Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, den 4. 6. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 9

Aufgabe 1. (*2 Punkte*)
Hier und in den folgenden Aufgaben wird das m-dimensionale Lebesgue-Maß λ und der entsprechende vollständige Maßraum $(\mathbb{R}^m, \Sigma, \lambda)$ zugrundegelegt. Dabei ist in den Aufgaben 1-4 auch noch $m = 1$.
Man weise nach, dass die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (also die charakteristische Funktion der Menge der rationalen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$) nicht Riemann-integrierbar, jedoch Lebesgue-integrierbar ist. Ferner bestimme man das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \, d\lambda$.

Aufgabe 2. (*2 Punkte*)
Man zeige, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Man zeige auch, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ konvergiert.
Hinweis: Durch partielle Integration kann der Beweis der Konvergenz des uneigentlichen Integrals auf den Nachweis der absoluten Konvergenz eines anderen Integrals zurückgeführt werden. Es gibt aber auch andere mögliche Ansätze.

Aufgabe 3. (*2 Punkte*)
Man konstruiere eine Folge integrierbarer nichtnegativer Funktionen f_j, die nicht fast überall gegen Null konvergiert, für die aber die Folge der Integrale gegen Null konvergiert.
Bemerkung: Nach Satz II.1.7 gibt es eine fast überall konvergierende Teilfolge mit integrierbarer Majorante.

Aufgabe 4. (*Cantor-Menge, 2 Punkte*)
Man zeige, dass die Menge

$$K = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{3^k-1} \left(\frac{3j+1}{3^{k+1}}, \frac{3j+2}{3^{k+1}} \right) \right)$$

eine Nullmenge ist.

Zur Veranschaulichung skizziere man die Menge $[0,1] \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{1} \bigcup_{j=0}^{3^k-1} \left(\frac{3j+1}{3^{k+1}}, \frac{3j+2}{3^{k+1}} \right) \right)$.

Aufgabe 5. (*2 Punkte für offenes M +2 Extrapunkte für den allgemeinen Fall*)
a) Betrachtet werde eine offene nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$. Man zeige, dass jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{C}$, die auf M stetig ist und für die $f = \chi_M \cdot f$ gilt, messbar ist.
b) Man löse diese Aufgabe für eine beliebige nichtleere Menge $M \in \Sigma$.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 11. 6. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, 4. 6. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 9

Exercise 1. (*2 points*)
Here and in the following exercises there will be considered the Lebesgue measure λ on $\mathbb{R}^m$ and the corresponding complete measure space $(\mathbb{R}^m, \Sigma, \lambda)$ as the underlying measure and measure space. Moreover, in exercises 1-4, the dimension is $m = 1$.
Show that the function $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (i. e., the characteristic function of the set of all rational numbers belonging to $[0, 1]$) is Lebesgue integrable, but not Riemann integrable. Determine also the Lebesgue integral $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \, \mathrm{d}\lambda$.

Exercise 2. (*2 extra points*)
Show that the function $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ is not Lebesgue integrable on the interval $(0, \infty)$.
Show also that the improper integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ converges.
Hint: One can use partial integration to reduce the proof of the convergence of the improper integral to the verification of the absolute convergence of another integral. However, there exist different approaches to this problem.

Exercise 3. (*2 points*)
Construct a sequence f_j of non-negative integrable functions, which does not converge to 0 almost everywhere, and for which the sequence of the integrals converges to 0.
Remark: By Proposition II.1.7, there exists a subsequence, converging a. e. and admitting an integrable majorant.

Exercise 4. (*Cantor set, 2 points*)
Show that the set

$$K = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{3^k-1} \left(\frac{3j+1}{3^{k+1}}, \frac{3j+2}{3^{k+1}} \right) \right)$$

is a null set.
Produce also a sketch of the set $[0, 1] \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{1} \bigcup_{j=0}^{3^k-1} \left(\frac{3j+1}{3^{k+1}}, \frac{3j+2}{3^{k+1}} \right) \right)$.

Exercise 5. (*2 points for the open set +2 extra points for the general case*)
a) Let a non-empty open subset $M \subset \mathbb{R}^m$ be given. Show that each Funktion $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{C}$ which is continuous on M and satisfies $f = \chi_M \cdot f$, is measurable.
b) Solve this exercise for an arbitrary non-empty set $M \subset \mathbb{R}^m$.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 11. 6. 2014.