Mathematik 4 für Physiker: Gliederung und Prüfungsschwerpunkte

Sommersemester 2014, 4 SWS Vorlesung, 2 SWS Übungen, Prof. T. Eisner und Prof. K.-D. Kürsten

Fett gedruckte Stichworte betreffen grundlegende Themen, die zum Basiswissen gehören. Nach fakultativen Themen wird höchstens gefragt, um eine erreichte gute Bewertung noch zu verbessern. Nach Stoff aus den Übungen wird ebenfalls gefragt.

I Hilberträume

I.0 Einleitung

Normen auf $\mathbb{C}^d$, Konvergenz = koordinatenweise Konvergenz, *Eigenschaften von $\mathbb{C}^d$ und Gegenbeispiele für unendlichdiensionale Räume*, **Räume l^2 und $C[0,1]$ mit $\|\cdot\|_2$**

I.1 Norm und Skalarprodukt

Definition des Vektorraumes und Skalarproduktes, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, induzierte Norm, Parallelogrammgleichung

I.2 Metrik und einige topologische Begriffe

Begriff der Metrik und metrischen Raumes, topologische Begriffe (offen, abgeschlossen, Umgebung, Cauchyfolge, Häufungspunkt, Vollständigkeit, Separabilität)

I.3 Hilberträume: Definition und Beispiele

Begriff des Prähilbertraumes und Hilbertraumes, Beispiele, *Vervollständigung eines Prähilbertraumes*

I.4 Orthogonalität, Teilräume und Zerlegungen

Lineare Teilräume, Projektionssatz, Orthogonalität, das Orthogonalkomplement, Orthogonalzerlegung, Eigenschaft des Orthogonalkomplementes (Lemma 4.5), *Funktionale und die Aussage des Satzes von Fréchet-Riesz*

I.5 Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen

Orthogonal- und Orthonormalsysteme (ONS), Beispiele, Fourierkoeffizienten, Beispiele, Eigenschaften von ONS (Lemma 5.3), *Konstruktion von ONS (Gram-Schmidt-Verfahren)*, **Besselsche Ungleichung, Folgerung 5.6 (Konvergenz der Fourierreihen), Fourierreihe, Eigenschaften der ONS (Theorem 5.8), Orthonormalbasen, Parsevalsche Gleichung**, *Darstellung des Skalarproduktes durch die Fourierkoeffizienten (Proposition 5.10)*, **Beispiele von Orthonormalbasen**, *Satz von Stone-Weierstrass*

I.6 Isomorphie von separablen Hilberträumen

Isomorphie zwischen d-dimensionalen Räumen und $\mathbb{C}^d$, Isomorphie zwischen separablen Hilberträumen und l^2, *Beispiel eines nichtseparablen Hilbertraumes*

II Funktionenräume

II.1 Das Lebesgue-Integral

a) Begriff des Maßes (**Mengenalgebra, Ring von Mengen, σ-Algebra, Maß, Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum,** *Beispiele 2, 4, 5, 7, 8, 9, insbesondere* **Beispiel: 2 Zählmaß, Beispiel 5: durch n-dimensionales Volumen auf der von Produkten halboffener Intervalle erzeugten Mengenalgebra gegebenes Maß einschließlich Nachweis der endlichen Additivität,** *Beispiel 9 aus Übung: Variante von Beispiel 5 mit beliebigen beschränkten Quadern, Quader und spezielle Würfel*)
[Nachweis der σ-Additivität ist fakultativ.]

b) Konstruktion des Lebesgue-Integrals (**Nullmengen einschließlich Satz über abzählbare Vereinigungen, Konstruktion des Raumes der integrierbaren Funktionen und des Integrals durch Fortsetzung des auf elementaren Treppenfunktionen gegebenen Integrals, elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals, Konvergenzsätze von Levi, Fatou und Lebesgue, Integraldreiecksungleichung, Dichtheit der elementaren Treppenfunktionen,** *Satz von der fast überall konvergenten Teilfolge und Vollständigkeit*)
[Beweise für Hilfssätze, für den Satz von Beppo Levi und für die Vollständigkeit sind fakultativ.]

