II.1 Das Lebesgue-Integral

Skript zur Vorlesung von Professor K.-D. Kürsten
nach dessen Vorlesungsskript

Eingabe in Latex durch:
Hannes Nagel, Thomas Meissner, Alexander Lajn, Bela Bauer,
Martin Lange, K.-D. Kürsten

4. August 2005, 14. Mai 2012, 14. Juli 2014

II Funktionenräume

II.1 Das Lebesgue-Integral

II.1.a) Begriff des Maßes

Definition Ein nichtleeres System Σ von Teilmengen einer nichtleeren Menge X heißt Mengenalgebra, wenn

1. $M \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus M \in \Sigma$
2. $M_1, M_2 \in \Sigma \Longrightarrow M_1 \cup M_2 \in \Sigma$

Gilt zusätzlich

3. Für jede Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $M_j \in \Sigma$ gilt $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma$

so heißt Σ σ-Algebra von Mengen.

Mengenalgebra

- $M_1 \cap M_2 = X \setminus ((X \setminus M_1) \cup (X \setminus M_2))$
- $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap (X \setminus M_2)$
- $\emptyset = M \cap (X \setminus M)$
- $X = X \setminus \emptyset$

Die entstandenen Mengen sind dabei Elemente der Mengenalgebra Σ, falls $M_1, M_2, M \in \Sigma$.

- $M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$ (disjunkte Vereinigung).

σ-Algebra

- Die Vereinigung $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ lässt sich als Vereinigung disjunkter Mengen $M_1 \bigcup \bigcup\limits_{j=2}^{\infty} \left(M_j \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} M_k \right)$ schreiben.

- Ferner ist der unendliche Durchschnitt $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j = X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (X \setminus M_j)$ einer Folge (M_j) von Elementen von Σ wieder ein Element von Σ.

Definition Die von einem System Σ_0 von Teilmengen einer Menge X erzeugte σ–Algebra Σ ist die kleinste σ–Algebra von Teilmengen von X, die alle Elemente von Σ_0 enthält.

Für jedes solche Σ_0 existiert die erzeugte σ–Algebra Σ. Sie ist gleich dem Durchschnitt des Systems aller derjenigen σ–Algebra von Teilmengen von X, die Σ_0 enthalten

Definition Die vom System der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes X erzeugte σ-Algebra (d.h. die kleinste σ-Algebra auf X, die alle offenen Mengen enthält) heißt Borelsche σ-Algebra. Ihre Elemente nennt man Borel-Mengen.

Definition Sei Σ eine Mengenalgebra auf X. Eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$ heißt endlich additives Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und falls für $M_1, M_2 \in \Sigma$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ stets gilt $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$. Gilt darüber hinaus für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ in Σ mit $M = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j \in \Sigma$ die Gleichung $\mu(M) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$, so heißt die Abbildung μ ein σ-additives Maß (oder einfach nur Maß).

Monotonie (ÜA) Ist μ ein endlich additives Maß auf der Mengenalgebra Σ, so gilt für Mengen $M_1 \subset M_2$ aus Σ stets $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$.

Endliche Subadditivität (ÜA) Ist μ ein endlich additives Maß auf der Mengenalgebra Σ und gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^{m} M_j$ wobei $M, M_j \in \Sigma$ sind, so folgt $\mu(M) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(M_j)$.

Definition Ein Maßraum ist ein Tripel (X, Σ, μ), wobei X eine nichtleere Menge, Σ eine σ-Algebra auf X und μ ein σ-additives Maß auf Σ ist.

Definition Ein Maß heißt endlich, wenn $\mu(X) < \infty$.
Ein Maß heißt σ-endlich, wenn eine Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ in Σ mit $\mu(A_k) < \infty$ und $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ existiert.
Ein Maßraum (X, Σ, μ) mit $\mu(X) = 1$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Terminologie für Wahrscheinlichkeitstheorie

- Elemente von X – Elementarereignisse
- Elemente von Σ – Ereignisse
- $\mu(M) = P(M)$ - Wahrscheinlichkeit, dass Ereigniss $M \in \Sigma$ bei einem Versuch eintritt

Beispiel 1 $X = \{1, ..., 6\}$, Σ – System aller Teilmengen von X,
$\mu(M) = P(M) = \frac{1}{6} \times$ Anzahl der Elemente von M

Beispiel 2 (Zählmaß)
$X \neq \emptyset$ sei eine Menge, Σ sei das System aller Teilmengen von X, $\mu(M) =$ Anzahl der Elemente von M

Beispiel 3 (etwas patologisch und unnütz) $X = \mathbb{R}$, Σ System aller Teilmengen

$$\mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ endlich oder abzählbar unendlich} \\ \infty & \text{falls } M \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

Dieses Maß ist σ-additiv, aber nicht σ-endlich.
Modifikation:

$$\mu(M) = \begin{cases} 0 & \text{falls } M \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } M \text{ unendlich} \end{cases}$$

Dies ist ein endlich additives, nicht σ-additives Maß.

Beispiel 4 (Ermöglicht die Konstruktion von Lebesgue-Stiltjes Maßen und als Spezialfall die Konstruktion das Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$)

$X = \mathbb{R}$

Für $a \le b$ bezeichne $Q_{a,b} = (a, b] \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$ das links offene halboffene Intervall. Dabei sind für a und b neben reellen Werten auch die Werte $-\infty$ und ∞ erlaubt und es gelten $Q_{a,\infty} = (a, \infty)$, $Q_{a,a} = Q_{\infty,\infty} = \emptyset$.

Σ_0 bestehe aus aus allen endlichen Vereinigungen solcher Mengen $Q_{a,b}$. Wegen $\mathbb{R} \setminus Q_{a,b} = Q_{-\infty,a} \cup Q_{b,\infty}$ ist Σ_0 eine Mengenalgebra. Darüberhinaus hat jedes $M \in \Sigma_0$ mit $M \ne \emptyset$ Darstellungen $M = \bigcup_{j=1}^m Q_{a_j,b_j}$ mit paarweise disjunkten nichtleeren Intervallen Q_{a_j,b_j}, die kanonische Darstellungen genannt werden sollen. Gegebenenfalls könnte dabei zusätzlich $b_j \le a_{j+1}$ verlangt werden. Durch Hinzunahme neuer Teilungspunkt lassen sich kanonische Darstellungen verfeinern. So erhält man für den neuen Teilungspunkt $c \in (a_j, b_j)$ eine Verfeinerung, indem man Q_{a_j,b_j} durch $Q_{a_j,c} \cup Q_{c,b_j}$ ersetzt.

Bezeichne $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige monoton wachsende Funktion und sei $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$, $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$.
Der für eine kanonische Darstellung $M = \bigcup_{j=1}^m Q_{a_j,b_j}$ definierte Wert $\sum_{j=1}^m F(b_j) - F(a_j)$ ändert sich bei Verfeinerung der kanonischen Darstellung nicht. Da kanonische Darstellungen derselben Menge gemeinsame Verfeinerungen besitzen, hängt dieser Wert nur von M, nicht aber von der konkreten Wahl der kanononischen Darstellung ab. Deshalb ist der Wert

$$\mu_0(M) = \sum_{j=1}^m F(b_j) - F(a_j)$$

wohldefiniert. Definiert man noch $\mu_0(\emptyset) = 0$, so kann man durch Betrachtung kanonischer Darstellungen disjunkter Mengen M_1, M_2 aus Σ_0 sehen, dass $\mu_0(M_1 \cup M_2)) = \mu_0(M_1) + \mu_0(M_2)$ ist, dass also μ_0 zumindest ein endlich additives Maß auf Σ_0 ist. In diesen Rechnungen muss in den möglichen Fällen $a = -\infty$ und $F(a) = -\infty$ oder $b = \infty$ und $F(b) = \infty$ sinnvoll mit diesen Werten gerechnet werden. So ist z. B. $b - (-\infty) = \infty$ oder $\infty - a = \infty$ zu nehmen.
Im Falle $F(x) = x$ ist $\mu_0(M) = \int \chi_M \,\mathrm{d}\,x$ (eigentliches oder uneigentliches Riemannintegral) und die endliche Additivität (und sogar die Definition) von μ_0 lässt sich einfacher auf Eigenschaften des Riemannintegrals zurückführen.

Nachweis der σ-Additivität
Es seien Mengen M, M_j aus Σ_0 mit paarweise disjunkten M_j so gewählt, dass $M = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ gilt. Aus $M \supset \bigcup_{j=1}^k M_j$ folgt wegen der Monotonie $\mu_0(M) \ge \mu_0(\bigcup_{j=1}^k M_j) = \sum_{j=1}^k \mu_0(M_j)$, also $\mu_0(M) \ge \sum_{j=1}^\infty \mu_0(M_j)$.

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung können $\mu_0(M) > 0$ und $\sum_{j=1}^\infty \mu_0(M_j) < \infty$ vorausgesetzt werden, da sonst nichts zu beweisen ist. Zunächst gehen wir von einer kanonischen Darstellung $M = \bigcup_{k=1}^m Q_{a_k,b_k}$ aus. Wenn die behauptete Ungleichung für Mengen M vom Typ $Q_{a,b}$ schon bekannt wäre, so würde aus $Q_{a_k,b_k} = \bigcup_{j=1}^\infty Q_{a_k,b_k} \cap M_j$ (disjunkte Vereinigung) folgen $\mu_0(Q_{a_k,b_k}) \le \sum_{j=1}^\infty \mu_0(Q_{a_k,b_k} \cap M_j)$ und aus der endlichen Additivität würde die Behauptung für $M = \bigcup_{k=1}^m Q_{a_k,b_k}$ folgen. Man kann deshalb gleich $M = Q_{a,b}$ voraussetzten.
Nun hat jedes nichtleere M_j eine kanonische Darstellung $M_j = \bigcup_{k=1}^{m_j} Q_{a_{j,k},b_{j,k}}$. Die (disjunkte) Vereinigung aller dabei vorkommenden $Q_{a_{j,k},b_{j,k}}$ ist $M = Q_{a,b}$ und es ist zu beweisen, dass

$$\mu_0(M) \le \sum_{j=1}^\infty \mu_0(M_j) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_j} \mu_0\left(Q_{a_{j,k},b_{j,k}}\right)$$

ist. Ordnet man alle vorkommenden Intervalle $Q_{a_{j,k},b_{j,k}}$ als neue Folge Q_{a_j,b_j} an, so kann man für den Rest des Beweises gleich annehmen, dass $M_j = Q_{a_j,b_j}$ ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig festgelegt. Wir wählen $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$ (z.B. $\varepsilon_j = 4^{-j}\varepsilon$).

Wir betrachten zuerst den Fall $\mu_0(Q_{a,b}) < \infty$, d. h. $F(a) > -\infty$ und $F(b) < \infty$. Dann existiert $c \in (a,b)$ mit $\mu_0(Q_{a,c}) = F(c) - F(a) < \varepsilon$. Im Fall $b = \infty$ existiert $d \in (c,\infty)$ mit $\mu_0(Q_{d,\infty}) < \varepsilon$. Ist $b < \infty$, so setzt man $d = b$. Für jedes j mit endlichem b_j findet man $d_j > b_j$ mit $F(d_j) - F(b_j) = \mu_0(Q_{b_j,d_j}) < \varepsilon_j$. Ist eines der b_j gleich ∞, so wählt man $d_j = b_j$. Dann bilden die Intervalle (a_j, d_j) eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[c,d]$ und man kann eine endliche offene Überdeckung der Gestalt $\bigcup_{j=1}^{m} Q_{a_j,d_j}$ auswählen. Somit folgt die Ungleichung $\mu_0(Q_{c,d}) \leq \sum_{j=1}^{m} Q_{a_j,d_j}$ aus der endlichen Subadditivität. Unter Beachtung der konstruierten Eigenschaften von c, d, d_j folgt

$$\begin{aligned}\mu_0(Q_{a,b}) - 2\varepsilon = \mu_0(Q_{c,d}) + \mu_0(Q_{a,c}) - \varepsilon + \mu_0(Q_{d,b}) - \varepsilon < \mu_0(Q_{c,d}) \\ \leq \sum_{j=1}^{m} (\mu_0(Q_{a_j,b_j}) + \mu_0(Q_{b_j,d_j})) < \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \mu_0(Q_{a_j,b_j}).\end{aligned}$$

Führt man nacheinander die Grenzübergänge für $m \to \infty$ und $\varepsilon \to 0+$ aus, so folgt nun die behauptete Ungleichung $\mu_0(Q_{a,b}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(Q_{a_j,b_j})$ im betrachteten Fall.

