

Hemmi–Polyeder

Der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig eingereichte

Habilitationsschrift

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium habilitatus
Dr. rer. nat. habil.

vorgelegt von:

Dr. Anita Kripfganz
geboren am 23. 01. 1950 in Chemnitz

Die Annahme der Habilitationsschrift haben empfohlen:

1. Prof. Dr. Hans-Joachim Girlich, Universität Leipzig
2. Prof. Dr. Diethard Klatte, Universität Zürich
3. Prof. Dr. Rolf Klötzler, Universität Leipzig
4. Prof. Dr. Jörg M. Wills, Universität Siegen

Beschluss über die Verleihung des akademischen Grades
vom 23. 06. 2003

Vorwort

Unter den geometrischen Extremalproblemen erwies sich die Suche nach flächenkleinsten ebenen konvexen Figuren vorgegebenen Umfangs und Durchmessers als eine lange ungelöste, anspruchsvolle Aufgabe. Die vorliegende Habilitationsschrift stellt eine Behandlung dieses isoperimetrisch–isodiametrischen Problems mit Methoden der Optimierung und Optimalen Steuerung vor und diskutiert strukturelle Hintergründe der Untersuchungsergebnisse.

Durch eine Reihe von Arbeiten zu ähnlichen geometrischen Aufgaben entwickelte sich in der Arbeitsgruppe “Optimierung“ des Leipziger Mathematischen Instituts unter der Leitung von JOACHIM FOCKE und ROLF KLÖTZLER das Interesse an diesem Problem. Zunächst formulierte KLÖTZLER 1986 für den studentischen Lagrange–Wettbewerb die aus dem Favard–Problem [28] resultierende Aufgabe, unter allen, einem Kreis einbeschriebenen konvexen n –seitigen Polyedern vorgegebenen Flächeninhalts dasjenige größten Umfangs zu bestimmen. Hierauf folgten Vorträge von FOCKE und KLÖTZLER [35, 37, 39, 74] im Arbeitsgruppenseminar über Eigenschaften der zugehörigen Optimalwertfunktion, die als Favard’s ‘fonction penetrante’ bezeichnet wurde, und über Paare flächenminimaler Inpolyeder des Einheitskreises [36]. Dabei stellte sich ein interessantes Verzweigungsverhalten der Lösungsstruktur heraus, für dessen numerische Auswertung FOCKE [38] ein modifiziertes Newton–Verfahren vorschlug. Diese Vorträge waren einerseits Ausgangspunkt der Untersuchungen zum isoperimetrisch–isodiametrischen Problem [18, 19, 92], andererseits lieferten sie Ideen für die Ausarbeitung verallgemeinerter Konvexitätskonzepte [39, 37, 51, 74, 79, 103, 117], für die Diskussion einer Klasse nichtlinearer Ressourcen–Aufteilungsprobleme im Zusammenhang mit Untersuchungen zur auftretenden Symmetriebrechung [80, 81, 84, 127] und nicht zuletzt auch für die weitere Entwicklung der Theorie der Optimalen Steuerung [70].

Bei einer analytischen Formulierung von Extremalaufgaben in Bezug auf Kenngrößen konvexer Körper treten häufig Ungleichungsrestriktionen auf. Bereits 1934

bemerkten BONNESEN und FENCHEL [15], dass dadurch bei vielen dieser Probleme die klassischen Zugänge der Variationsrechnung nur in bescheidenem Maße wirksam werden. Außerdem sind polyedrische Lösungen nicht mittels Stützfunktion im klassischen Funktionenraum erfassbar. Mit dem von KROTOV [85] 1973 und KLÖTZLER [67, 68] 1977 entwickelten verallgemeinerten Dualitätskonzept der Steuerungstheorie und der von KLÖTZLER [70] 1988 bewiesenen distributionellen Version des Pontrjagin'schen Maximumprinzips standen schließlich Instrumentarien zur Verfügung, mit welchen sich eine Reihe ebener geometrischer Extremalaufgaben nun erfolgreich analytisch behandeln ließen (siehe etwa [3, 75, 76, 77] und [31, 71]).

Diese Entwicklung verleitete uns zum Versuch, das isoperimetrisch–isodiametrische Problem analytisch zu lösen. Dabei musste mit einer verzweigten Lösung gerechnet werden. Die Ursachen hierfür waren letztendlich darin zu sehen, dass es sich bei dieser Aufgabe um die Suche nach der globalen Lösung eines konkaven parametrischen Minimierungsproblems handelt. Es war deshalb auch nicht zu erwarten, das Optimum allein mit lokalen Methoden zu finden. Das Problem ließ sich in verschiedene Teilprobleme aufspalten, an deren Diskussion und numerischer Auswertung auch Diplomanden beteiligt waren [18, 19, 92].

Die Aufgabe schien gelöst, bis sich noch ein entscheidender Fehler in den Überlegungen herausstellte. Die auftretende Lücke konnte bislang mit unseren Methoden nicht geschlossen werden. In der Literatur stießen wir schließlich auf Veröffentlichungen der japanischen Geometer KUBOTA und HEMMI, die nach längeren Bemühungen eine Lösung des obigen isoperimetrisch–isodiametrischen Problems in den Jahren 1953 und 1954 gefunden haben [53, 54, 55, 56, 57]. Gestützt auf ihr Resultat aus [54], dass optimale Figuren unter denjenigen mit maximalem Umkreisradius zu suchen sind, konnten wir die von ihnen hergeleiteten, stückweise gültigen scharfen Ungleichungsrelationen zwischen Flächeninhalt, Umfang und Durchmesser einer konvexen Figur bestätigen. Optimale Figuren bezeichneten wir als *Hemmi–Polyeder*. Unser Zugang ermöglichte mit der Berechnung von Verzweigungspunkten der Lösungsstruktur auch eine numerische Auswertung der Ergebnisse.

