Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, den 11. 6. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 10

Aufgabe 1. (*Vollständigkeitskriterium, 2 Punkte*)
Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ eine fest gewählte konvergente Reihe positiver reeller Zahlen. Man zeige, dass ein normierter Raum E genau dann vollständig ist, wenn jede Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ von Elementen $f_j \in E$, die die Ungleichungen $\|f_j\| < c_j$ erfüllen, in E konvergiert.
Hinweis: Vgl. Beweis von Satz 7 in II.1.

Aufgabe 2. (*2 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \frac{1}{|x|}$ gegebene Funktion f (genauer deren Funktionenklasse) für kein $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ in $L_p(0, 1)$ liegt.

Aufgabe 3. (*2 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^2$ für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ durch $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}$ gegebene Funktion für jedes $p \in [1, 2)$ zu $L_p(U)$ gehört, wobei U die offene Einheitskreisscheibe $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 < 1\}$ bezeichne.

Aufgabe 4. (*2 Extrapunkte*)
Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ werde mit $|x|$ bezeichnet. Betrachtet werde die Menge $O = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| > 2\}$. Man bestimme in Abhängigkeit von d die Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$, für die die durch $f(x) = |x|^{\alpha}$ definierte Funktion in $L_p(O)$ liegt.
Eine Lösung für Dimensionen $d \leq 3$ wird auch akzeptiert.

Aufgabe 5. (*2 Punkte und 2 Extrapunkte*)
Der Träger Supp f einer stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ ist als Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ definiert. Mit $C_c(\mathbb{R}^d)$ sei der lineare Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$, deren Träger Supp f kompakt ist, bezeichnet.
a) Man zeige, dass die Abbildung $A : C_c(\mathbb{R}^d) \mapsto L_p(\mathbb{R}^d)$, die jeder Funktion aus $C_c(\mathbb{R}^d)$ ihre Funktionenklasse zuordnet, für jedes $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ injektiv ist.
b) Nach a) kann $C_c(\mathbb{R}^d)$ als linearer Unterraum von $L_p(\mathbb{R}^d)$ angesehen werden, wenn man $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit seiner Funktionenklasse $\tilde{f}$ identifiziert. Man zeige im Fall $p = 1$, dass dieser Unterraum dicht ist.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 18. 6. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Klaus-Detlef Kürsten

Leipzig, 11. 6. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 10

Exercise 1. (*Completeness test, 2 points*)
Let a convergent series $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ of positive real numbers be fixed. Show that a normed space E is complete if and only if any series $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ of elements $f_j \in E$ satisfying $\|f_j\| < c_j$ for all indexes j, converges in E.
Hint: Cf. the proof of Satz 7 in II.1.

Exercise 2. (*2 points*)
Show that the function f given by $f(x) = \frac{1}{|x|}$ (more precisely its equivalence class) does not belong to $L_p(0,1)$ for any $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$.

Exercise 3. (*2 points*)
Let U denote the open unit disc $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 < 1\}$ in $\mathbb{R}^2$. Show that the function f defined for $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ by $f(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}}$ belongs to $L_p(U)$ for all $p \in [1,2)$.

Exercise 4. (*2 extra points*)
Let the Euklidian norm on $\mathbb{R}^d$ be denoted by $|x|$ and let $O \subset \mathbb{R}^d$ be defined as $O = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| > 2\}$. Determine, in dependence on the dimension d, the values $\alpha \in \mathbb{R}$ and $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$, for which the function f given by $f(x) = |x|^\alpha$ belongs to $L_p(O)$.
A solution for dimensions $d \leq 3$ will be accepted too.

Exercise 5. (*2 points and 2 extra points*)
The support Supp f of a continuous function $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ is defined to be the closure of the set $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$. Let $C_c(\mathbb{R}^d)$ denote the linear space of all continuous functions $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$, for which the support Supp f is a compact set.
a) Show that the map $A : C_c(\mathbb{R}^d) \mapsto L_p(\mathbb{R}^d)$, which assigns to each function belonging to $C_c(\mathbb{R}^d)$ its equivalence class, is injective.
b) As a consequence of a), $C_c(\mathbb{R}^d)$ may be considered as a linear subspace of $L_p(\mathbb{R}^d)$, when $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ is identified with its equivalence class $\tilde{f}$. Show in case $p = 1$, that this subspace is dense.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 18. 6. 2014.