Wäre $\mu_0(Q_{a,b}) = F(b) - F(a) = \infty$, so könnte man endliche c, d mit $a < c < d < b$ und $F(d) - F(c) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) + \varepsilon$ finden. Durch Anwendung des bereits bewiesenen Falles mit $Q_{c,d}$ anstelle $Q_{a,b}$ und $M_j \cap Q_{c,d}$ anstelle M_j erhielte man also einen Widerspruch, woraus folgt dass dieser Fall unter der bestehenden Voraussetzunge $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) < \infty$ gar nicht auftreten kann.

Spezialfälle Ist $a > -\infty$ und ist F auf $(-\infty, a)$ konstant, so ist $\mu_0((-\infty, c] = 0$ für jedes $c < a$. In diesem Fall kann auf der Menge $[a,\infty)$ die Mengenalgebra $\Sigma_1 = \{M \cap [a,\infty)\,;\, M \in \Sigma_0\}$ mit dem σ–additiven Maß $\mu_1(M \cap [a,\infty)) = \mu_0(M)$ betrachten. Hier ist zu beachten, dass für $c < a$ gilt $\mu_1(\{a\}) = F(a) - F(c)$, was durchaus positiv sein kann. Es reicht also nicht, F nur auf $[a,\infty)$ zu kennen.
Analog kann man für endliche b und für eine auf $[b,\infty)$ konstante Funktion F ein σ–additiven Maß μ_2 auf $\Sigma_2 = \{M \cap (-\infty, b]\,;\, M \in \Sigma_0\}$ mit $\mu_2(M \cap (-\infty, b]) = \mu_0(M)$ definieren.
Sind die Voraussetzungen beider bisherigen Spezialfälle erfüllt, so kann man ein σ–additiven Maß μ_3 auf $\Sigma_3 = \{M \cap [a,b]\,;\, M \in \Sigma_0\}$ mit $\mu_3(M \cap [a,b]) = \mu_0(M)$ definieren.

Variante Ist (a,b) irgendein offenes Intervall und ist F eine auf diesem Intervall gegebene monoton wachsende, rechtsseitig stetige, reellwertige Funktion, so kann man $F(a) = \lim_{x\to a+0}$ und $F(b) = \lim_{x\to b-0}$ definieren, Dann existiert auf der Mengenalgebra $\Sigma_4 = \{M \cap (a,b)\,;\, M \in \Sigma_0\}$ ein σ–additiven Maß μ_4, so dass für $a \leq c \leq d \leq b$ gilt $\mu_4(Q_{c,d} \cap (a,b)) = F(d) - F(c)$. im Unterschied zu den vorherigen Konstruktionen sind hier auch für endliche a bzw. b Werte $F(a) = -\infty$, $F(b) = \infty$ möglich.

Beispiel 5 (Ermöglicht Konstruktion des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes)
$X = \mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen $Q_{a,b} = \prod_{j=1}^{n} Q_{a_j,b_j} = \{x \in \mathbb{R}^n,\, a_j < x_j \leq b_j \quad (\forall j \in \{1,...,n\})\}$, wobei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ n–Tupel sind für die $a_j \leq b_j$ vorausgesetzt wird und wobei die Einträge a_j und b_j neben reellen Werten auch die Werte $-\infty$ und ∞ annehmen können. Dabei sind die Mengen Q_{a_j,b_j} die in Beispiel 4 betrachteten Mengen.

Σ_0 wird gebildet aus allen endlichen Vereinigungen von Quadern obiger Gestalt.

$\mu_0(M)$ ist nach Definition der Jordansche Inhalt von M, falls $M \in \Sigma_0$ eine beschränkte Menge ist. Ist $M \in \Sigma_0$ unbeschränkt, so ist $\mu_0(M) = \infty$.

Die endliche Additivität von μ_0 folgt aus Eigenschaften des Riemann-Integrals und der Beweis der σ-Additivität kann so ähnlich, wie in Beispiel 4 geführt werden.

Verallgemeinerung Seien monoton wachsende rechtsseitig stetige Funktionen $F_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($j \in \{1, ..., n\}$) gegeben. Sei ferner $F_j(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_j(x)$ und $F_j(\infty) = \lim_{x\to\infty} F_j(x)$.
Dann kann ein σ-additives Maß μ_0 auf Σ_0 mit $\mu_0(Q_{a,b}) = \prod\limits_{j=1}^{n} (F_j(b_j) - F_j(a_j))$ definiert werden.

Beispiel 6
$X \subset R^n$ quadrierbar mit positivem Jordanschen Inhalt
Σ_0 bestehe aus den quadrierbaren Teilmengen von X.
$\mu_0(M)$ sei der Jordanscher Inhalt von M.

Modifikation: (Ermöglicht ebenfalls die Konstruktion des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes)
$X = \mathbb{R}^n$
Σ_0 bestehe aus den quadrierbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und deren Komplementärmengen. Dies ist eine Mengenalgebra.
$\mu_0(M)$ sei der Jordanscher Inhalt von M, falls M quadrierbar ist. Ist M Komplementärmenge einer quadrierbaren Menge, so setzt man $\mu_0(M) = \infty$.

Idee für σ-Additivität: Approximation von Außen und Innen mit Mengen der Algebra Σ_0 aus Beispiel 5.

Beispiel 7
Ist μ_0 ein σ–additives Maß auf einer Mengenalgebra Σ_0 von Teilmengen der Menge X und ist $Y \in \Sigma_0$ nichtleer, so ist $\Sigma_1 = \{M \cap Y\,;\, M \in \Sigma_0\}$ eine Mengenalgebra von Teilmengen von Y mit dem σ–additiven Maß $\mu_1(M \cap Y) = \mu_0(M \cap Y)$.

Beispiel 8
Ist μ_0 ein σ–additives Maß auf einer Mengenalgebra Σ_0 von Teilmengen der Menge X und ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist $\Sigma_1 = \{f(M)\,;\, M \in \Sigma_0\}$ eine Mengenalgebra von Teilmengen von Y mit dem σ–additiven Maß $\mu_1(f(M)) = \mu_0(M)$.

Dies lässt sich auf bijektive Parametrisierungen $\Phi : P \to Y$ von Kurven oder Flächen Y anwenden. Auf der Parametermenge $P \subset \mathbb{R}^n$ könnte man Mengenalgebra und Maß mit der Methode aus Beispiel 7 aus einem auf $\mathbb{R}^n$ gegebenen Maß gewinnen, welches etwa aus Beispiel 5 stammen könnte. Nachteilig wäre dabei bisher noch, dass der Verzerrungsfaktor für Inhalte, der durch die Parametrisierung Φ bestimmt wird, nicht berücksichtigt wird. Dieser Mangel lässt sich später noch durch die Multiplikation des Maßes mit einer geeigneten nichtnegativen Funktion beheben.

II.1.b) Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 von Teilmengen von X und einem σ-additiven Maß μ_0. Für die Erweiterung der Mengenalgebra und die Fortsetzung des Maßes werden wir später noch voraussetzen, dass μ_0 σ-endlich ist. Für die jetzt folgende Konstruktion des Lebesgue-Integrals wird diese Voraussetzung nicht benötigt.

Oder sei (X, Σ_0, μ_0) das Tripel aus 9.1.a), Beispiel 5. Dieser Fall wir im Folgenden als Referenzfall zitiert. Er führt zur Konstruktion des üblichen Lebesgue-Integrals auf $\mathbb{R}^n$.

Wir konstruieren einen Raum $\mathscr{L}'$ reellwertiger integrierbarer Treppenfunktionen und vergrößern diesen mehrfach $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}'' \subset ...$ wobei jeweils das Integral fortgesetzt wird.

Konstruktion von $\mathscr{L}'$ Wir setzen

$$\Sigma_{0,\text{fin}} = \{M \in \Sigma_0; \mu_0(M) < \infty\}.$$

$\mathscr{L}'$ besteht aus allen reellen Linearkombinationen von Funktionen χ_M für $M \in \Sigma_{0,\text{fin}}$, d.h. aus Funktionen der Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k} \qquad (l \in \mathbb{N}, M_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}, c_k \in \mathbb{R}).$$

Hat f diese Darstellung, so definieren wir das Integral von f als $I(f) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k \mu_0(M_k)$.

Die Elemente von $\mathscr{L}'$ nennen wir *reelle elementare Treppenfunktionen* bezüglich (X, Σ_0, μ_0).

Eigenschaften von $\mathscr{L}'$: Linearer Raum, stabil bezüglich Bildung von Produkten, Maximum und Minimum von 2 Funktionen

Eigenschaften von I: Linear, monoton

Diese Eigenschaften beruhen darauf, dass man das Mengensystem $\{M_k\}$ in der Darstellung $f = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k}$ verfeinern kann, ohne $I(f)$ zu ändern. Ebenso kann man Summanden mit gleichen Mengen zusammenfassen. Somit kann man für zwei Funktionen ohne Änderung des Integrals zu Darstellungen übergehen, bei denen alle beteiligten Mengen aus einem endlichen System paarweise disjunkter Mengen aus $\Sigma_{0,\text{fin}}$ stammen, wobei in jeder Summe jede Menge höchstens einmal vorkommt.

Definition $N \subset X$ heißt Nullmenge, bezüglich (X, Σ_0, μ_0), falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $M_j \in \Sigma_0, N \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_j) < \varepsilon$ gefunden werden kann.

Teilmengen von Nullmengen sind offensichtlich Nullmengen.

Satz 1 Sind N_k $(k \in N)$ Nullmengen, so ist auch $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ Nullmenge.

Beweis Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Finde $\varepsilon_k > 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.
Finde Überdeckung $N_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{k,j}$ mit $M_{k,j} \in \Sigma_0$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(M_{k,j}) < \varepsilon_k$.

Somit folgt $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} M_{k,j}, \qquad \sum_{k,j=1}^{\infty} \mu_0(M_{k,j}) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.

Beispiele von Nullmengen

- $\mathbb{R}^n$:(Referenzfall) Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^n$ deren sämtliche Koordinaten rationale Zahlen sind.
- $\mathbb{R}^n$:(Referenzfall) Vereinigungsmenge aller Seitenflächen spezieller Würfel, d. h. Vereinigungsmengen von Rändern von Mengen des Typs $\prod_{p=1}^n ((k_p-1)/2^{-l}, k_p/2^{-l}]$ mit $k_p \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{N}_0$.
- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: (Referenzfall) Cantormenge oder Cantorsches Diskontinuum $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{k,j=0}^{\infty} \left(\frac{3j+1}{3^k}, \frac{3j+2}{3^k}\right) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}\, ,\ a_k \in \{0,2\} \right\}$
  Der Nachweis dafür, dass die Cantormenge eine Nullmenge ist, wird später nach Entwicklung der Theorie wesentlich einfacher.

Sprechweise: Eine Eigenschaft (formuliert für Elemente $x \in X$) gilt *fast überall (f.ü.)*, falls eine Nullmenge $N \subset X$ so existiert, daß die Eigenschaft für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Hilfssatz 1: Gelten für die Glieder einer Folge M_j von Mengen aus $\Sigma_{0,\text{fin}}$ die Relationen $M_j \supset M_{j+1}$ und ist $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j$ eine Nullmenge, so folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = 0$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Nullmenge existieren $U_j \in \Sigma_0$ mit $N = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(U_j) < \varepsilon$. Für $\widetilde{M_j} = M_j \setminus \bigcup_{l=1}^{j} U_l$ gelten dann $\widetilde{M_j} \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} \widetilde{M_j} = \emptyset$. Da wegen der σ-Additivität aus $\widetilde{M_l} = \bigcup_{j=l}^{\infty}(\widetilde{M_j} \setminus \widetilde{M}_{j+1})$ folgt $\mu_0(\widetilde{M_1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(\widetilde{M_j} \setminus \widetilde{M}_{j+1}) < \infty$, existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mu_0(\widetilde{M_k}) = \sum_{j=k}^{\infty} \mu_0(\widetilde{M_j} \setminus \widetilde{M}_{j+1}) < \varepsilon$. Aus der endlichen Subadditivität folgt nun $\mu_0(M_k) \le \mu_0(\widetilde{M_k} \cup \bigcup_{l=1}^{k} U_l) \le \mu_0(\widetilde{M_k}) + \sum_{l=1}^{k} \mu_0(U_l) < 2\varepsilon$. Da die Folge $(\mu_0(M_j))$ monoton fällt, folgt die Behauptung.