Die überaus aufgeschlossene, anregende und fruchtbare Atmosphäre in der Leipziger Optimierungsgruppe waren für mich die wichtigste Erfahrung bei der Beschäftigung mit dieser Thematik. Sehr dankbar bin ich hierbei den Professoren JOACHIM FOCKE und ROLF KLÖTZLER, die mich mit ihren Ideen und Vorarbeiten zur Beschäftigung mit dieser Thematik anregten und meine Arbeiten mit kritischer Aufmerksamkeit begleiteten. Mein besonderer Dank gilt Prof. KLÖTZ-

LER für sein stets anspornendes Interesse und seine nimmermüde Diskussionsbereitschaft. Für ihren ermunternden Zuspruch bedanke ich mich stellvertretend bei Prof. A. GÖPFERT (Halle), Prof. H. MARTINI (Chemnitz), Prof. OPFER (Hamburg), Prof. H. X. PHU (Hanoi), Prof. S. PICKENHAIN (Cottbus) und Prof. W. SCHMIDT (Greifswald). Darüber hinaus bedanke ich mich bei Frau Karla Rietz für ihre große Hilfe bei der technischen Fertigstellung dieser Arbeit und bei meinem Mann Jochen für seine umfangreiche Unterstützung.

Leipzig, den 20. August 2002

Anita Kripfganz

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Abbildungsverzeichnis	vii
Tabellenverzeichnis	ix
Liste der Extremalprobleme	xi
Notation	xiii
Motivation und Ziele	1
1 Geometrische Extremalaufgaben	7
1.1 Raum der konvexen Figuren	8
1.2 Charakteristische Parameter	14
1.3 Ungleichungen und Blaschke–Diagramme	19
2 Verallgemeinertes Favard-Problem	27
2.1 Problemstellung	28
2.2 Behandlung als Steuerproblem	30
2.3 Fastreguläre Sektorinpolyeder	37
3 Favard’s ’fonction penetrante’	49
3.1 Analytische Eigenschaften	50
3.2 Glättung	59
3.3 Konvexitätsdefekte	63
3.4 Grobkonvexität	65

4	Aufteilungsprobleme	69
4.1	Grundaufgabe	70
4.2	Paar-Aufteilungsproblem	72
4.3	Aufteilungsproblem für m -Tupel	75
5	Isoperimetrisch–Isodiametrisches Problem	83
5.1	Satz von Hemmi-Kubota	84
5.2	Umfangsaufteilung	87
5.3	Numerik und Beispiele	101
5.4	Isoperimetrisch–Isodiametrische Ungleichungen	107
	Anhang	115
A.1	Sobolev–Räume und Distributionen	115
A.2	Pontrjagin’sches Maximumprinzip	119
	Literatur	123
	Index	134

Abbildungsverzeichnis

1.1	Reuleaux–Dreieck	17
1.2	Ungleichungen für Paare aus $\{D, R, L\}$	20
1.3	Beweisskizze	22
1.4	Blaschke-Diagramm für (D, R, L)	23
2.1	Sektorinbereiche	28
2.2	Sektorinpolyeder	29
2.3	Fastreguläres Kreisinpolyeder	38
3.1	'fonction penetrante' für $\omega = 2\pi$	50
3.2	Ableitung der 'fonction penetrante' für $\omega = 2\pi$	53
3.3	Sekantenmonotonie–Ungleichung (3.16)	58
5.1	Tripel von Kreisinpolyedern	104
5.2	Tripel von Sektorinpolyedern	105
5.3	Hemmi–Polyeder mit $L=3.12058$	107
5.4	Hemmi–Polyeder mit $L=3.11359, L=3.12387, L=3.12567$	114

Tabellenverzeichnis

5.1	Ungleichung (5.19) für $\omega = \frac{\pi}{3}$ und $m = 3$	101
5.2	Verzweigungsparameter	102
5.3	Lösungsstrukturen im Fall $\omega = 2\pi, n = 4$	103
5.4	Lösungsstrukturen im Fall $\omega = \frac{\pi}{3}, n = 3, 4, 5$	106

Liste der Extremalprobleme

- $(\underline{P}_{L,\{D,R\}})$: Umfangminimierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Durchmesser und Umkreisradius
- $(\overline{P}_{R,\{L,D\}})$: Umkreismaximierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Umfang und Durchmesser
- $(\overline{P}_{F,\{L,R\}})$: Flächenmaximierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Umfang und Umkreisradius
- $(\underline{P}_{F,\{L,R\}})$: Flächenminimierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Umfang und Umkreisradius
- $(\overline{P}_{F,\{L,D\}})$: Flächenmaximierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Umfang und Durchmesser
- $(\underline{P}_{F,\{L,D\}})$: Flächenminimierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Umfang und Durchmesser
- $(\overline{P}_{F,\{D,R\}})$: Flächenmaximierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Durchmesser und Umkreisradius
- $(\underline{P}_{F,\{D,R\}})$: Flächenminimierung konvexer Figuren bei vorgegebenem Durchmesser und Umkreisradius
- $(FP^{\omega,L})$: Verallgemeinertes Favard–Problem: Flächenminimierung von Sektorinbereichen bei vorgegebenem Sektorwinkel ω und Umfang L
- $(SP^{\omega,L})$: Optimalsteuerproblem zum Verallgemeinerten Favard–Problem

- $(\mathbf{P}^{\omega, L})$: Nichtlineares Optimierungsproblem zum Verallgemeinerten Favard–Problem: Flächenminimierung von Sektorinpolyedern bei vorgegebenem Sektorwinkel ω und Umfang L
- $({}^m\mathbf{Q}^c)$: Allgemeines m -Tupel–Aufteilungsproblem mit Kopplungsparameter mc
- (\mathbf{Q}_c) : Paaraufteilungsproblem mit Kopplungsparameter $2c$ in äquivalenter Formulierung zum Problem $({}^2\mathbf{Q}^c)$
- $({}^m\mathbf{P}_\omega^\Lambda)$: Allgemeines Umfangsaufteilungsproblem für m -Tupel fastregulärer Sektorinpolyeder mit Gesamtumfang $m\Lambda$ und Sektorwinkel ω
- $(+\mathbf{P}_{2\omega}^{2\Lambda})$: Verallgemeinertes Favard–Problem $(\mathbf{P}^{2\omega, 2\Lambda})$ mit Zusatznebenbedingung (+) an die Zentriwinkel
- $(-\mathbf{P}_{2\omega}^{2\Lambda})$: Verallgemeinertes Favard–Problem $(\mathbf{P}^{2\omega, 2\Lambda})$ mit Zusatznebenbedingung (-) an die Zentriwinkel

