{R}$, auf der die folgenden Funktionen definiert sind bzw. differenzierbar sind und bestimmen Sie die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \arctan\left(x^2\right) \\ f_2(x) &= (\arctan x)^2 \\ f_3(x) &= \ln(\cos x) \\ f_4(x) &= \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

10-2 Sei $f : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte.

(b) Auf welchen Intervallen ist die Funktion konvex bzw. konkav?

10-3 Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar sind.

Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)\,.$$

Hinweis: Definieren Sie $F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz.

10-4 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die differenzierbar ist für alle $x \neq x_0$.

Zeigen Sie: Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existiert, dann ist f auch in x_0 differenzierbar und es gilt: $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.