Folgerungen Ist $N \in \Sigma_0$ eine Nullmenge, so gilt $\mu_0(N) = 0$, denn Hilfssatz 1 kann auf $M_j = N$ angewendet werden. Nimmt $f \in \mathscr{L}'$ nur auf einer Nullmenge von 0 verschiedene Werte an, so ist $I(f) = 0$. Unterscheiden sich $f_1, f_2 \in \mathscr{L}'$ nur auf einer Nullmenge, so ist $I(f_1) = I(f_2)$

Hilfssatz 2: Ist (f_j) eine Folge in $\mathscr{L}'$, so dass $f_j \searrow 0$ f.ü., so folgt

$$\lim_{j\to\infty} I(f_j) = 0.$$

Beweis Nach Voraussetzung ist die Menge N derjenigen $x \in X$, für die $f_j(x)$ nicht monoton fallend gegen 0 konvergiert, eine Nullmenge. Definiert man $\widetilde{f_j}(x) = (\min\{f_1(x), \ldots, f_j(x)\})_+$, so ist $\widetilde{f_j} \in \mathscr{L}'$ und außerhalb der Nullmenge N stimmt $\widetilde{f_j}$ mit f_j überein. Da man f_j durch $\widetilde{f_j}$ ersetzen könnte, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $f_j(x)$ für jedes $x \in X$ monoton fallend und nichtnegativ ist. Sei $\varepsilon > 0$, $0 \le f_1 \le C$ und $V_0 = \{x \in X\, ;\, f_1(x) \ne 0\}$. Setze $M_j = \{x \in X;\ f_j(x) > \varepsilon\}$. Nach Vorraussetzung ist $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ Nullmenge, nach Hilfssatz 1 existiert also j_0, so dass für $j > j_0$ gilt: $\mu_0(M_j) < \varepsilon \rightsquigarrow$ (für $j > j_0$) $f_j \le C\chi_{M_j} + \varepsilon\chi_{V_0};\ I(f_j) < C\varepsilon + \varepsilon\mu_0(V_0) = \varepsilon(C + \mu_0(V_0)) \rightsquigarrow$ Behauptung

Hilfssatz 3: Seien $f_j,\ g_j$ Folgen in $\mathscr{L}'$, f, g reellwertige Funktionen auf X mit $f \le g$ f.ü., so dass $f_j \nearrow f$ f.ü. und $g_j \nearrow g$ f.ü. Dann folgt

$$\lim_{j\to\infty} I(f_j) \le \lim_{j\to\infty} I(g_j)\,.$$

Beweis $f_k - g_m \le (f_k - g_m)_+ \searrow 0$ f.ü. (für $m \to \infty$), $\rightsquigarrow I(f_k) - I(g_m) \le I((f_k - g_m)_+) \searrow 0 \rightsquigarrow I(f_k) \le \lim_{m\to\infty} I(g_m) \rightsquigarrow$ Behauptung

Konstruktion von $\mathscr{L}''$: Wir definieren

$$\mathscr{L}'' = \{f : X \to \mathbb{R};\ \exists\ (f_j)_{j=1}^{\infty}\ \text{ in }\ \mathscr{L}'\ \text{ so, dass }\ f_j \nearrow f\ \text{ f.ü. und } \{I(f_j)\}_{j=1}^{\infty} \text{ beschränkt}\}$$

Für $f \in \mathscr{L}''$ setzt man $I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$ falls $f_j \in \mathscr{L}'$, $f_j \nearrow f$ f.ü.

Eigenschaften I ist wohldefiniert; monoton (d.h. aus $f, g \in \mathscr{L}''$, $f \le g$ f.ü. folgt $I(f) \le I(g)$; mit $f, g \in \mathscr{L}''$ und $c \ge 0$ gelten $f+g, cf \in \mathscr{L}''$ sowie $I(f+g) = I(f) + I(g)$ und $I(cf) = cI(f)$; mit f, g ist auch $\min\{f,g\} \in \mathscr{L}''$ und $I(\min\{f,g\}) \le \min\{I(f), I(g)\}$; $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}''$ und für $f \in \mathscr{L}'$ stimmt früheres $I(f)$ mit neuem $I(f)$ überein; Für $f \in \mathscr{L}''$ und $g \in \mathscr{L}'$ gelten $f - g \in \mathscr{L}''$ und $I(f-g) = I(f) - I(g)$.

Diese Eigenschaften lassen sich mit Hilfssatz 3 leicht beweisen. Im Allgemeinen ist $\mathscr{L}''$ allerdings kein linearer Raum.

Hilfssatz 4: Seien $f_j \in \mathscr{L}''$ mit $f_j \le f_{j+1}$ f.ü. gegeben und sei $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann existiert $f \in \mathscr{L}''$ mit $f_j \nearrow f$ f.ü. und $\lim_{j\to\infty} I(f_j) = I(f)$.

Beweis Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Folge $(f_j(x))$ für jedes $x \in X$ nichtnegativ und monoton wachsend ist (wähle sonst $g \in \mathscr{L}'$ mit $g \le f_1$ f. ü. und ersetze f_j durch $\max\{(f_1 - g)_+, f_2 - g, \dots f_j - g\}$). Sei $C > 0$ mit $|I(f_j)| \le C$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Finden für jeden Index j eine nichtnegative Folge $(g_{j,l})_{l=1}^{\infty} \in \mathscr{L}'$ mit $g_{j,l} \nearrow f_j$ f.ü. (für $l \to \infty$). Setzen

$$g_l(x) = \max\{g_{j,m}(x)\}_{j,m\le l} \in \mathscr{L}'\,.$$

Dann ist $g_l(x)$ monoton wachsend. Wir setzen weiter

$$h(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,, \quad g(x) = \lim_{l\to\infty} g_l(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } h(x) < \infty \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

In der folgenden Übersicht gelten dann die Ungleichungen f.ü. und die Pfeile stehen für f.ü. gültige eigentliche oder uneigentliche Grenzübergänge:

$$\begin{array}{ccccccl} g_{j,l} & \le & g_l & \le & f_l & & \text{f.ü. für } j \le l \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & l \to \infty \\ f_j & \le & g & \le & h & & \\ \downarrow & & & & & & j \to \infty \\ h\,. & & & & & & \end{array}$$

Also gilt $h(x) = g(x)$ f.ü. (könnte aber unendlich sein). Wenn wir nachweisen, dass $g(x) < \infty$ f.ü., so folgt $f = g$ f.ü. und

$$\begin{array}{ccccc} I(g_{j,l}) & \le & I(g_l) & \le & I(f_l) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I(f_j) & \le & I(f) & \le & \lim_{l\to\infty} I(f_l)\,. \end{array}$$

also $I(f) = \lim_{l\to\infty} I(f_l)$.
Es bleibt also noch zu beweisen, dass $g(x) < \infty$ für fast alle $x \in X$.
Sei $N = \{x \in X;\, g(x) = \infty\}$. Es ist zu zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Setzen $M_{l,k} = \{x \in X; g_l(x) > k\}$. Wegen $k \cdot \chi_{M_{l,k}} \le g_l \le f_l$ f.ü. ist $\mu_0(M_{l,k}) \le I(\frac{1}{k} f) \le \frac{C}{k}$. Wähle k so, dass $\frac{C}{k} < \varepsilon$. Dann folgt wegen $M_{l,k} \subset M_{l+1,k} \subset \dots$ und $M_{l,k} = M_{1,k} \cup \{M_{2,k} \setminus M_{1,k}\} \cup \dots \cup \{M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}\}$, dass

$$\mu_0(M_{1,k}) + \sum_{l=2}^{\infty} \mu_0(M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}) = \lim_{l\to\infty} \mu_0(M_{l,k}) \le \frac{C}{k} < \varepsilon\,.$$

Da außerdem $N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} M_{l,k} = M_{1,k} \cup \bigcup_{l=2}^{\infty} M_{l,k} \setminus M_{l-1,k}$, ist N eine Nullmenge.

Hifssatz 5: Aus $g_1,\ h_1,\ g_2,\ h_2 \in \mathscr{L}''$ und $g_1 - h_1 \leq g_2 - h_2$ f.ü. folgt:

$$I(g_1) - I(h_1) \leq I(g_2) - I(h_2)$$

Beweis Wende Monotonie und Additivität von I auf $g_1 + h_2 \leq g_2 + h_1$ f.ü. an.

Konstruktion von $\mathscr{L}'''$: $\mathscr{L}'''$ bestehe aus denjenigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ für die es $g,\ h \in \mathscr{L}''$ gibt, so dass $f = g - h$ f.ü. Man setzt dann $I(f) = I(g) - I(h)$. Die Elemente von $\mathscr{L}'''$ sind die *reellwertigen integrierbaren Funktionen.*

Konstruktion von $\mathscr{L}$: $\mathscr{L}$ sei der Raum der Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ in $\mathscr{L}'''$ liegen. Für $f \in \mathscr{L}$ setzt man

$$I(f) = I(\mathrm{Re}(f)) + iI(\mathrm{Im}(f))$$

Bezeichnung: $\mathscr{L}$ bzw. $\mathscr{L}'''$ ist der Raum der integrierbaren Funktionen bzw. der Raum der reellwertigen integrierbaren Funktionen und $I(f)$ ist das Integral. Im Referenzfall handelt es sich um die Lebesgue–integrierbaren Funktionen und um das Lesgue-Integral.

Bemerkung: Vektorwertige Funktionen mit Werten in R^d können koordinatenweise integriert werden.

Satz 2 (Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals):

1. $\mathscr{L}'' \subset \mathscr{L}''' \subset \mathscr{L}$ und I ist eine wohldefinierte Fortsetung des vorherigen auf $\mathscr{L}''$ definierten Integrals I.
2. Linearität: Mit $f, g \in \mathscr{L}$ und $c \in \mathbb{C}$ gelten $f + g, cf \in \mathscr{L}$ sowie $I(f + g) = I(f) + I(g)$ und $I(cf) = cI(f)$
3. Monotonie: Aus $f, g \in \mathscr{L}'''$ und $f \leq g$ f.ü. folgt $I(f) \leq I(g)$.
4. Mit $f_1, f_2, f \in \mathscr{L}'''$ sind auch $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$ und folglich $|f|, \max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\} \in \mathscr{L}'''$.

Beweis 1., 3. folgen für $\mathscr{L}'''$ aus Hilfssatz 5. Damit ist I auch auf $\mathscr{L}$ wohldefiniert.
2. Additivität folgt aus Additivität für $\mathscr{L}''$; ebenso $I(cf) = cI(f)$ falls $c \geq 0$; ist $c = -1$, so folgt mit $Re(f) = g_1 - h_1$ und $Im(f) = g_2 - h_2$ ($g_j, h_j \in \mathscr{L}''$), dass

$$\begin{aligned} I(-f) &= I(h_1 - g_1) + iI(h_2 - g_2) \\ &= I(h_1) - I(g_1) + i(I(h_2) - I(g_2)) \\ &= -I(f). \end{aligned}$$

Ähnlich folgt $I(if) = iI(f)$. Damit ist I linear auf $\mathscr{L}$ (und reell–linear auf $\mathscr{L}'''$).
4. Sei $f = g - h,\ g, h \in \mathscr{L}'' \rightsquigarrow f_+ = g - \min\{g, h\} \in \mathscr{L}'''$ (da $\min\{g, h\} \in \mathscr{L}''$). Ebenso ist $f_- = h - \min\{g, h\} \in \mathscr{L}'''$. Folglich liegen $|f| = f_+ + f_-$, $\max\{f_1,\ f_2\} = f_1 + (f_2 - f_1)_+$ und $\min\{f_1,\ f_2\} = f_1 - (f_1 - f_2)_+$ in $\mathscr{L}'''$.

Hilfssatz 6: Für jedes $f \in \mathscr{L}'''$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $g,\ h \in \mathscr{L}''$ mit $f = g - h,\ h \geq 0$ und $I(h) < \varepsilon$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Nehmen irgend eine Darstellung $f = \widetilde{g} - \widetilde{h}$ mit $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathscr{L}''$; finden Folgen $(\widetilde{g_j}), (\widetilde{h_j})$ in $\mathscr{L}'$ mit $\widetilde{g_j} \nearrow \widetilde{g}, \widetilde{h_j} \nearrow \widetilde{h}$ f.ü. ; bestimmen j_0 mit $I(\widetilde{h}) - I(\widetilde{h}_{j_0}) < \varepsilon$ und setzen $g = \widetilde{g} - \widetilde{h}_{j_0}, h = \widetilde{h} - \widetilde{h}_{j_0}$. Dann gelten $f = g - h$, $h \geq 0$ und $I(h) < \varepsilon$. Wegen $(\widetilde{g_j} - \widetilde{h}_{j_0}) \nearrow g$ f.ü. und $(\widetilde{h_j} - \widetilde{h}_{j_0}) \nearrow h$ f.ü. sind $g, h \in \mathscr{L}''$.