Notation

allgemein:

\mathbb{E}^n	Euklidischer n -dimensionaler Raum
\mathcal{K}^n	Raum der konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{E}^n$
\mathcal{K}^2	Raum der konvexen Figuren $B \subseteq \mathbb{E}^2$
$\mathcal{K}_{\mathcal{D}}^2 \subseteq \mathcal{K}^2$	Raum der konvexen Figuren mit fixierter Durchmesser-Richtung
$\mathcal{K}_{\Delta}^2 \subseteq \mathcal{K}^2$	Raum der konvexen Figuren mit fixierter Dicke-Richtung
$B_r^n \subseteq \mathbb{E}^n$	n -dimensionale Kugel um den Nullpunkt mit Radius r
S^{n-1}	Einheitssphäre des \mathbb{E}^n
δ	Hausdorff-Metrik in \mathcal{K}^n
H_K	Stützfunktion eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$
δ_{t_0}	in t_0 konzentrierte δ -Distribution

konvexe Figuren:

h_B	Stützfunktion von B in Polarkoordinatendarstellung, definiert auf der Einheitskreislinie,
ϱ_B	Krümmungsradius von B in Polarkoordinatendarstellung
w_B	Breitenfunktion von B in Polarkoordinatendarstellung
$\mathcal{D}(B) = D$	Durchmesser von B
$\Delta(B) = d$	Dicke von B

$\mathcal{F}(B) = F$	Flächeninhalt von B
$\mathcal{L}(B) = L$	Umfang von B
$\mathcal{R}(B) = R$	Umkreisradius von B
$r(B) = r$	Inkreisradius von B

Sektorinbereiche:

$S_\omega \subseteq \mathbb{E}^2$	Einheitskreissektor mit Zentrum O , Sektorwinkel ω , Sektorbogen s_ω und gleichschenkligen Dreieck Δ_ω
$B_\omega \subseteq S_\omega$	Sektorinbereich von S_ω
$b_\omega \subseteq \partial B_\omega$	Randkurve von B_ω zwischen den Schenkeln von S_ω
$\mathcal{L}_\omega(B_\omega)$	Länge der Randkurve b_ω von B_ω
$P_\omega \subseteq S_\omega$	Sektorinpolyeder von S_ω
$p_\omega \subseteq \partial P_\omega$	Randpolygon von P_ω zwischen den Schenkeln von S_ω
l_1^ω	minimale Länge von b_ω bzw. p_ω
$F(\varphi; n)$	Flächeninhalt eines n -seitigen Sektorinpolyeders mit Vektor φ der Zentriwinkel
$L(\varphi; n)$	Länge des Randpolygons p_ω eines n -seitigen Sektorinpolyeders mit Vektor φ der Zentriwinkel

fastreguläre Sektorinpolyeder:

${}^n F_\omega(\alpha)$	Flächeninhalt eines n -seitigen fastregulären Sektorinpolyeders mit charakteristischem Winkel α
${}^n L_\omega(\alpha)$	Länge des Randpolygons p_ω eines n -seitigen fastregulären Sektorinpolyeders mit charakteristischem Winkel α
$F_\omega(\alpha)$	Flächeninhalt eines fastregulären Sektorinpolyeders mit charakteristischem Winkel α
$L_\omega(\alpha)$	Länge des Randpolygons p_ω eines fastregulären Sektorinpolyeders mit charakteristischem Winkel α

$f_n^\omega = \frac{n}{2} \sin \frac{\omega}{n}$	Flächeninhalt eines regulären n -seitigen Sektorinpolyeders
$l_n^\omega = 2n \sin \frac{\omega}{2n}$	Länge des Randpolygons p_ω eines regulären n -seitigen Sektorinpolyeders
$\alpha_n^\omega = \frac{\omega}{n}$	charakteristischer Winkel eines regulären n -seitigen Sektorinpolyeders
$I_n = [l_{n-1}, l_n]$	abgeschlossene Teilintervalle von $[l_1^\omega, \omega)$, $n = 2, 3, \dots$
$I_n^0 = (l_{n-1}, l_n)$	offene Teilintervalle von (l_1^ω, ω) , $n = 2, 3, \dots$, bzgl. des Umfangs fastregulärer n -seitiger Sektorinpolyeder
$I_n = {}^m I_n^- \cup {}^m I_n^+$	Teilung des Intervalls I_n im Verhältnis $1 : (m - 1)$
$\alpha_\omega(L)$	charakteristischer Winkel eines fastregulären Sektorinpolyeders P_ω mit Länge L des Randpolygons p_ω
$\delta_\omega(L)$	Defektwinkel eines fastregulären Sektorinpolyeders P_ω mit Länge L von p_ω
f_ω	'fonction penetrante': Flächeninhalt eines fastregulären Sektorinpolyeders P_ω als Funktion der Länge von p_ω
\tilde{f}_ω	geglättete 'fonction penetrante', untere konvexe Einhüllende von f_ω

Konvexitätsdefekte:

λ_n^ω	Wendepunkt der 'fonction penetrante' f_ω auf I_n^0
${}^\mu \varphi_f$	Konvexitätsdefektfunktion einer streng konvex-konkaven Funktion f
$\xi(\mu)$	Nullstelle von ${}^\mu \varphi_f$
ξ_m	Nullstelle von ${}^\mu \varphi_f$ zum Parameterwert $\mu = \frac{1}{m}$ für $m \geq 2$
${}^m D_\omega^n$	Konvexitätsdefektfunktion von f_ω auf I_n
${}^m \lambda_n^\omega$	Nullstelle von ${}^m D_\omega^n$ auf I_n^0

