Lösungen Serie 9

Aufgabe 1 IA: $n = 0$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = 0 = (-1)^0 \cdot \frac{0\cdot(0+1)}{2}$.

IV: Es gilt $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&\overset{\text{IV}}{=} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1} \cdot ((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (n+1-\frac{n}{2}) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (\frac{n}{2}+1) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Es ist a_n *streng monoton wachsend*, da

IA: $1 = a_1 < a_2 = \sqrt{2}$.

IV: $a_{n-1} < a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Wir haben

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{a_{n-1}+2} < \sqrt{a_n+2} \overset{\text{beide Seiten sind positiv}}{\Leftrightarrow} a_{n-1}+2 < a_n+2 \Leftrightarrow a_{n-1} < a_n,$$

was nach IV richtig ist.

Nun zur *Beschränktheit*. Es gilt $a_n < 2$.

IA: $a_1 = 1 < 2$.

IV: $a_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = a$.

Es folgt die Konvergenz von a_n gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Dieses muss wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ die Gleichung

$$a = \sqrt{2+a}$$

erfüllen. Sie hat nur die Lösung 2. (Quadrieren wir, erhalten wir die Gleichung $a^2 - a - 2 = 0$, welche die Lösungen 2 und -1 hat. Jedoch ist -1 keine Lösung der obigen Gleichung.) Also ist $a = 2, \square$

Aufgabe 3 Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+1}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an+1-n^2-1}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{an}{n\cdot(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\\
&= \frac{a}{2}, \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Es gilt, dass $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{8n+2}}$ eine alternierende Nullfolge ist. Außerdem sehen wir für $|a_n|$, dass

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| &< |a_n| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8(n+1)+2}} < \frac{1}{\sqrt{8n+2}} \Leftrightarrow \sqrt{8n+2} < \sqrt{8(n+1)+2} \Leftrightarrow\\
8n+2 &< 8n+10 \Leftrightarrow 2 < 10.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge der Beträge monoton fallend und die Reihe somit nach Leibnizkriterium konvergent. Sie ist aber nicht absolut konvergent, da

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|a_k| &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{8k+2}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{8k+2k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{10k}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&> \frac{1}{\sqrt{10}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

und die Reihe somit die harmonische Reihe als Minorante hat, $\square$

Aufgabe 5 Mit dem Wurzelkriterium erhält man

$$R = \limsup \sqrt[k]{k^2+2^k} \geq \limsup \sqrt[k]{2^k} = 2$$

und

$$\begin{aligned}
R &= \limsup \sqrt[k]{k^2+2^k} \leq \limsup \sqrt[k]{2^k+2^k}\\
&= \limsup \sqrt[k]{2}\cdot\sqrt[k]{2^k} = 1\cdot 2 = 2.
\end{aligned}$$

Damit gilt $R=2$ und es muss nur noch die Konvergenz der Reihe in den Punkten $x=2$ und $x=-2$

nachgeprüft werden.

Für $x = 2$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k^2 + 2^k} = 1 \neq 0,$$

also konvergiert die zugehörige Reihe nicht.

Für $x = -2$ ist die Folge $\frac{(-2)^k}{k^2+2^k}$ nicht einmal mehr konvergent, insbesondere also keine Nullfolge und die Reihe auch hier nicht konvergent,$\square$

Aufgabe 6 *Variante 1:* Es gibt hier zwei Fälle.

1. Fall: $a_n > 0$ und $a_0 < 0$. Dann gilt auf jeden Fall $p(0) = a_0 < 0$. Außerdem ist für $x = \max\{\frac{|a_0|+|a_1|+...+|a_{n-1}|+1}{a_n}, 1\} > 0$ auch

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \\
&\geq -|a_0| - |a_1| \cdot |x| - |a_2| \cdot |x|^2 - ... - |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + a_n x^n \\
&\geq -|a_0| \cdot |x|^{n-1} - |a_1| \cdot |x|^{n-1} - |a_2| \cdot |x|^{n-1} - ... - |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + a_n x^n \\
&= |x|^{n-1}(-|a_0| - |a_1| - |a_2| - ... - |a_{n-1}| + a_n x) \\
&> x^{n-1}(-|a_0| - |a_1| - |a_2| - ... - |a_{n-1}| + a_n \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}| + 1}{a_n}) \\
&= x^{n-1} > 0.
\end{aligned}$$