Satz 3 (Konvergenzsatz von Beppo Levi) Sind $f_j \in \mathscr{L}$ reellwertig mit $f_j \leq f_{j+1}$ f.ü. (für alle $j \in \mathbb{N}$) und ist $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so existiert $f \in \mathscr{L}$ mit $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und $\lim_{j\to\infty} I(f_j) = I(f)$.

Bemerkung: Setzt man also $f_j \nearrow f$ f.ü. , $f_j \in \mathscr{L}$ und $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt voraus, so folgt $f \in \mathscr{L}, I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$.

Beweis Kann $f_j \geq 0$ voraussetzen (ersetze sonst f_j durch $f_j - f_1$). Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$.
Setze $h_1 = f_1$ und $h_j = f_j - f_{j-1}$ für $j \geq 2$ und finde Darstellungen $h_j = \widetilde{f}_j - \widetilde{g}_j$ f.ü. mit $\widetilde{f}_j, \widetilde{g}_j \in \mathscr{L}'', \widetilde{g}_j \geq 0, I(\widetilde{g}_j) < \varepsilon_j$ (Hilfssatz 6).
Beachtet man, dass $I(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$ und $I(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j) = I(\sum_{j=1}^{m} (h_j + \widetilde{g}_j)) \leq I(f_m) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \leq \sup\{I(f_j)\} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$, wobei diese Partialsummenfolgen monoton wachsen, so folgt mit Hilfssatz 4, dass $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \mathscr{L}''$ so existieren, dass $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j \nearrow \widetilde{f}$ f.ü., $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j \nearrow \widetilde{g}$ f.ü. (für $m \to \infty$).
Da $\lim_{j\to\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} h_j = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}_j - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_j\right) = \widetilde{f} - \widetilde{g}$ f.ü. gilt, ist $f = \widetilde{f} - \widetilde{g} \in \mathscr{L}$ und $I(f) = I(\widetilde{f}) - I(\widetilde{g}) = \sum_{j=1}^{\infty} I(\widetilde{f}_j) - \sum_{j=1}^{\infty} I(\widetilde{g}_j) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} I(\widetilde{f}_j - \widetilde{g}_j) = \lim_{m\to\infty} I(f_m)$.

Satz 4 (Lemma von Fatou) Gelten für Funktionen $f, f_j : X \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen $f_j \in \mathscr{L}$, $f_j \geq 0$, $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und ist $\{I(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so folgen $f \in \mathscr{L}$ und $I(f) \leq \underline{\lim} I(f_j)$.

Beweis Sei $\underline{\lim} I(f_j) = C$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Durch Übergang zu Teilfolge kann $I(f_j) \leq C+\varepsilon$ vorausgesetzt werden. Betrachte $g_{k,l} = \min\{f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}\}$. Dann ist $0 \leq \lim_{l\to\infty} I(g_{k,l}) \leq I(f_{k+1}) \leq C+\varepsilon$. Somit erfüllt die Folge $(-g_{k,l})_{l=1}^{\infty}$ die Voraussetzungen von Satz 3. Es existieren also reellwertige Funktionen $g_k \in \mathscr{L}$ mit $g_{k,l} \searrow g_k$ f.ü. Wegen $I(g_k) = \lim_{l\to\infty} I(g_{k,l}) \leq C + \varepsilon$ erfüllt nun die monoton wachsende Folge (g_k) ebenfalls die Voraussetzungen von Satz 3. Da $g_k \nearrow f$ f.ü. ist $f \in \mathscr{L}$. Da außerdem $I(f) \leq C + \varepsilon$ ist, folgt für $\varepsilon \to 0$ auch noch die behauptete Ungleichung.

Beispiel für $I(f) < \underline{\lim} I(f_j)$ (Referenzfall, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$): $f_j = \chi_{(j,j+1]}$ $I(f_j) = 1$; $f_j \to 0$ f.ü.

Definition Eine Funktion g heißt **Majorante** der Funktionenfolge (f_j), falls $|f_j(x)| \leq g(x)$ f.ü. für alle Indizes j gilt.

Satz 5 (Konvergenzsatz von Lebesgue) Hat eine Folge (f_j) in $\mathscr{L}$ eine Majorante $g \in \mathscr{L}$ und gilt für eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü., so folgen $f \in \mathscr{L}$ und $I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$

Beweis Für reellwertige Funktionen: $g \pm f_j$ erfüllen Voraussetzung von Satz 4. Bezeichnen $c = \underline{\lim} I(f_j)$ und $C = -\underline{\lim} I(-f_j) = \overline{\lim} I(f_j)$. $\Rightarrow I(g) + I(f) = I(g + f) \leq I(g) + c$
$I(g) - I(f) = I(g - f) \leq I(g) - C \Rightarrow C - I(f) \leq 0 \leq c - I(f)$ Da aber $c \leq C$, folgt $c = C = I(f) = \lim_{j\to\infty} I(f_j)$.
Für komplexwertige Funktionen folgen nun $I(\mathrm{Re}(f_j)) \to I(\mathrm{Re} f)$; $I(\mathrm{Im} f_j) \to I(\mathrm{Im} f)$ weil jedes mal g Majorante ist.

Definition Eine **elementare Treppenfunktionen** ist eine Funktion der Gestalt $f = g + \mathrm{i}h$ mit $g, h \in \mathscr{L}'$.

Das sind also Funktionen der Gestalt $f = \sum_{k=1}^{l} c_k \chi_{M_k}$ mit $l \in \mathbb{N}$, $M_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Mengen M_k paarweise disjunkt sind.

Satz 6
1. (Integraldreiecksungleichung) Mit $f \in \mathscr{L}$ folgen $|f| \in \mathscr{L}$ und $|I(f)| \leq I(|f|)$.
2. (Dichtheit der elementaren Treppenfunktionen) Für $f \in \mathscr{L}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine elementare Treppenfunktionen $\widetilde{f}$ mit $I(|f - \widetilde{f}|) < \varepsilon$.

Beweis Nach Definition von $\mathscr{L}$ existieren Darstellungen $\mathrm{Re}f = \widetilde{g}_1 - \widetilde{h}_1$ und $\mathrm{Im}f = \widetilde{g}_2 - \widetilde{h}_2$ mit $\widetilde{g}_1, \widetilde{h}_1, \widetilde{g}_2, \widetilde{h}_2 \in \mathscr{L}''$, wobei immer auch nichtnegative Funktionen genommen werden können. Dann findet man nach Definition von $\mathscr{L}''$ Folgen $g_{1,j}, h_{1,j}, g_{2,j}, h_{2,j} \in \mathscr{L}'$ mit $g_{1,j} \nearrow \widetilde{g}_1, h_{1,j} \nearrow \widetilde{h}_1, g_{2,j} \nearrow \widetilde{g}_2, h_{2,j} \nearrow \widetilde{h}_2$ f.ü., wobei auch die Folgenglieder als nichtnegative Funktionen genommen werden können.

Für elementare Treppenfunktionen folgt die Integraldreiecksungleichung aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen (oder im Referenzfall aus Eigenschaften des Riemann-Integrals).

Den Konvergenzsatz von Lebesgue kann man auf die Grenzwerte $\lim_{j\to\infty} g_{1,j} - h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j}) = f$ f.ü. und $\lim_{j\to\infty} |g_{1,j}h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j})| = |f|$ f.ü. jeweils mit Majorante $\widetilde{g}_1 + \widetilde{h}_1 + \widetilde{g}_2 + \widetilde{h}_2$, anwenden. Somit erhält man die Integraldreiecksungleichung aus $|I(f)| = \lim_{j\to\infty} |I(g_{1,j} - h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j})| \leq \lim_{j\to\infty} I(|g_{1,j} - h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j}|) = I(|f|)$.

Aus $\lim_{j\to\infty} |g_{1,j} - h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j}) - f| = 0$ f.ü. mit integrierbarer Majorante $2(\widetilde{g}_1 + \widetilde{h}_1 + \widetilde{g}_2 + \widetilde{h}_2)$ folgt mit Satz 5, dass $\lim_{j\to\infty} I(|g_{1,j} - h_{1,j} + i(g_{2,j} - h_{2,j}) - f|) = 0$ ist. Somit folgt 2, indem man $\widetilde{f} = g_{1,j} - h_{1,j} + \mathrm{i}(g_{2,j} - h_{2,j})$ setzt, wobei der Index j hinreichend groß gewählt ist.

Die auf $\mathscr{L}$ definierte Funktion $f \to I(|f|)$ erfüllt die Eigenschaften „Betragshomogenität“ und „Dreicksungleichung“ einer Norm. Sie wird später verwendet, um aus $\mathscr{L}$ einen Banachraum zu machen, Die Vollständigkeit wird dabei aus dem folgenden Satz folgen.

Satz 7 (von der fast überall konvergenten Teilfolge, Vollständigkeit) Seien $f_j \in \mathscr{L}$ $(j \in \mathbb{N})$ so gegeben, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein j_0 so existiert, dass für alle $j > j_0$ gilt $I(|f_j - f_{j_0}|) < \varepsilon$. Dann existiert eine f.ü. konvergente Teilfolge $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$, die eine Majorante in $\mathscr{L}$ besitzt. Der Limes der Teilfolge ist f.ü. eindeutig durch die ursprünglich gegebene Folge bestimmt. Er ist f.ü. gleich einer Funktion $f \in \mathscr{L}$ mit $\lim_{j\to\infty} I(|f_j - f|) = 0$.

Beweis Bestimmen j_k $(j_{k+1} > j_k)$ so, dass für $j > j_k$ stets gilt $I(|f_j - f_{j_k}|) < 2^{-k}$. Nach Satz 3 (angewandt auf die Partialsummenfolge) konvergiert $|f_{j_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|$ f.ü. gegen eine Funktion $g \in \mathscr{L}$. Folglich konvergiert $f_{j_m} = f_{j_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(f_{j_k} - f_{j_{k-1}}\right)$ f.ü. gegen eine Funktion f, wobei g Majorante ist. Nach Satz 5 ist $f \in \mathscr{L}$. Da $|f_{j_k}(x) - f(x)|$ f.ü. gegen Null konvergiert und die Majorante $g + |f|$ hat, folgt $\lim_{j\to\infty} I(|f_{j_k} - f|) = 0$. Wählt man nun zu einem $\varepsilon > 0$ den Index j_0 so, dass für alle $j > j_0$ gilt $I(|f_j - f_{j_0}|) < \varepsilon$ und bestimmt man danach k mit $j_k > j_0$ so, dass $I(|f_{j_k}(x) - f(x)|) < \varepsilon$ ist, so folgt aus $j > j_0$ stets $I(|f_j - f|) \leq I(|f_j - f_{j_0}| + |f_{j_0} - f_{j_k}| + |f_{j_k} - f|) < 3\varepsilon$, woraus mit der Grenzwertdefinition $\lim_{j\to\infty} I(|f_j - f|) = 0$ folgt.
Wäre h auch f.ü. Limes einer Teilfolge, so könnten wir eine dritte Teilfolge mit $I(|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}|) < 2^{-k}$ konstruieren, die abwechselnd aus Elementen der ersten bzw. der zweiten Folge besteht. Diese würde dann f.ü. gegen f und f.ü. gegen h konvergieren, also $f = h$ f.ü.

Satz 8 (Nullmengenkriterien) Für eine Teimenge $N \subset X$ ist jede der folgenden zwei Aussagen äquivalent dazu, dass N eine Nullmenge ist:
1. $\chi_N \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_N) = 0$.
2. In der von Σ_0 erzeugten σ–Algebra gibt es eine Menge M mit $N \subset M$, $\chi_M \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_M) = 0$.