Aufteilungsprobleme:

${}^m\mathbf{x}$	zulässige Lösung des allgemeinen Aufteilungsproblems (${}^m\mathbf{Q}^c$)
${}^m\mathbf{x}^\sigma$	symmetrische Lösung von (${}^m\mathbf{Q}^c$)
I_k	Auswahl der Länge k aus $\{1, \dots, m\}$
${}^m\mathbf{x}_{I_k}$	partielle Lösung bez. ${}^m\mathbf{x}$ zur Auswahl I_k
${}^m\mathbf{e}_i$	i -ter Einheitsvektor des \mathbb{R}^m
${}^m\mathbf{L}$	zulässige Lösung des Umfangsaufteilungsproblems (${}^m\mathbf{P}_\omega^\Lambda$)
${}^m\mathbf{L}^\sigma$	symmetrische Umfangsaufteilung bez. (${}^m\mathbf{P}_\omega^\Lambda$)

Motivation und Ziele

Viele geometrischen Probleme sind intuitiv im Sinne einer einfachen und verständlichen Formulierbarkeit. Oft sind jedoch ernsthafte Bemühungen nötig, um sie zu lösen. Und manchmal trifft man auch noch im ebenen Fall auf ein lange ungelöstes Problem. Die vorliegende Arbeit erhielt ihre Anregungen aus der Beschäftigung mit folgender Fragestellung:

Welche ebenen konvexen Figuren besitzen bei vorgegebenem Umfang und Durchmesser kleinsten Flächeninhalt?

Eine Lösung dieses *isoperimetrisch–isodiametrischen Problems* liefert eine scharfe untere Schranke für den Flächeninhalt F in Abhängigkeit von Umfang L und Durchmesser D . Diese Schranken werden durch entsprechende Optimalfiguren realisiert. Geometrische Extremalprobleme dieser Art wurden erstmals weitgehend von BONNESEN und FENCHEL [15] 1934 zusammengestellt. Hier wird das obige Problem unter den noch nicht vollständig gelösten Aufgaben erwähnt. Unter den Figuren mit maximalem Verhältnis von Umfang und Durchmesser, also $L = \pi D$, ist seit den Beweisen von BLASCHKE [11] 1915 und LEBESGUE [89] 1914 die Minimaleigenschaft des Reuleaux–Dreiecks bekannt. Für den Fall $2D \leq L \leq 3D$ hatte KUBOTA [87] 1923 eine scharfe Ungleichung zwischen F , L und D hergeleitet. Unbekannt waren lange Zeit optimale Figuren für die verbleibenden Fälle $3D < L < \pi D$.

JAGLOM und BOLTJANSKI stellten 1956 in ihrer Aufgabensammlung [60] eine Vielzahl schöner konstruktiver Lösungen für ebene geometrische Extremalprobleme vor. Die vollständige Lösung obiger Aufgabe formulierten sie als ungelöstes Problem. Selbst wesentlich später wird in der einschlägigen Literatur wie in der Übersichtsarbeit zu geometrischen Ungleichungen von BURAGO und ZALGALLER [22], in der enzyklopädischen Sammlung geometrischer Ungleichungen von MITRINOVIĆ, PEČARIĆ und VOLONEC [98], im Problembuch zu ungelösten Problemen der Geometrie von CROFT, FALCONER und GUY [24], in den Übersichtsartikeln von SANTALO [110], CHAKERIAN und GROEMER [23] sowie von

FLORIAN [32] keine Lösung des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems erwähnt. Im Jahre 1992 wies HANSEN [48] auf eine Lösung dieses Problems durch HEMMI und KUBOTA hin. In ihren 1953 und 1954 in japanischen Zeitschriften publizierten Artikeln [53, 54, 55, 56, 57] wurden die von SHOLANDER [115] 1952 aufgestellten Vermutungen zur Struktur der Optimalfiguren und Qualität der Ungleichungen bestätigt.

Flächeninhalt, Umfang, Durchmesser, Dicke, Um- und Inkreisradius sind grundlegende *charakteristische Parameter konvexer Figuren*. Beziehungen zwischen solchen Parametern können durch Ungleichungen und Systeme von Ungleichungen beschrieben werden. Die Frage, ob zu jeder Lösung eines derartigen Ungleichungssystems auch eine passende konvexe Figur existiert, führt nach SANTA-LO [110] auf den Begriff des vollständigen Ungleichungssystems. Die Herleitung scharfer Ungleichungen entspricht hier der Lösung eines restringierten Extremalproblems im Raum der konvexen Figuren. Klassisch ist im ebenen Fall das Dido'sche Problem. Die Motivation, sich mit solchen Aufgaben zu befassen, resultiert aus der Suche nach strukturellen Eigenschaften konvexer Figuren und Körper, aus der Dynamik zwischen durchschaubarer Formulierung und anspruchsvoller, oft auch ästhetischer Lösung des Problems sowie aus den vielfältigen Möglichkeiten, geometrische Probleme zu behandeln und in allgemeinere Zusammenhänge einzuordnen, durch sie Anregungen für weitergehende Untersuchungen zu erhalten und nicht zuletzt daraus, sie auch in Anwendungen wiederzufinden.

Bei einer Diskussion des oben formulierten isoperimetrisch–isodiametrischen Problems stehen folgende Fragen im Mittelpunkt:

- *Existenz von Lösungen und charakteristische Merkmale des Problems*

Aus der Theorie der konvexen Körper stehen grundlegende Sätze zur Verfügung, um Stetigkeits- und Kompaktheitsaussagen zu treffen und damit die Existenz einer Lösung zu sichern. Konvexitätsuntersuchungen liefern zusätzliche Informationen zum einen über die Globalität lokaler Extrema, zum anderen über den Einsatz geeigneter Variationsmethoden.