Analog ist für $y = \min\{\frac{-|a_0|-|a_1|-...-|a_{n-1}|-1}{a_n}, -1\} < 0$ dann

$$\begin{aligned}
p(y) &= a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n \\
&\geq -|a_0| - |a_1| \cdot |y| - |a_2| \cdot |y|^2 - ... - |a_{n-1}| \cdot |y|^{n-1} + a_n y^n \\
&\geq -|a_0| \cdot |y|^{n-1} - |a_1| \cdot |y|^{n-1} - |a_2| \cdot |y|^{n-1} - ... - |a_{n-1}| \cdot |y|^{n-1} + a_n y^n \\
&= |y|^{n-1}(-|a_0| - |a_1| - |a_2| - ... - |a_{n-1}| + a_n |y|) \\
&> (-y)^{n-1}(-|a_0| - |a_1| - |a_2| - ... - |a_{n-1}| + a_n \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}| + 1}{a_n}) \\
&= (-y)^{n-1} > 0.
\end{aligned}$$

Nun ist p als Polynom stetig und hat nach dem Zwischenwertsatz sowohl auf $(0, x)$ als auch auf $(y, 0)$ eine Nullstelle.

2. Fall: $a_n < 0$ und $a_0 > 0$. Betrachte hier nun Fall 1 für $-p$ (was offensichtlich nichts an den Nullstellen ändert),$\square$

Variante 2:

1. Fall: $a_n > 0$ und $a_0 < 0$. Dann gilt auf jeden Fall $p(0) = a_0 < 0$. Natürlich ist auch hier $p(0) = a_0 < 0$ und es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty.$$

Insbesondere gibt es also ein $x > 0$ mit $p(x) > 1$ und ein $y < 0$ mit $p(y) > 1$. Nach dem Zwischenwertsatz sowohl auf $(0, x)$ als auch auf $(y, 0)$ eine Nullstelle.

2.Fall: $a_n < 0$ und $a_0 > 0$. Analog für $-p, \square$

Bemerkung: Natürlich kann p auch mehr als zwei Nullstellen haben, wie das Polynom $p(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = (x-1)(x+2)(x-3)(x-4)$ zeigt.

Aufgabe 7 (a) Es gilt nach Quotientenregel, dass $f'(x) = \frac{25x^2-14x-5}{(5x^2+1)^2}$. Also ist $f'(0) = -5$.
(b) Mit der Kettenregel ist $g'(x) = \exp(x^2 + \sin x) \cdot (2x + \cos x)$. Somit ist $g'(0) = 1, \square$

Aufgabe 8 Zunächst prüfen wir, ob h stetig ist. Es gilt $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp(x) = 1$ und $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} -x^2 + x + 1 = 1$. Deswegen ist h stetig für $x_1 = 0$. Weiterhin gilt für die linksseitige Ableitung

$$h_l(x_1) = \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon<0} \frac{h(x_1+\varepsilon) - h(x_1)}{\varepsilon} = -2x_1 + 1 = 1$$

und für die rechtsseitige Ableitung, dass

$$h_r(x_1) = \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \frac{h(x_1+\varepsilon) - h(x_1)}{\varepsilon} = \exp(x_1) = 1.$$

Somit ist h differenzierbar in $x_1 = 0$ mit $h'(x_1) = 1, \square$

Aufgabe 9 Angenommen e ist rational. Dann ist $e = \frac{q}{p}$ und wegen $e > 0$ somit auch $\frac{1}{e} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$. Nun haben wir

$$\frac{1}{e} = \frac{p}{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Damit ist

$$\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Mit dem Hinweis erkennen wir, dass

$$|\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{k!}| \leq \frac{1}{(q+1)!}.$$

Multiplizieren wir dies mit $q!$ ergibt sich

$$|p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k q!}{k!}| \leq \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Da nun die Summanden auf der linken Seite alle ganzzahlig sind, folgt $|p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k q!}{k!}| = 0$. Damit ist auch

$$\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 0,$$

aber multiplizieren wir die rechte Seite mit $(-1)^{q+1}$, so ist

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+q+1}}{k!} &= \left(\frac{(-1)^{2q+2}}{(q+1)!} + \frac{(-1)^{2q+3}}{(q+2)!}\right) + \left(\frac{(-1)^{2q+4}}{(q+3)!} + \frac{(-1)^{2q+5}}{(q+4)!}\right) + ... \\ &= \left(\frac{1}{(q+1)!} - \frac{1}{(q+2)!}\right) + \left(\frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+4)!}\right) + ... \\ &> 0, \end{aligned}$$

da offensichlich alle Ausdrücke in den Klammern strikt positiv sind. Widerspruch, $\square$