Beweis Wir zeigen zuerst, dass aus $\chi_N \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_N) = 0$ folgt, dass N Nullmenge ist. Nach Hilfssatz 6 existieren für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ Funktionen $g, h \in \mathscr{L}''$ mit $\chi_N = g - h$ f.ü., $h \geq 0$, $I(h) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dann ist $I(g) = I(\chi_N) + I(h) < \frac{\varepsilon}{4}$. Wir betrachten Folge $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ in $\mathscr{L}'$ mit $g_j \nearrow g$ f.ü. Dabei kann $g_j \geq 0$ vorausgesetzt werden (ersetze sonst g_j durch $(g_j)_+$) Weiterhin kann $g_j \leq g_{j+1}$ vorausgesetzt werden (ersetze sonst g_j durch $\max\{g_1, g_2 \ldots, g_j\}$). Setzt man $V_1 = \left\{x \in X; g_1(x) \geq \frac{3}{4}\right\}$ und $V_j = \left\{x \in X; g_{j-1}(x) < \frac{3}{4}, g_j(x) \geq \frac{3}{4}\right\}$ für $(j \geq 2)$, so sind die V_j paarweise disjunkt, $\chi_{V_j} \leq \frac{4}{3} g$ und $M = N \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ ist eine Nullmenge (weil $\chi_N\ leqg$ f.ü.).

Deshalb findet man eine Folge (W_j) in Σ_0, so dass $M \subset \bigcup_{j=1}^\infty W_j$, und $\sum_{j=1}^\infty \mu_0(W_j) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dann gelten

$$N \subset \bigcup_{j=1}^\infty V_j \cup \bigcup_{j=1}^\infty W_j$$

und $\sum_{j=1}^\infty \mu_0(V_j) + \sum_{j=1}^\infty \mu_0(W_j) < \frac{4}{3}I(g) + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon$, woraus folgt, dass N eine Nullmenge ist. Dies beweist, dass aus Aussage 1 folgt, dass N Nullmenge ist.

Ist Aussage 2 erfüllt, so ist nach dem bisher Bewiesenen M eine Nullmenge. Damit ist auch jede Teilmenge N eine Nullmenge.

Ist N Nullmenge, so gilt Aussage 1, weil es bei der Definition von $\mathscr{L}''$ nur auf Grenzwere außerhalb einer Nullmenge ankommt. Genauer hat man für $f_j = 0$ die Beziehungen $f_j \nearrow \chi_N$ f.ü., $\chi_N \in \mathscr{L}''$ und $I(\chi_N) = 0$.

Abschließend wird nachgewiesen, dass für jede Nullmenge N Aussage 2 gilt. Wir halten eine Nullfolge ε_k positiver reeller Zahlen fest. Nach Definition der Nullmenge gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(M_{k,j})_{j=1}^\infty$ mit $M_{k,j} \in \Sigma_0, N \subset \bigcup_{j=1}^\infty M_{k,j}$ und $\sum_{j=1}^\infty \mu_0(M_{k,j}) < \varepsilon_k$. Wir setzen $M_k = \bigcup_{j=1}^\infty M_{k,j}$ und $M = \bigcap_{k=1}^\infty M_k$, was natürlich in der von Σ_0 erzeugten σ-Algebra liegt. Unter Verwendung der endlichen Subadditivität folgt $\mu_0(M_{k,1} \cup \dots \cup M_{k,j}) \le \varepsilon_k$. Anwendung des Konvergenzsatzes von Beppo Levi auf die Indikatorfunktionen ergibt $\chi_{M_k} \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_{M_k}) \le \varepsilon_k$. Anwendung des Intergralsatzes von Lebesgue auf $\chi_M = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_1} \cdot \dots \cdot \chi_{M_k}$ ergibt $\chi_M \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_M) = 0$. Natürlich gilt $N \subset M$ und alle Behauptungen sind bewiesen.

Ist Σ_0 nicht nur eine Mengenalgebra, sondern eine $\sigma-$Algebra, so sind die Nullmengen also genau die Teilmengen von Mengen $M \in \Sigma_0$ mit $\mu_0(M) = 0$.

Definition: Vollständiger Maßraum Ein Maßraum (X, Σ, μ) heißt vollständig, falls Σ jede μ-Nullmenge enthält.

Bemerkungen Dies ist äquivalent dazu, dass für jedes $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ alle Teilmengen $N \subset M$ Elemente von Σ sind. Ist das nicht der Fall, so könnte man durch Hinzunahme all dieser Teilmengen (mit Maß Null) leicht zu einem vollständigen Maßraum übergehen. Das ist aber z. B. dann nicht sinnvoll, wenn man gleichzeitig mehrere Maße mit möglicherweise verschiedenen Systemen von Nullmengen betrachten will.
Der Vollständigkeitsbegriff für Maßräume betrifft einen vollkommen anderen Sachverhalt als der Vollständigkeitsbegriff für metrische oder normierte Räume.

Oft sind folgende Stetigkeitseigenschaften σ-additiver Maße nützlich:

Stetigkeitseigenschaften von Maßen (ÜA)
Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0 auf Σ_0.

1. Für jede aufsteigende Folge $(M_j)_{j=1}^\infty$ in Σ_0 mit $M = \bigcup_{j=1}^\infty M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$
2. Für jede absteigende Folge $(M_j)_{j=1}^\infty$ in Σ_0 mit $\mu_0(M_1) < \infty$ und $M = \bigcap_{j=1}^\infty M_j \in \Sigma_0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \mu_0(M_j) = \mu_0(M)$

Für $\sigma-$additive Maße gilt auch eine allgemeinere Variante der Subadditivität

Subadditivität (ÜA) Sei (X, Σ_0, μ_0) ein Tripel bestehend aus einer nichtleeren Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 auf X und einem σ-additiven Maß μ_0 auf Σ_0. Gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ und sind $M, M_j \in \Sigma_0$, so folgt $\mu_0(M) \le \sum_{j=1}^\infty \mu_0(M_j)$.

II.1.c) Konstruktion des Lebesgueschen Maßraumes

Bisher (also zur Konstruktion des Integrals) wurde die σ-Endlichkeit von (X, Σ_0, μ_0) nicht benötigt. Für die Konstruktion einer Erweiterung von (X, Σ_0, μ_0) zu einem Maßraum ist diese Bedingung aber von Vorteil. Lag von Anfang an ein Maßraum vor (wie z. B. im Falle des Zählmaßes auf einer überabzählbaren Menge X), so käme man weiterhin ohne diese Bedingung aus.

Definitionen und Bezeichnungen

Ist μ_0 σ-endlich, so wählen wir $A_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = X$ und $A_k \subset A_{k+1}$ aus. Wir setzen

$$\Sigma = \{M \subset X;\ \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt } \chi_{A_k \cap M} \in \mathscr{L}\}$$

Für $M \in \Sigma$ setzen wir

$$\mu(M) = \lim_{k \to \infty} I(\chi_{A_k \cap M})\,.$$

Satz 9 Sei μ_0 σ-endlich. Mit obigen Definitionen und Bezeichnungen gelten dann:

1. Ist $M \in \Sigma$, so gilt $\mu(M) < \infty$ genau dann wenn $\chi_M \in \mathscr{L}$ und dann gilt $\mu(M) = I(\chi_M)$.
2. Σ ist die von Σ_0 und den μ_0-Nullmengen erzeugte σ-Algebra. μ ist ein σ-additives Maß auf Σ und für $M \in \Sigma_0$ gilt $\mu(M) = \mu_0(M)$.
3. Die μ_0–Nullmengen (d.h. die Nullmengen bzgl. (X, Σ_0, μ_0)) sind genau die μ–Nullmengen (d.h. die Nullmengen bzgl. (X, Σ, μ)). Insbesondere ist (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum.
4. Führt man die Konstruktion des Integrals auf der Grundlage von (X, Σ, μ) (anstelle (X, Σ_0, μ_0)) aus, so erhält man denselben Raum $\mathscr{L}$ und dasselbe Integral, wie bei der Konstruktion auf der Grundlage von (X, Σ_0, μ_0).
5. μ ist das einzige σ-additive Maß auf Σ, welches auf Σ_0 mit μ_0 übereinstimmt.

Beweis

1. Aus $\mu(M) < \infty$ folgt $\chi_{A_k \cap M} \nearrow \chi_M$, $\chi_M \in \mathscr{L}$ und $\lim_{k\to\infty} I(\chi_{A_k \cap M}) = I(\chi_M)$ (nach B. Levi). Gilt $\chi_M \in \mathscr{L}$, so ist auch $\chi_{A_k \cap M} = \min\{\chi_{A_k}, \chi_M\} \in \mathscr{L}$ und $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} I(\chi_{A_k \cap M}) = I(\chi_M)$ wegen Lebesgue.
2. Natürlich gilt $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Ist $M \in \Sigma_0$, so ist $M \cap A_k \in \Sigma_{0,\text{fin}}$ und $\mu(M) = \mu_0(M)$ folgt aus der σ-Additivität von μ_0, (verwende $M = (M \cap A_1) \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} M \cap (A_j \setminus A_{j-1})$). Da nach Satz 8 für μ_0–Nullmengen N die Beziehungen $\chi_N \in \mathscr{L}$ und $I(\chi_N) = 0$ gelten, gehören solche Mengen zu Σ und erfüllen $\mu(N) = 0$.
   Wir zeigen, dass Σ eine Mengenalgebra ist und dass μ endlich additiv ist:
   Seien $M_1, M_2 \in \Sigma$.
   $$A_k \cap (X \setminus M_1) = A_k \setminus (A_k \cap M_1), \chi_{A_k \cap (X \setminus M_1)} = \chi_{A_k} - \chi_{A_k \cap M_1} \in \mathscr{L} \rightsquigarrow X \setminus M_1 \in \Sigma$$
   $$\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)} = \max\{\chi_{A_k \cap M_1}, \chi_{A_k \cap M_2}\} \in \mathscr{L} \rightsquigarrow M_1 \cup M_2 \in \Sigma$$
   Gilt auch $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so ist
   $$\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)} = \chi_{A_k \cap M_1} + \chi_{A_k \cap M_2}$$
   also $I(\chi_{A_k \cap (M_1 \cup M_2)}) = I(\chi_{A_k \cap M_1}) + I(\chi_{A_k \cap M_2})$. Für $k \to \infty$ folgt $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$.
   Wir zeigen, dass Σ eine σ-Algebra ist und dass μ σ-additiv ist.
   Sind $M_j \in \Sigma$ $\quad (j \in \mathbb{N})$ und ist $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, so folgt mit $V_l = \bigcup_{j=1}^{l} M_j$
   $$\chi_{A_k \cap V_l} \nearrow \chi_{A_k \cap M} \text{ (für } l \to \infty\text{), und } I(\chi_{A_k \cap V_l}) \le I(\chi_{A_k})$$

Nach B. Levi ist $\chi_{A_k\cap M} \in \mathscr{L}$, also $M \in \Sigma$. Sind die M_j noch paarweise disjunkt, so folgt weiter

$$I(\chi_{A_k\cap V_l}) = \sum_{j=1}^{l} I(\chi_{A_k\cap M_j}) = \sum_{j=1}^{l} \mu(A_k \cap M_j)$$

Für $l \to \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_k \cap M_j) = I(\chi_{A_k\cap M}) = \mu(A_k \cap M)$. Für $k \to \infty$ folgt nun $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j) = \mu(M)$.
Es ist also nachgewiesen, dass (X, Σ, μ) ein Maßraum ist.
Wir zeigen, dass Σ als σ–Algebra von Σ_0 und den Nullmengen erzeugt wird.
Sei $M \in \Sigma$. Wegen $M = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap M)$ reicht es aus zu zeigen, dass $A_k \cap M$ in der von Σ_0 und den Nullmengen erzeugten σ-Algebra liegt. Da $\chi_{A_k\cap M} \in \mathscr{L}$ ist, existiert nach den Sätzen 6 und 7 eine Folge $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ in $\mathscr{L}'$, so dass

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \chi_{A_k\cap M}(x)$$

fast überall gilt.
Setzt man dann $M_{j,l} = \left\{x \in X; 1 - \frac{1}{l} < f_j(x) < 1 + \frac{1}{l}\right\}$, so unterscheiden sich M und die in der von Σ_0 erzeugten σ-Algebra liegende Menge

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} M_{j,l}$$

höchstens um eine Nullmenge. (Man überzeuge sich davon, dass die letzte Menge gleich der Menge $\{x \in X; \lim_{j\to\infty} f_j(x) = 1\}$ ist). Damit ist dieser Punkt bewiesen.

3. Im Beweis von Satz 9.2 wurde schon nachgewiesen, dass jede μ_0–Nullmenge N zu Σ gehört und $\mu(N) = 0$ erfüllt, also auch μ–Nullmenge ist.
Wir bezeichnen mit I_μ das zu (X, Σ, μ) anstelle (X, Σ_0, μ_0) auf $\mathscr{L}'_\mu$, $\mathscr{L}''_\mu$, $\mathscr{L}'''_\mu$, $\mathscr{L}_\mu$ konstruierte Integral. Nach Satz 8, angewandt auf (X, Σ, μ) anstelle (X, Σ_0, μ_0), ist jede μ–Nullmenge N Teilmenge einer Menge $M \in \Sigma$ mit $I_\mu(\chi_M) = 0$. Dann gelten aber $\chi_M \in \mathscr{L}'_\mu$ und $I_\mu(\chi_M) = \mu(M)$. Nach der Definition von Σ und μ sind $A_k \cap M$ und folglich auch M und N μ_0–Nullmengen.
Insbesondere enthält Σ alle μ–Nullmengen.