- *Auswertung von notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen*

Geometrische Methoden beruhen auf geeigneten Verfahren der zielgerichteten Variation einer konvexen Figur unter Einhaltung der Forderungen an die fixierten Parameter. Ein analytischer Zugang führt unter Verwendung der Stützfunktion auf die Diskussion der Lösung eines entsprechenden Optimierungs- bzw. Optimalsteuerproblems. Hierbei stellen sich u.a. Fragen nach einer adäquaten Zerlegung

des Gesamtproblems in Teilprobleme und nach der Auswahl geeigneter Lösungsansätze.

- *Untersuchung von Struktureigenschaften der Lösung*

Geometrische Extremalprobleme für charakteristischer Parameter konvexer Figuren sind von Natur aus parametrische Optimierungsprobleme. Folglich sind Stabilitätsbereiche für die Lösungen interessant. Es können sprunghafte Änderungen der Lösungsstruktur auftreten. Ein solches Verhalten spiegelt sich dann auch in den entsprechenden Ungleichungen wider. Grundlegend ist die Frage, ob mit polyedrischen oder „runden“ Lösungen zu rechnen ist. Treten unendlich viele Strukturwechsel auf, so liefern asymptotische Untersuchungen Aussagen über das Lösungsverhalten.

- *Optimierung und numerische Auswertung der Resultate*

Ein analytischer Zugang eröffnet prinzipiell die Möglichkeit zur numerischen Berechnung von Strukturgrößen optimaler Figuren. Insbesondere möchte man im Falle einer Lösungsverzweigung die entsprechenden Verzweigungsparameter unter Ausnutzung von Eigenschaften der Optimalwertfunktion des parametrischen Problems bestimmen. Aus der Lösung des Extremalproblems resultieren die gesuchten Ungleichungen zwischen den beteiligten charakteristischen Parametern. Besonderheiten der Aufgabe spiegeln sich hier wider.

- *Verallgemeinerungen*

Die Behandlung des speziellen geometrischen Problems führt auf prinzipielle Aussagen zur Lösung entsprechend strukturierter Optimierungsprobleme.

Inhalt und Hauptergebnisse der Arbeit können nun folgendermaßen umrissen werden:

Das erste Kapitel enthält grundlegende Begriffe und Sätze über den *Raum der konvexen Figuren*, die für die weiteren Untersuchungen benötigt werden. Konvexe Figuren sind konvexe und kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^2 . Im \mathbb{R}^n bezeichnet man sie als konvexe Körper. Bedeutende Ansätze zur Theorie der konvexen Körper gehen insbesondere auf BRUNN [20, 21], MINKOWSKI [95, 96] und BLASCHKE [10] zurück. Die algebraische und metrische Struktur des Raumes \mathcal{K}^n der konvexen Körper und dessen Einbettung in einen Banachraum reeller Funktionen mit Hilfe der Stützfunktion ist von grundlegender Bedeutung für die Entwicklung einer heute sehr reichhaltigen Theorie, wie sie etwa in der Monografie von SCHNEIDER [113]

dargestellt ist. Charakteristische Parameter konvexer Körper beschreiben spezielle Funktionale auf diesem Raum. Von besonderem Interesse sind Stetigkeits- und Konvexitätseigenschaften dieser Parameter. In Abschnitt 1.3 werden für den ebenen Fall Extremalprobleme zu Flächeninhalt, Umfang, Durchmesser und Umkreisradius und entsprechende Ungleichungssysteme diskutiert und zusammengestellt.

Das zweite Kapitel behandelt eine *Verallgemeinerung des Favard'schen Problems*. Während FAVARD [28] nach flächenkleinsten isoperimetrischen Kreisinpolyedern fragte, wird hier der Umkreis durch einen Kreissektor ersetzt. Diese Aufgabe kann man zunächst als Optimalsteuerproblem mit Zustands- und Steuerrestriktionen, in welchem die Steuerungen verallgemeinerte Funktionen sind, formulieren. Bei der Lösungsdiskussion lässt sich die Wirksamkeit der von KLÖTZLER [70] gearbeiteten distributionellen Version des Pontrjagin'schen Maximumprinzips demonstrieren. Die Auswertung dieser notwendigen Bedingung an eine Lösung des Problems führt auf die Bestätigung, dass Optimalfunktionen polyedrische Struktur besitzen. Flächenminimale Sektorinpolyeder vorgegebenen Umfangs lassen sich nun als Lösung einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe, deren notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen explizit auswertbar sind, bestimmen. Eindeutige Optimalfunktionen des verallgemeinerten Favard'schen Problems sind sogenannte *fastreguläre Sektorinpolyeder*. Die zugehörige Optimalwertfunktion, welche die Abhängigkeit des minimalen Flächeninhalts vom Umfang beschreibt, bezeichnen wir als '*fonction penetrante*'.

Diese Funktion ist stetig abhängig vom Umfang, stückweise implizit definiert sowie auf jedem der abzählbar unendlich vielen Teilintervalle von $[3D, \pi D]$, auf denen die Seitenzahl der fastregulären Sektorinpolyeder konstant ist, jeweils streng konvex–konkav und stetig differenzierbar. Gegenstand von Kapitel 3 ist eine Untersuchung von Eigenschaften dieser Funktion, insbesondere ihrer Ableitungen bis zur vierten Ordnung, des asymptotischen Verhaltens ihres Sekantenanstieges, ihrer *Konvexitätsdefekte* und „grob“ *Konvexitätsmerkmale*. Letztere werden für eine allgemeine Klasse streng konvex–konkaver Funktionen analysiert. Eine glatte konvexe untere Einhüllende der '*fonction penetrante*' kann in impliziter Form angegeben werden.