c) Konstruktion des Lebesgueschen Maßraumes (**Konstruktion des Maßes aus dem Integral im σ-endlichen Fall oder im Fall von Beispiel 5, Eigenschaften des Maßes ohne Beweise, Stetigkeitseigenschaften des Maßes und Subadditivität, vollständige Maßräume**)

d) Räume messbarer und integrierbarer Funktionen (**Begriff der messbaren Funktion, Vererbungseigenschaften für messbare Funktionen, Zusammenhang zwischen messbaren und integrierbaren Funktionen und zwischen Nullmengen und Integral ohne Beweise, Produkt eines Maßes mit einer nichtnegativen messbaren Funktion, Bezeichnungen für Integrale einschließlich Integrale über Teilmengen und Wert ∞ für ein Integral**)

II.2 Die Räume $L_p(\mu)$

a) **Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski**

b) Definition und Eigenschaften der Räume $L_p(\mu)$ (**Räume l_p und Spezialfall der Ungleichungen von Hölder und Minkowski im diskreten Fall, Räume $\mathscr{L}_p(\mu)$ und $L_p(\mu)$, deren Linearität, Norm für $L_p(\mu)$ und Vollständigkeit, Hilberträume $L_2(\mu)$ und l_2 und deren Skalarprodukte**, *Erzeugung durch positive Elemente, dichte Teilmengen in $L_p(\mu)$ oder in $L_p(\mathbb{R}^d)$ für $p < \infty$, Raum $C_c(\mathbb{R}^d)$,* **Lebesgue-Integrierbarkeit von Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$ und Anwendung auf Integrale von Funktionen, die auf einer aufsteigenden Folge von Teilmengen Riemann-integrierbar sind**)
[Beweise für dichte Teilmengen und für Vollständigkeit sind fakultativ.]

III Operatoren auf Hilberträumen

III.1 **Beschränkte lineare Operatoren, Operatorennorm und deren Grundeigenschaften**

III.2 **Begriffe: Adjungierte, selbstadjungierte, isometrische, unitäre Operatoren**, grundlegende Eigenschaften und Charakterisierungen, Beispiele: Integraloperatoren mit quadratintegrablem Kern

III.3 **Projektionsoperatoren** incl. wann Summe, Produkt, Differenz wieder PO ist

III.4 **Spektrum und Resolvente (offen, abgeschlossen, Eigenwerte, Resolventenidentitäten, Reihenentwicklungen, Spektralradius**, nichtleer, Beispiele: Matrizen, Multiplikationsoperator mit t, diskrete Multiplikationsoperatoren, deren Eigenwerte und Spektrum

III.5 Selbstadjungierte Operatoren (**Kriterium für Resolventenmenge**, obere und unter Grenze, Begriff der Spektralschar, Formulierung des Spektraltheorems für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)

III.6 Kompakte Operatoren

Definition, Eigenschaften, Beispiele (endlichdimensionale Operatoren, Multiplikatoren, *Integraloperatoren*), **Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren**

IV Verallgemeinerung von Eigenschaften des n-dimensionalen Riemann-Integrals

IV.1 Definitionen und Sätze für das n-dimensionale Riemann-Integral (**Zerlegung kompakter Quader**, *Darbouxsche Unter- und Obersumme,* **Schwankungssumme**, *oberes und unteres Darbouxsches Integral,* **oberes und unteres Integral** *und deren Charakterisierungen durch elementare Treppenfunktionen und durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$,* **Riemann-Integral**, *Übereinstimmung mit Lebesgue-Integral,* **Lebesguesches Kriterium, Riemannsches Kriterium, Permanenzeigenschaften, Jordansche Nullmengen einschließlich Kriterien, quadrierbare Mengen einschschließlich Kriterium, Integration über aufsteigende Vereinigungen von quadrierbaren Mengen**)

IV.2 Satz von Fubini und Transformationssatz (**Inhalt dieser Sätze** *und Berechnung von Riemann-Integralen als iterierte Integrale, Quadrierbarkeit von Ordinatenmengen, Prinzip des Cavalieri*)
[Bezüglich des fakultativen Beweises des Satzes von Fubini wird auf die Literatur verwiesen. Der Beweis des Transformationssatzes ist auch fakultativ.]

IV.3 Sätze über Parameterintegrale (**Stetigkeitssatz und Differentiationssatz** *und Anwendungsbeispiele*)