4. Wegen 1-3 ist $\chi_M \in \mathscr{L}$ genau dann wenn $M \in \Sigma_{\text{fin}} = \{M \in \Sigma\,;\, \mu(M) < \infty\}$, d. h. wenn $\chi_M \in \mathscr{L}'_\mu$. In diesem Falle ist $I_\mu(\chi_M) = \mu(M) = I(\chi_M)$. Konstruiert man nun $\mathscr{L}'_\mu$, $\mathscr{L}''_\mu$, $\mathscr{L}'''_\mu$, $\mathscr{L}_\mu$ für (X, Σ, μ), so sind sie alle im für (X, Σ_0, μ_0) konstruierten Raum $\mathscr{L}$ enthalten und das Integral I_μ stimmt jeweils mit I überein. Für $\mathscr{L}'_\mu$, $\mathscr{L}'''_\mu$, $\mathscr{L}_\mu$ folgt dies durch Linearität, für $\mathscr{L}''_\mu$ folgt es aus B. Levi.

5. Ist ν ein Maß auf Σ, welche auf Σ_0 mit μ_0 übereinstimmt, so sind die μ_0-Nullmengen auch ν-Nullmengen. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}_\nu$ den für (M, Σ, ν) (anstelle (M, Σ_0, μ_0)) konstruierten Raum integrierbarer Funktionen und mit I_ν das zugehörige Integral. Dann folgt $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}_\nu$ und die Integrale stimmen auf $\mathscr{L}'$ überein (weil sie durch μ_0 bestimmt sind). Wählt man für $f \in \mathscr{L}''$ eine Folge (f_j) in $\mathscr{L}'$ mit $f_j \nearrow f$ μ_0-f.ü., so folgt aus Satz 3 (angewandt für $\mathscr{L}_\nu$), dass $f \in \mathscr{L}_\nu$ und dass $I_\nu(f) = \lim_{j\to\infty} I_\nu(f_j) = I(f)$. Durch Übergang zur linearen Hülle folgt $I_\nu(f) = I(f)$ für alle $f \in \mathscr{L}$. Insbesondere folgt für $M \in \Sigma$ und $k \in \mathbb{N}$, dass $\mu(A_k \cap M) = I(\chi_{A_k\cap M}) = I_\nu(\chi_{A_k\cap M}) = \nu(A_k \cap M)$. Aus der Stetigkeit der Maße folgt also $\mu(M) = \nu(M)$.

Bemerkung: Jedes System (X, Σ_0, μ_0), bestehend aus einer Menge X, einer Mengenalgebra Σ_0 von Teilmengen von X und einem σ-additiven und σ-endlichen Maß kann also in eindeutiger Weise zu einem vollständigen Maßraum (X, Σ, μ) erweitert werden, wobei Σ die von Σ_0 und den μ_0–Nullmengen erzeugte σ-Algebra von Teilmengen von X ist. Insbesondere hängt der Maßraum nicht von der speziellen Wahl der zu seiner Konstruktion verwendeten Folge von Mengen A_k ab.

Bezeichnungen Im Referenzfall ist das aus (X, Σ_0, μ_0) konstruierte Maß das Lebesgue-Maß auf $X = \mathbb{R}^n$. Es wird oft mit λ bezeichnet. $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$ ist somit der auf der Grundlage von (X, Σ_0, μ_0) aus 9.1.a), Beispiel 5 konstruierte vollständige Maßraum.

II.1.d) Räume messbarer und integrierbarer Funktionen

Definition: messbar Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt messbar bezüglich einer σ-Algebra Σ von Teilmengen von X (Σ-messbar oder kurz messbar, falls klar ist, welche σ-Algebra gemeint ist), wenn folgende zueinander äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}((r,\infty)) = \{x \in X; f(x) > r\} \in \Sigma$
2. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}([r,\infty)) \in \Sigma$
3. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}((-\infty,r)) \in \Sigma$
4. $\forall r \in \mathbb{Q}$ gilt $f^{-1}((-\infty,r]) \in \Sigma$
5. Das Urbild jedes Intervalls gehört zu Σ.

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heißt messbar, wenn Re f und Im f bzw. alle Koordinatenfunktionen messbar sind.

Beweis der Äquivalenz Wir zeigen z.B., dass aus 1. folgt $f^{-1}((a,b)) \in \Sigma$ falls $a < b < \infty$. Dazu nehmen wir eine monoton fallende Folge (s_j) in $\mathbb{Q}$ mit Limes a und eine monoton wachsende Folge (r_j) in $\mathbb{Q}$ mit Limes b. Folglich ist $[b,\infty) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(r_j,\infty), (a,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(s_j,\infty)$, also ist $f^{-1}((a,b)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}((s_j,\infty)) \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}((r_j,\infty)) \in \Sigma$. Genauso zeigt man, dass Urbilder anderer Intervalle in Σ liegen. Also gilt $1 \rightsquigarrow 5$. $5 \rightsquigarrow 1$ ist trivial und die anderen Äquivalenzen kann man genauso beweisen.

Definition: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion* (bezüglich einer gegebenen σ-Algebra Σ von Teilmengen von X), falls paarweise disjunkte Mengen $M_j \in \Sigma$ und Zahlen $c_j \in \mathbb{C}$ $(j \in \mathbb{N})$ so existieren, dass für alle $x \in X$ gilt

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \chi_{M_j}(x)\,.$$

Man kann in dieser Darstellung einer Treppenfunktion auch immer $\bigcup M_j = X$ voraussetzen (füge sonst Summanden $c_0 \, \chi_{M_0}$ mit $c_0 = 0$ und $M_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ hinzu.) Für zwei (oder endlich viele) Treppenfunktionen kann man dann Darstellungen mit ein und demselben Mengensystem $\{M_j\}$ finden. Ist etwa $g = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \chi_{U_j}$ und $h = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, \chi_{V_k}$, wobei $\bigcup_j U_j = \bigcup_k V_k = X$ vorausgesetzt werde, so folgt $g = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_j \, \chi_{U_j \cap V_k}$ und $h = \sum_{j,k=1}^{\infty} d_k \, \chi_{U_j \cap V_k}$. Die letzten beiden Doppelreihen lassen sich zu gewöhnlichen Reihen umordnen.

Treppenfunktionen sind immer messbar.

Satz 10: Betrachtet werde Messbarkeit bezüglich einer fest gewählten Σ-Algebra von Teilmengen einer Menge X.

1. Sind Funktionen $f_j : X \to \mathbb{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ messbar und ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$$
für alle $x \in X$ gilt, so ist f messbar.
2. Jede messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ lässt sich als gleichmäßiger Limes einer Folge von Treppenfunktionen schreiben.
3. Sind $f_j : X \to \mathbb{R}$ $(j \in \{1 \dots m\})$ messbar und ist $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(x) = U(f_1(x), \dots, f_m(x))$ messbar.
4. Für reellwertige, messbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{R}$ sind auch $cf,\ f+g,\ |f|,\ f \cdot g$, $\max\{f,g\},\ \min\{f,g\},\ f_+,\ f_-$ messbar.

5. Für komplexwertige, messbare Funktionen f, g und $c \in \mathbb{C}$ sind auch $f+g$, cf, $|f|$, $f \cdot g$ messbar. Ferner ist die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{falls } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } g(x) = 0 \end{cases}$$

messbar.

Beweis:

1. Für $a \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Mengen $M = f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X; f(x) > a\}$ und $M_{j,k} = f_j^{-1}((a+1/k,\infty))$. Da $M_{j,k} \in \Sigma$ und

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq l} M_{j,k} \,,$$

gehört auch M zur σ-Algebra Σ.

2. Wir setzen

$$M_{j,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]\right), \quad V_{j,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{-j}{k}, \frac{1-j}{k}\right)\right),$$

$$g_k := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j-1}{k}\chi_{M_{j,k}} + \frac{1-j}{k}\chi_{V_{j,k}}\right).$$

Dann sind die Funktionen g_k Treppenfunktionen, die wegen $|f - g_k| \leq \frac{1}{k}$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

3. Bestimme TF $f_{j,k}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_{j,k}(x) = f(x)$. Dann sind $g_k = U(f_{1,k}(x), f_{2,k}(x), \ldots, f_{m,k}(x))$ ebenfalls TF (also messbar) und $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = U(f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

4. Dies folgt aus 3, da man für jede der Behauptungen leicht eine passende stetige Funktion U findet. Für das Maximum nimmt man z.B. $U(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

5. Nach 3 mit $U(x_1, x_2) = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$, $f_1 = \mathrm{Re}f$ und $f_2 = \mathrm{Im}f$ ist $|f| = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^1}$ messbar. Die Messbarkeit von $f+g$, cf, , $f \cdot g$ folgt durch Anwendung von 4 auf Real– und Imaginärteil. Es gilt $h(x) = \lim_{j\to\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot h_j(|g(x)|)^2$, wobei

$$h_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{falls } |t| \geq 1/j \\ j^2 \cdot t & \text{falls } |t| \leq 1/j \end{cases}$$

stetig ist. Die Messbarkeit von h folgt nun daraus, dass auch punktweise Grenzwerte komplexwertiger messbarer Funktionen messbar sind, da 1 einzeln auf Real– und Imaginärteile angewandt werden kann.

Bemerkung Ist (X, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum, so reicht es in Satz 10.1. zu fordern, dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ μ-f.ü. gilt, denn in diesem Fall bleibt die Messbarkeit erhalten, wenn man messbare Funktionen auf Nullmengen willkürlich abändert.

Satz 11: Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und sei $\mathscr{L}$ der dazu konstruierte Raum integrierbarer Funktionen. Dann gelten:

1. Ist $f \in \mathscr{L}$, so existiert eine bezüglich Σ messbare Funktion g mit $f(x) = g(x)$ f.ü.

2. Ist f messbar bezüglich Σ und existiert $g \in \mathscr{L}$ mit $|f| \leq g$ f.ü., so ist f integrierbar.

3. Für $f \in \mathscr{L}$ gilt genau dann $I(|f|) = 0$, wenn f.ü. $f(x) = 0$ ist.

Beweis:

1. Folgt daraus, dass f f.ü. Limes einer Folge von Treppenfunktionen f_j ist (Sätze 6, 7) und dass die Ausnahmemenge in einer Nullmenge $M \in \Sigma$ enthalten ist (Satz 8). Damit ist $g = f - \chi_M \cdot f = \lim_{j\to\infty} f_j \cdot (1 - \chi_M)$ messbar.

2. Es reicht aus, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten (weil $f = (\mathrm{Re} f)_+ - (\mathrm{Re} f)_- + i\,((\mathrm{Im} f)_+ - (\mathrm{Im} f)_-)$ ist und jeder Summand messbar und betragsmäßig $\leq g$ ist). Sei also $f \geq 0$. Wir setzen für $k, j \in \mathbb{N}$
$$M_{j,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]\right), \quad f_k = \sum_{j=2}^{k^2} \frac{j-1}{k} \chi_{M_{j,k}}\,.$$
Wenn wir zeigen können, dass $\mu(M_{j,k}) < \infty$, dass also die f_k elementare Treppenfunktionen sind, so folgt $f \in \mathscr{L}$ aus dem Konvergenzsatz von Lebegue, denn $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ und g ist Majorante der f_k.
Es ist also nur noch $\mu(M_{j,k}) < \infty$ zu zeigen. Dazu halten wir $k, j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$ fest. Dann gilt $\chi_{M_{j,k}} \leq k \cdot f \leq k \cdot g$ f.ü. Nach den Sätzen 6 und 7 existiert eine Folge (g_l) in $\mathscr{L}'$ mit $\lim_{l\to\infty} g_l(x) = k \cdot g(x)$ f.ü. Dabei kann $g_l \geq 0$ angenommen werden (ersetze sonst g_l durch $(g_l)_+$). Betrachtet man $V_l = \{x \in M_{j,k}\,,\ g_l(x) > 1/2\}$ $U_l = \bigcup_{m=1}^{l} V_l$, so folgen nacheinander $V_l, U_l \in \Sigma$, $\mu(V_l) < \infty$, $\mu(U_l) < \infty$, $\chi_{U_l} \in \mathscr{L}$, $\mu(U_l) = I(\chi_{U_l}) \leq k\, I(g)$ (weil $\chi_{U_l} \leq \chi_{M_{j,k}} \leq k\, g$), $\mu(\bigcup_{l=1}^{\infty} U_l) = \lim_{l\to\infty} \mu(U_l) \leq k\, I(g)$. Zuletzt wurde eine Stetigkeiseigenschaft des σ-additiven Maßes μ benutzt. Da sich aber infolge der Definitionen von V_l und U_l die Mengen $\bigcup_{l=1}^{\infty} U_l$ und $M_{j,k}$ höchstens um eine Nullmenge unterscheiden, folgt $\mu(M_{j,k}) < \infty$.