Im vierten Kapitel werden *Aufteilungsprobleme* mit einem streng konvex–konkaven partiellen Bewertungskriterium und einer Kopplungsnebenbedingung betrachtet. Symmetrische Lösungen sind hier stets stationäre Lösungen. Von Interesse ist das Strukturverhalten des globalen Minimums in Abhängigkeit vom Kopplungsparameter. Da die Optimallösung hierarchisch zusammengesetzt ist, lässt

sich diese Abhängigkeit induktiv untersuchen. Zunächst beobachtet man beim Paaraufteilungsproblem eine sprunghafte Verzweigung zwischen stationärer symmetrischer und nichtsymmetrischer Randlösung. Diese Verzweigung wird durch die Nullstelle einer in Kapitel 3 eingeführten Midpoint–Konvexitätsdefektfunktion vermittelt. Auch im allgemeinen Fall erweisen sich neben der symmetrischen Lösung für kleine Parameterwerte unterschiedliche unsymmetrische Randlösungen für größere Parameterwerte als optimal. Die Verzweigungsparameter ergeben sich aus den Nullstellen geeigneter Konvexitätsdefektfunktionen.

Das fünfte und letzte Kapitel beinhaltet schließlich die Diskussion des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems. Da es sich bei dem entsprechenden Extremalproblem um eine konkave Flächenminimierungsaufgabe im Raum der konvexen Figuren handelt, sind optimale Figuren unter „möglichst“ unsymmetrischen Figuren zu suchen. Außerdem war zu vermuten, dass noch weitere charakteristische Parameter der Optimalfigur, etwa der Umkreisradius, extremal sein müssen. Diese Vermutung konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht bestätigt werden. Sie ergibt sich aber aus dem von HEMMI und KUBOTA in [53, 55] erbrachten Nachweis, dass der Rand einer Optimalfigur drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks desselben Durchmessers enthält. Dadurch kann man die Aufgabe mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 als Umfangsaufteilungsproblem für Tripel fastregulärer Sektorinpolyeder bei vorgegebenem Gesamtumfang formulieren. Als Bewertungskriterium tritt hier die stückweise streng konvex–konkave 'fonction penetrante' auf. Die Zielfunktion dieses nichtlinearen Extremalproblems ist damit nichtglatt.

Zunächst wird das globale Minimum des entsprechenden Paar-Aufteilungsproblems in Abhängigkeit vom Gesamtumfang bestimmt. Dazu zerlegt man die Aufgabe in geeignete Teilprobleme. Als ein wesentliches Merkmal der Lösung erweist sich dabei die Tatsache, dass die Seitenzahl der beiden optimalen fastregulären Sektorinpolyeder um höchstens Eins differiert. Folglich sind die Teilumfänge flächenminimaler Tripel fastregulärer Sektorinpolyeder nur auf einem durch den Gesamtumfang ausgezeichneten Teilintervall, auf welchem die 'fonction penetrante' streng konvex–konkav ist, zu suchen. Damit lassen sich die Aussagen über die allgemeinen Aufteilungsprobleme aus Kapitel 4 auf das hier betrachtete Umfangsaufteilungsproblem anwenden. Die Lösungsverzweigung zwischen symmetrischen und nichtsymmetrischen Strukturen kann so vollständig beschrieben werden. Außerdem zeigt es sich, dass die symmetrische Lösung für gewisse Parameterwerte als eine von der globalen Lösung verschiedene lokale Minimallösung auftritt, so dass lokale Variationsmethoden nicht ausreichend sein konnten.

Optimalfiguren des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems setzen sich aus Tripeln flächenminimaler fastregulärer Sektorinpolyeder zusammen. Wir bezeichnen sie als *Hemmi–Polyeder*. Diese Figuren sind spezielle Inpolyeder des Reuleaux–Dreiecks. Verzweigungsparameter der Lösungsstruktur ergeben sich aus Nullstellen von Konvexitätsdefektfunktionen der 'fonction penetrante'. Sie werden mit einem auf dem Newton–Verfahren basierenden Algorithmus berechnet. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass für kleinere Umfangswerte gewisse Verzweigungen, also einige Lösungsstrukturen, nicht auftreten. Dieser Effekt beruht auf dem asymptotischen Verhalten der 'fonction penetrante'.

Die isoperimetrisch–isodiametrischen Ungleichungen lassen sich aus der Lösung des geometrischen Extremalproblems herleiten und stückweise implizit für die jeweiligen Stabilitätsbereiche formulieren. Mit Hilfe der konvexen unteren Einhüllenden dieser Funktion lässt sich darüber hinaus eine einzige, dafür etwas schwächere, aber für reguläre Hemmi–Polyeder immer noch scharfe Ungleichung in impliziter Form angeben. Diese spiegelt das Verhalten des Flächeninhalts für größere Umfangswerte gut wider.

Insgesamt können die Ungleichungen von HEMMI aus [56, 57] bestätigt und hier nun auch quantitativ über die Berechnung der Verzweigungsparameter ausgewertet werden. Offen bleibt noch die Frage, ob und wie sich mit Methoden der Optimierung und Optimalen Steuerung die Maximalitätseigenschaft vom Umkreisradius der Optimalfiguren des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems nachweisen lässt.

Kapitel 1

Geometrische Extremalaufgaben

Der Raum der konvexen Körper besitzt bez. der Minkowski-Addition und der Vielfachbildung mit nichtnegativen reellen Zahlen Kegelstruktur. versehen mit der Hausdorff-Metrik ist er ein metrischer Raum. Geometrische Extremalaufgaben lassen sich in diesem Raum abstrakt beschreiben. Für die Existenz von Lösungen liefert der Auswahlssatz von Blaschke die grundlegenden Kompaktheitsargumente. Die Minkowski'sche Stützfunktion konvexer Körper vermittelt eine Einbettung des Raumes der konvexen Körper in einen Banachraum stetiger Funktionen. In diesem ist die Aufgabe als Problem der optimalen Steuerung formulierbar ist. Im folgenden Kapitel beschreiben wir entsprechende Grundbegriffe und Zusammenhänge und beziehen uns dabei insbesondere auf die Monografie von SCHNEIDER [113].