3. Ist $f(x) = 0$ f.ü., so gehört $|f(x)|$ nach Konstruktion von $\mathscr{L}''$ zu $\mathscr{L}''$ und hat das Integral Null.
Gilt umgekehrt $I(|f|) = 0$ und ist g eine Σ–messbare Funktion mit $f(x) = g(x)$ f.ü., so sind die zu Σ gehörenden Mengen $M_k = \{x \in X\ :\ |g(x)| > \frac{1}{k}\}$ wegen $\mu(M_k) = I(\chi_{M_k}) \leq I(k \cdot |g|) = 0$ Nullmengen. Da $f(x)$ f.ü. außerhalb der Nullmenge $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ gleich Null ist, ist $f(x) = 0$ f.ü.

Bemerkung: Dass für $f \in \mathscr{L}$ die Gleichung I(|f|)=0 dazu äquivalent ist, dass f.ü. gilt $f(x) = 0$, kann man mit einem etwas längeren Beweis auch für den Fall nachweisen, dass $\mathscr{L}$ und I für ein σ–additives Maß μ_0 auf einer Mengenalgebra Σ_0 von Teilmengen der Menge X konstruiert wurden.

Definitionen und Bezeichnungen: Wir gehen davon aus, dass (X, Σ, μ) ein Maßraum ist, der diesmal nicht vollständig zu sein braucht. Auf seiner Grundlage sei der Raum $\mathscr{L}$ der integrierbarn Funktionen konstruiert. (Es wird also die Konstruktion von $\mathscr{L}$ auf der Grundlage von (X, Σ, μ) anstelle von (X, Σ_0, μ_0) zugrundegelegt.)

1. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}_0(X, \Sigma, \mu)$ den Raum der komplexwertigen Σ-messbaren Funktionen auf X. Wenn klar ist, was gemeint ist, verwendet man auch kürzere Bezeichnungen, wie $\mathscr{L}_0(\Sigma)$, $\mathscr{L}_0(\mu)$.

2. Der Raum $\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ der (X, Σ, μ)-integrierbaren Funktionen wird definiert als
$$\mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu) = \{f \in \mathscr{L}\,,\ f \text{ ist } \Sigma\text{-messbar}\}\,.$$
Gegebenenfalls verwendet man wieder kürzere Bezeichnungen, wie $\mathscr{L}_1(X)$, $\mathscr{L}_1(\mu)$, $\mathscr{L}_1$.
Das Integral $I(f)$ der Funktion $f \in \mathscr{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ wird geschrieben als
$$\int f \ \mathrm{d}\,\mu = \int_X f \ \mathrm{d}\,\mu = \int_X f(x) \ \mathrm{d}\,\mu(x).$$
Ist $M \in \Sigma$ und ist
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Element von $\mathscr{L}_1(X,\Sigma,\mu)$, so definiert man

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,\mu = I(g)\,.$$

Somit hat man $\int_M f \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X \chi_M \cdot f \,\mathrm{d}\,\mu$, falls f eine auf ganz X definierte komplexwertige Funktion ist. Im Allgemeinen braucht f nicht auf ganz X definiert zu sein.
Ist $g \in \mathscr{L}$, so heißt f μ-integrierbar auf M. f heißt messbar auf M, wenn die Funktion g messbar (bezüglich Σ) ist. Der Raum der auf M definierten μ-integrierbaren Σ–messbaren Funktionen wird mit $\mathscr{L}_1(M)$ bezeichnet.

3. Ist $\rho \geq 0$ eine auf $M \in \Sigma$ messbare Funktion, die nicht über M integrierbar ist, so setzen wir $\int_M \rho \,\mathrm{d}\,\mu = \infty$.

Bemerkung Der Unterschied zwischen $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}_1(X,\Sigma,\mu)$ besteht nur für nichtvollständige Maßräume und ist nicht groß, da für jedes $f \in \mathscr{L}$ ein $g \in \mathscr{L}_1(X,\Sigma,\mu)$ mit $f = g$ μ-f.ü. existiert. Deshalb bleiben die Sätze 2–8 sinngemäß auch für $\mathscr{L}_1(X,\Sigma,\mu)$ richtig.

Satz 12: Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum. Ist $\rho \geq 0$ eine Σ-messbare Funktion und sind $M_j \in \Sigma$ ($j \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt, so gilt mit $M = \cup_{j=1}^{\infty} M_j$

$$\int_M \rho \,\mathrm{d}\,\mu = \sum \int_{M_j} \rho \,\mathrm{d}\,\mu$$

d.h. durch $\nu(M) = \int_M \rho \,\mathrm{d}\,\mu$ wird ein σ-additives Maß ν auf Σ definiert.

Beweis: Ist $\int_M \rho \,\mathrm{d}\,\mu < \infty$, so ist das Integral nach Konvergenzsatz von Lebesgue (angewandt auf die Partialsummenfolge) gleich $\sum_{j=1}^{\infty} \int \chi_{M_j} \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu$. Ist die Summe der Integrale $< \infty$, so ist sie nach B.Levi (wieder angewandt auf die Partialsummenfolge) gleich $\int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{M_j} \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu = \int \chi_M \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu$. Sind beide Werte unendlich, so ist nichts zu beweisen.

Bezeichnung Das in Satz 12 definierte Maß ν wird mit $\nu = \rho \cdot \mu$ bezeichnet.

Satz 13: Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum. Sei $\rho \geq 0$ eine Σ-messbare Funktion. Dann ist eine Funktion $f:\ X \to \mathbb{C}$ genau dann bezüglich $\nu = \rho \cdot \mu$ integrierbar, wenn $f \cdot \rho$ bezüglich μ integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_X f d\nu = \int_X f \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu$$

Beweis: Setzen $X_2 = \rho^{-1}(0), X_1 = X \backslash X_2$. Über X_2 sind beide Integrale gleich Null. Wir können also X durch X_1 ersetzen und $\rho(x) > 0$ voraussetzen. Dann stimmen Nullmengen bezüglich ν und μ nach Satz 11.3 überein. Ebenso stimmt dann die Messbarkeit überein, da dieselbe σ-Algebra betrachtet wird. Ist nun $f \in \mathscr{L}'$ (für ν) , $f = \sum c_j \chi_{M_j}$, so ist $\int f \,\mathrm{d}\,\nu = \sum c_j \int_{M_j} \rho \,\mathrm{d}\,\mu = \int f \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu$. Durch Grenzübergang mit f.ü. monoton wachsenden Folgen und Anwendung des Satzes von B. Levi auf der rechten Seite folgt $\int f \,\mathrm{d}\,\nu = \int f \cdot \rho \,\mathrm{d}\,\mu$ für jedes $f \in \mathscr{L}''$ (für ν). Durch Übergang zur linearen Hülle folgt dann Gleichheit für alle $f \in \mathscr{L}_1(X,\Sigma,\nu)$. Vertauscht man die Rollen von μ und ν (immer noch im Falle $\rho(x) > 0$), so hat man außerdem für alle $g = \rho \cdot f \in \mathscr{L}_1(X,\Sigma,\mu)$, dass $\int g \,\mathrm{d}\,\mu = \int 1/\rho \cdot g \,\mathrm{d}\,\mu$, woraus die Behauptung folgt.

Beispiele: Auf diese Weise erhält man viele Wahrscheinlichkeitsmaße. Z.B. (Referenzfall, λ sei Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \lambda$$

oder für $M \in \Sigma$ mit $0 < \lambda(M) < \infty$

$$\frac{1}{\lambda(M)} \chi_M \cdot \lambda$$

Definition: Seien μ, ν Maße auf der σ-Algebra Σ von Teilmengen von X. ν heißt absolutstetig bezüglich μ, falls für jedes $M \in \Sigma$ mit $\mu(M) = 0$ gilt $\nu(M) = 0$.

Beispiel Ist (X, Σ, μ) ein Maßraum und ist $\rho \geq 0$ messbar bezüglich Σ, so ist $\nu = \rho \cdot \mu$ absolutstetig bezüglich μ .

Satz 14: (Radon- Nikodym) Seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf derselben σ-Algebra Σ von Teilmengen der Menge X. Ist ν absolutstetig bezüglich μ, so existiert eine bezüglich Σ messbare Funktion $\rho \geq 0$ mit $\nu = \rho \cdot \mu$.

Ein relativ übersichtlicher Beweis dieses Satzes wird später auf der Grundlage des Satzes von Riesz-Fischer aus der Hilbertraumtheorie zugänglich. (Vgl. z. B. Günther, Grundkurs Analysis.)

II.1.e) Verallgemeinerung von Eigenschaften des n-dimensionalen Riemann-Integrals

Ausgangspunkt: Hier ist der Ausgangspunkt das für

$$Q_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;\ a_j < x_j \leq b_j \right\}$$

durch $\mu_0(Q_{a,b}) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ gegebene Maß. Die Fortsetzung des Maßes auf die von Σ_0 (definiert in 9.1.a), Beispiel 5) und den Nullmengen erzeugte σ-Algebra Σ heißt *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$ und wird mit λ bezeichnet. Der entsprechende Maßraum ist $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$. Die Elemente von Σ nennt man auch Lebesgue-messbar oder einfach nur messbar (falls keine Verwechslung droht). Die Integrale

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda = \int_M f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x)$$

werden auch einfach als $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ bzw., wenn $n = 1$ und M ein Intervall ist als $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet. Dies wird durch folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 15: Ist M quadrierbar, so ist M meßbar und $\lambda(M)$ ist gleich dem Jordanschen Inhalt von M. Ist f Riemann–integrierbar oder sind f und $|f|$ Riemann–integrierbar im uneigentlichen Sinne, so ist f Lebesgue–integrierbar und beide Integrale stimmen überein.

Beweis: Ist Q ein beschränkter Quader, wie er in der Konstruktion des Riemann-Integrals verwendet wurde, so unterscheidet sich Q von einem geeignet gewählten Quader $Q_{a,b}$ aus 9.1.a), Beispiel 5 höchstens um einen Teil des Randes, also um eine Nullmenge. Deshalb ist die Funktion χ_Q Lebesgue–integrierbar und ihr Lebesgue–Integral ist gleich dem Volumen von Q, also gleich dem Riemann–Integral von χ_Q. Deshalb sind auch die bei der Konstruktion des Riemann–Integrals betrachteten elementare Treppenfunktionen Lebesgue-integrierbar, wobei Lebesgue– und Riemann–Integral übereinstimmen. Ist f Riemann–integrierbar, so gibt es bekanntlich elementare Treppenfunktionen g_j, h_j mit $g_j \leq g_{j+1} \leq f \leq h_{j+1} \leq h_j$ und $\lim_{j\to\infty} I(h_j - g_j) = 0$. Nach Monotoniekriterium für Zahlenfolgen existieren die Genzwerte $g_l(x) \nearrow g(x)$ und $h_l(x) \searrow h(x)$. Nach Satz von Beppo Levi sind g, h Lebesgue-integrierbar, wobei die Lebesgue-Integrale gleich $\lim_{j\to\infty} I(g_j) = \lim_{j\to\infty} I(h_j)$, also gleich dem Riemann–Integral von f sind. (Um dise Aussage für h zu erhalten, betrachtet man $-h_l(x) \nearrow -h(x)$.)

Wegen $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ist $I(|h-g|) = I(h-g) = 0$, so dass nach Satz 11.3 fast überall $g(x) = f(x) = h(x)$ gilt. Deshalb ist f Lebesgue–integrierbar und das Lebesgue–Integral von f ist gleich $I(g)$, also gleich dem Riemann–Integral von f.

Die erste Behauptung ist der Speziallfall $f = \chi_M$. Die Behauptung für das uneigentliche Integral wird als Anwendung der Konvergenzsätze bewiesen (ÜA).