Im ebenen Fall untersuchen wir die Struktur einiger Extremalprobleme für Tripel von charakteristischen Parametern konvexer Figuren. Dazu diskutieren wir analytische Eigenschaften speziell von Durchmesser, Umfang, Umkreisradius und Flächeninhalt. Grundlegend sind hierbei der Satz von Brunn-Minkowski zur Konkavität des Flächenfunktional und der Satz von Blaschke-Lebesgue zur Minimaleigenschaft des Reuleaux-Dreiecks. Im Hinblick auf den Übergang zum Steuerproblem interpretieren wir die Stützfunktion als verallgemeinerte Funktion bzw. Distribution, da für die nichttrunden konvexen Bereiche der Krümmungsradius nur im distributionellen Sinne zu verstehen ist. Aus der Lösung solcher Extremalprobleme resultieren scharfe Ungleichungen, welche Relationen zwischen den betrachteten Parametern beschreiben. SANTALO [110] prägte in diesem Zusammenhang den Begriff des vollständigen Ungleichungssystems für charakteristische Parameter.

1.1 Raum der konvexen Figuren

Es sei \mathbb{X} eine Menge, in der eine Addition $+$ und eine Vielfachbildung \cdot mit nichtnegativen reellen Zahlen erklärt sind. Falls die Struktur $[\mathbb{X}, +]$ eine additive abelsche Halbgruppe mit Kürzungsregel ist, in der bezüglich der Vielfachbildung die Distributivgesetze sowie $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gelten, dann heißt \mathbb{X} *abstrakter konvexer Kegel*.

Sei nun \mathcal{K}^n die Menge der konvexen Körper des \mathbb{E}^n . Ein *konvexer Körper* $K \in \mathcal{K}^n$ ist eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{E}^n . Im \mathbb{E}^2 bezeichnen wir einen konvexen Körper als *konvexe Figur*.

Für konvexe Körper $K, M \in \mathcal{K}^n$ sind durch

$$K + M := \{x + y/x \in K, y \in M\}$$

die *Minkowski-Addition* sowie durch

$$\lambda K := \{\lambda \cdot x/x \in K\}$$

die *Vielfachbildung mit einer reellen Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ in \mathcal{K}^n erklärt. Außerdem sind

$$\begin{aligned} -K &:= (-1) \cdot K \\ K - M &:= K + (-M) \\ K + y &:= K + \{y\}. \end{aligned}$$

wieder konvexe Körper. In \mathcal{K}^n existiert bez. dieser Operation kein neutrales Element. Die Minkowski-Addition ist kommutativ und es gilt die Darstellung

$$K + M = \bigcup_{x \in K} (x + M).$$

Diese ‚kinematische‘ Interpretation der *Minkowski-Summe* deutet $K + M$ als Vereinigung aller Translationen der Menge M um Vektoren $x \in K$. Des Weiteren folgt aus $K + N = M + N$ für konvexe Mengen $K, M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ die Relation $K = M$. Es gilt also die Kürzungsregel in \mathcal{K}^n . Die Vielfachbildung genügt den Distributivgesetzen und erfüllt die Forderung $1 \cdot M = M$. Damit ist \mathcal{K}^n bezüglich der Minkowski-Addition und der Vielfachbildung mit nichtnegativen reellen Zahlen ein abstrakter konvexer Kegel. Er heißt *Raum der konvexen Körper*.

Mit Hilfe des Minkowski-Kalküls lassen sich Symmetrisierungsprozesse für konvexe Körper gut beschreiben. Solche Prozesse wurden zum Beweisen geometrischer Ungleichungen eingesetzt. Die Zentralsymmetrisierung

$$C(K) := \frac{1}{2}(K - K)$$

eines konvexen Körpers K und die Blaschke–Symmetrisierung

$$B_H(K) := \frac{1}{2}(K + s_H(K))$$

mit der Spiegelung $s_H(K)$ von K an der (den Nullpunkt enthaltenden) Hyperebene H liefern offensichtlich wieder konvexe Körper. STEINER [118, 119] führte z.B. die nach ihm benannte Symmetrisierung

$$S_H(K) := \bigcup_{G:G \perp H} \left(\frac{1}{2}(G \cap K) + \frac{1}{2}(G \cap s_H(K)) \right)$$

mit zu H senkrechten Geraden G ein, um die klassische isoperimetrische Ungleichung herzuleiten. Ausführlich wurden solche Symmetrisierungen etwa bei BONNESEN und FENCHEL [15] sowie von LEICHTWEISS [90] diskutiert.

Unter den Abbildungen, definiert auf \mathcal{K}^n , sind diejenigen von besonderem Interesse, welche mit der Struktur von \mathcal{K}^n verträglich sind. Eine Abbildung T aus \mathcal{K}^n in eine abelsche Gruppe heißt *Minkowski–additiv*, falls

$$T(K + M) = T(K) + T(M) \quad \text{für alle } K, M \in \mathcal{K}^n$$

gilt. Ist $\lambda \cdot T$ für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ erklärt, dann heißt diese Abbildung *Minkowski–linear*, falls sie Minkowski–additiv und positiv homogen ist. Ein Beispiel für eine solche Abbildung liefert die Stützfunktion.