Dabei kann folgende allgemeine Definition des uneigentlichen Integrals verwendet werden.

Definition (uneigentliches absolut konvergentes Riemann-Integral): Sei $(M_j)_{j=1}^\infty$ eine aufsteigende Folge quadrierbarer Mengen $M_j \subset \mathbb{R}^n$ und sei $M = \cup_{j=1}^\infty M_j$. Ferner sei f eine wenigstens auf M definierte komplexwertige Funktion, die auf jeder der Mengen M_j Riemann-integrierbar sei. Das uneigentliche absolut konvergente Riemann-Integral $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und ist gleich $\lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f(x)\,\mathrm{d}x$, falls $\lim_{j\to\infty} \int_{M_j} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt.

Bemerkung: Im eindimensionalen Fall wird in dieser Definition im Unterschied zur ursprünglichen Definition des uneigentlichen Integrals auf $\mathbb{R}$ verlangt, daß auch $|f|$ ein endliches uneigentliches Integral besitzt. Man erreicht dadurch auch, dass das Integral unabhängig von der speziellen Wahl der M_j wird. Im allgemeinen Fall verallgemeinert die hier formulierte Definition die frühere Definition des uneigentlichen absolut konvergenten Riemann-Integrals über offene Mengen.

Die Zurückführung auf niederdimensionale Integrale wird nun durch den *Satz von Fubini* geregelt (der eigentlich allgemeiner für sogenannte Produktmaße gilt, die aber über unseren Stoff hinausgehen).

Satz 16 (Fubini): Wir gruppieren die Variablen $u \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$ als $u = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$ und bezeichnen die entsprechenden Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_u, \lambda_x, \lambda_y$. Dann sind für eine λ_u-meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f(u)$ ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.
2. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$ ist $|f(x, y)|$ integrierbar bzgl. λ_y und es gibt eine integrierbare Funktion $G \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $G(x) = \int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}\, y$ für fast alle x.

In diesem Falle existiert $F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $F(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ für fast alle x. Für diese Funktion gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^m} F(x) \,\mathrm{d}x.$$

Bemerkungen: Die Integrale $\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}\, y$ bzw. $\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ brauchen nicht für jedes x existieren (bzw. endlich sein). Die eventuelle Ausnahmemenge ist jedoch eine Nullmenge, auf die es bei der Integration nicht ankommt. Dort kann $F(x)$ bzw. $G(x)$ mit einem willkürlichen Wert genommen werden (z.B. 0). Vereinbart man, dass man auch Funktionen, die nur fast überall definiert und endlich sind, integrieren darf (indem man sie durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer richtigen Funktion macht und das Integral der abgeänderten Funktion nimmt), so kann man den Satz folgendermaßen formulieren:

Umformulierung des Satze von Fubini: Wir gruppieren die Variablen $u \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$ als $u = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$ und bezeichnen die entsprechenden Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k$ mit $\lambda_u, \lambda_x, \lambda_y$. Dann sind für eine λ_u-meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f(u)$ ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.
2. Das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x, y)| \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
existiert als iteriertes Lebesgue-Integral. (Das innere Integral braucht dabei nur fast überall existieren.)

Sind diese beiden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Als Folgerung aus dem Satz darf man im letzten Integral die Integrationsreihenfolge vertauschen, wenn die zueinander äquivalenten Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind.
Den Beweis des Satzes von Fubini kann man z. B. in Heuser 2 oder Walter 2 finden.

Der Transformationssatz lässt sich auf den Fall Lebesgue-integrierbarer Funktionen verallgemeinern.

Satz 17 (Transformationssatz): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Teilmenge und sei $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine injektive reguläre C^1-Abbildung ($\mathrm{Det}\,\phi' \neq 0$). Ferner sei f eine auf $\phi(\Omega)$ definierte komplexwertige Funktion. Dann ist f integrierbar auf $\phi(\Omega)$ gdw. $f(\phi(u)) \cdot |det\phi'(u)|$ auf Ω integrierbar im Lebesgueschen Sinne ist und es gilt

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(\phi(u)) \cdot |\mathrm{Det}\,\phi'(u)| \,\mathrm{d}u.$$

Beweisidee: Da Ref und Imf einzeln integriert werden, kann man gleich annehmen dass f reellwertig ist. Wir betrachten nun zunächst elementare TF, d.h. Elemente $f \in \mathscr{L}'$, wobei $\mathscr{L}'$ auf der Grundlage von (X, Σ_0, μ_0) aus 9.1.a), Beispiel 5 konstruiert wurde. Nimmt eine solche Funktion f außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω nur den Wert Null an, so ist die Transformationsformel für f aus der Theorie des Riemann-Integrals bekannt. Nun kann man bei gegebenem $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit $f = f \cdot \chi_\Omega$ eine Folge f_j solcher elementarer Treppenfunktionen mit $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ f.ü. und mit $\lim_{j\to\infty} I(|f_j - f|) = 0$ finden. (Verwende Sätze 6 und 7 sowie eine Ausschöpfung $\Omega = \cup_{l=1}^{\infty} K_l$, wobei $K_l \subset K_{l+1}$ kompakte Teilmengen von Ω sind, die zugleich Abschlüsse von endlichen Quadervereinigungen sind.) Dann folgt obige Gleichung durch Grenzübergang. Ist die Integrierbarkeit von $(f \circ \phi) \cdot |\mathrm{Det}\, \phi'|$ bekannt, so verwendet man das bisherige Resultat mit der inversen Abbildung ϕ^{-1} anstelle ϕ.

Es soll noch kurz eine im eindimensionalen gültige (schwierige) Verallgemeinerung der Newton-Leibniz-Formel beschrieben werden. Eine ausführliche Darstellung mit Beweisen findet man z. B. in Walter 2.

Definition (absolutstetige Funktion) Eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gegebene reellwertige (oder komplexwertige) Funktion F heißt absolutstetig auf $[a, b]$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass für endlich viele paarweise disjunkte Teilintervalle $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^m$ von $[a, b]$ mit $\sum_{j=1}^m b_j - a_j < \delta$ stets gilt $\sum_{j=1}^m |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$.
Solche Funktionen sind insbesondere stetig und von beschränkter Variation.

Allgemeines Beispiel (ÜA) Ist f auf $[a, b]$ integrierbar (d.h. $f \in \mathscr{L}_1([a, b])$), so ist $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t$ absolutstetig auf $[a, b]$.

Ist eine reellwertige Funktion F absolutstetig auf $[a, b]$, so kann man F (unter Verwendung der vollständigen Variation) als Differenz monoton wachsender absolutstetiger Funktionen schreiben. Eine monoton wachsende, absolutstetige Funktion F auf $[a, b]$ kann man dann auf $(-\infty, a)$ durch $F(a)$ und auf (b, ∞) durch $F(b)$ fortsetzen. Danach kann man auf der Grundlage von Beispiel 4 in 9.1.a) ein Maß ν mit $\nu((a, x]) = F(x) - F(a)$ definieren. Mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym kann man dann eine Funktion f (≥ 0) so finden, dass für $x \in [a, b]$ gilt $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t$. Der folgende Satz beinhaltet viel mehr:

Satz 18 Ist F eine auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gegebene absolutstetige Funktion, so existiert eine Funktion $f \in \mathscr{L}([a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}\, t.$$

Darüberhinaus ist F fast überall in $[a, b]$ differenzierbar und die Ableitung $F'(x)$ ist fast überall in $[a, b]$ gleich $f(x)$. (Insbesondere ist also die Funktion $f(x)$ in der Integraldarstellung von F bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt.)

II.1.f) Sätze über Parameterintegrale

Satz 19 (Stetigkeitssatz): Sei (X, Σ, μ) ein (vollständiger) Maßraum und sei (Y, ρ) ein metrischer Raum. Sei $f(x, y)$ eine komplexwertige Funktion auf $X \times Y$, die für jedes feste y integrierbar sei und die für jedes feste x stetig von y abhänge. Gibt es eine von y unabhängige integrierbare Majorante $g(x)$ (d.h. $|f(x, y)| \le g(x)$ μ-f.ü. bei jedem festen y), so wird durch $F(y) = \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ eine stetige Abbildung $Y \to \mathbb{C}$ gegeben.

Beweis: Gilt $\lim_{j\to\infty} y_j = y$ in Y, so folgt mit $f_j(x) = f(x, y_j)$ und $f(x) = f(x, y)$, dass $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ und dass g eine integrierbare Majorante für die Funktionen f_j ist. Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt nun $\lim_{j\to\infty} \int f_j(x)\ \mathrm{d}\,\mu(x) = \int f(x)\ \mathrm{d}\,\mu(x)$, d.h. $\lim_{j\to\infty} F(y_j) = F(y)$.

Beispiel (Stetigkeit der Fouriertransformierten): Für $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ wird die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ definiert durch

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

Diese hängt dann stetig von x ab. (Man kann auch noch $\lim_{x\to\pm\infty} \widehat{f}(x) = 0$ beweisen).
Analoge Aussagen gelten für die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t$$

einer Funktion $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 20 (Differentiationssatz): Seien folgende Voraussetzungen erfüllt: (X, Σ, μ) sei ein (vollständiger) Maßraum, Y sei eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $f(x, y)$ sei eine komplexwertige Funktion auf $X \times Y$, für jedes feste $x \in X$ sei $f(x, y)$ stetig differenzierbar nach den y-Variablen, für jedes feste $y \in Y$ sei $f(x, y)$ μ-integrierbar, auf X gebe es eine integrierbare Funktion $g(x)$ mit $|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}| \le g(x) \quad (\forall (x, y) \in X \times Y)$.
Dann ist die Funktion $F(y) = \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}x$ auf Y stetig partiell nach y_j differenzierbar, die Funktionen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}$ sind bei jedem festen $y \in Y$ μ-integrierbar und es gilt:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y_j} = \int_X \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Beweisidee: Da Real- und Imaginärteil einzeln behandelt werden können, kann man gleich voraussetzen, dass f reellwertig ist. Aus dem Mittelwersatz der Differentialrechnung folgt dann, dass die bezüglich h in einer Umgebung der Null stetige Funktion

$$\widetilde{f}(h, x, y) = \begin{cases} 1/h\ \left(f(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + h, y_{j+1}, \ldots, y_n) - f(x, y)\right) & \text{falls } h \neq 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j} & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

bei bliebig gewählten zulässigen Werten für y und h die Funktion g zur Majorante hat. Nun folgt die behauptete Formel aus dem Stetigkeitssatz, wenn man in

$$\frac{1}{h}\left(F(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + h, y_{j+1}, \ldots, y_n) - F(y)\right) = \int \widetilde{f}(h, x, y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

den Grenzwert für $h \to 0$ betrachtet. Aus dem Stetigkeitssatz folgt dann auch noch, dass $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_j} = \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\mu(x)$ stetig von y abhängt.

Beispiel: (ÜA) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist K messbar (χ_K ist sogar integrierbar). Für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\rho : K \to \mathbb{R}$ wird nun das Newton-Potential (der Massendichte ρ) durch

$$u(y) = \int_K \frac{\rho(x)}{|x-y|} \, \mathrm{d}x \quad (y \notin K).$$

gegeben. Dann ist u harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus K$.
Dies gilt analog auch für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^2$, für eine integrierbare Funktion $\rho : K \to \mathbb{R}$ und für das zweidimensionale Newton-Potential

$$u(y) = \int_K \rho(x) \ln |x-y| \, \mathrm{d}x.$$

Satz 21 (Holomorphiesatz): Sei $Y \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und sei $f(x,y)$ eine auf $X \times Y$ definierte komplexwertige Funktion. Sei $f(x,y)$ für jedes feste $x \in X$ eine auf Y holomorphe Funktion von y, sei $f(x,y)$ für jedes feste $y \in Y$ eine Σ-messbare Funktion und existiere eine integrierbare Funktion $g(x)$ auf X mit $|f(x,y)| \le g(x)$ (überall oder wenigstens für jedes feste y μ-f.ü.). Dann ist die Funktion $F(y) = \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\,\mu(x)$ holomorph und erfüllt:

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Den Beweis kann man in Königsberger, Analysis 2 finden. Mit Hilfe der verallgemeinerten Integralformel von Cauchy für Ableitungen weist man zuerst nach, dass die komplexe Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ zumindest lokal bezüglich y (d.h. in einer Umgebung eines beliebigen, aber für den Moment fest gewählten $y_0 \in Y$) eine von y unabhängige Majorante besitzt. Dann kann man ähnlich wie bei Satz 20 vorgehen.