Die Beschreibung einer konvexen Menge mittels ihrer Stützfunktion ist eines der grundlegenden Konzepte in der Theorie konvexer Mengen. Der Begriff der Stützfunktion wurde von MINKOWSKI [95, 96] für abgeschlossene und konvexe Mengen eingeführt. Wir betrachten sie für konvexe Körper. Die *Stützfunktion* $H_K : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von $K \in \mathcal{K}^n$ ist definiert durch

$$H_K(u) := \max_{x \in K} \langle x, u \rangle, \quad u \in \mathbb{E}^n. \quad (1.1)$$

Sie ist als Maximalwertfunktion einer konvexen Optimierungsaufgabe mit linearer Zielfunktion sublinear und für konvexe Körper stets endlich. Umgekehrt gibt es zu jeder (endlichen) sublinearen Funktion $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ genau einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit f als Stützfunktion (vgl. etwa [113]). Damit ist jeder konvexe Körper durch seine Stützfunktion eindeutig charakterisiert. Für $u \neq 0$ heißen die Mengen

$$\mathcal{H}_K(u) := \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle = H_K(u)\}$$

$$\mathcal{H}_K^+(u) := \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle \geq H_K(u)\}$$

$$\mathcal{H}_K^-(u) := \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle \leq H_K(u)\}$$

$$\mathcal{F}_K(u) := \mathcal{H}_K(u) \cap K$$

Stützhyperebene, *positiver* und *negativer Stützhalbraum* bzw. *Stützmenge* von K bez. des äußeren Normalenvektors u . Es gilt stets $K \subseteq \mathcal{H}_K^-(u)$ für alle u .

Die Stützfunktion H_K ist genau dann in $u \neq 0$ differenzierbar, wenn $\mathcal{F}_K(u)$ einelementig ist. In diesem Fall gilt

$$\nabla H_K(u) = x_u$$

mit $\mathcal{F}_K(u) = \{x_u\}$. In jeden Randpunkt von $K \in \mathcal{K}^n$ gibt es wenigstens eine Stützhyperebene, und zu jedem Richtungsvektor $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ existiert genau eine Stützhyperebene. Jeder konvexe Körper ist gleich dem Durchschnitt seiner ihn umfassenden Stützhalbräume \mathcal{H}_K^- . Die *Stützhyperebene* $\mathcal{H}_K(u)$ heißt *regulär*, falls $\mathcal{F}_K(u)$ einelementig ist. Sonst heißt sie *singulär*. Ist K ein Polytop, also konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge, dann heißt $\mathcal{F}_K(u)$ *Seite* bzw. *Facette* von K . Ein Polytop ist durch seine endlich vielen Seiten charakterisiert. Jeder konvexe Körper, dessen Stützhyperebenen alle regulär sind, heißt *streng konvexer Körper*. KLÖTZLER [3] bezeichnete diese Körper auch als *rund*. Insbesondere enthält der Rand einer streng konvexen Figur keine Streckenstücke. Dual hierzu heißt ein *Randpunkt* x des konvexen Körpers K *regulär* oder auch *glatt*, falls in x eine eindeutige Stützhyperebene existiert. Sonst heißt der Randpunkt *singulär*. Ein konvexer Körper mit ausschließlich regulären Randpunkten heißt *regulärer* oder auch *glatter konvexer Körper*.

Die Abbildung $H_{(\cdot)} : \mathcal{K}^n \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$, die jedem konvexen Körper seine Stützfunktion zuordnet, ist Minkowski-linear. Aus der Minkowski-Additivität von $H_{(\cdot)}$ gemäß

$$H_{K+M}(u) = H_K(u) + H_M(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

mit $K, M \in \mathcal{K}^n$ folgt insbesondere die Kürzungsregel in \mathcal{K}^n . Außerdem ist $H_K \leq H_M$ in $C(\mathbb{R}^n)$ genau dann erfüllt, wenn $K \subseteq M$ in \mathcal{K}^n gilt.

Wegen der positiven Homogenität ist die Stützfunktion H_K aus (1.1) eindeutig durch ihre Werte auf der Oberfläche S^{n-1} der Einheitskugel B_1^n des \mathbb{E}^n bestimmt. Bezeichnet man durch

$$\bar{H}_K(u) := H_K(u) \quad \text{für } u \in S^{n-1} \tag{1.2}$$

die Stützfunktion des konvexen Körpers K auf S^{n-1} , so beschreibt die Zuordnung $K \rightarrow \bar{H}_K$ eine isomorphe Abbildung $\bar{H}_{(\cdot)}$ des abstrakten konvexen Kegels \mathcal{K}^n in den Vektorraum $C(S^{n-1})$ der auf S^{n-1} stetigen Funktionen.

Wir betrachten nun im Weiteren ebene konvexe Figuren und bezeichnen diese mit B . Für die Stützfunktion \bar{H}_B von $B \in \mathcal{K}^2$ ergibt sich dann auf der Einheitskreislinie S^1 die Polarkoordinaten-Darstellung

$$h_B(\varphi) := \bar{H}_B(u(\varphi)) = \text{Max}_{x \in B}(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) \quad (1.3)$$

zur Richtung $u(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$. Die ebenfalls als *Stützfunktion* bezeichnete Funktion $h_B : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt den signierten Abstand der zu $u(\varphi)$ orthogonalen Stützgeraden vom Ursprung O . Sie ist 2π -periodisch stetig fortsetzbar auf \mathbb{R} . Bei einer Translation $B + x$ ändert sich die Stützfunktion gemäß $h_{B+x}(\varphi) = h_B(\varphi) + h_{\{x\}}(\varphi)$. Die erste Ableitung $\dot{h}_B(\varphi)$ existiert genau dann, wenn die Stützmenge $\mathcal{F}_B(u(\varphi))$ zur Richtung $u(\varphi)$ einelementig ist. Geometrisch beschreibt \dot{h}_B den signierten Abstand des Berührungspunktes $x(\varphi) \in \partial B$ zwischen Stützgerade und B vom Strahl zur Richtung $u(\varphi)$. Es gilt also

$$\dot{h}_B(\varphi) = -x_1(\varphi) \sin \varphi + x_2(\varphi) \cos \varphi$$

und

$$\|x(\varphi)\|^2 = h_B(\varphi)^2 + \dot{h}_B(\varphi)^2 \quad (1.4)$$

mit $x(\varphi) = \begin{pmatrix} x_1(\varphi) \\ x_2(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\mathcal{F}_B(u(\varphi)) = \{x(\varphi)\}$. Ist die Stützmenge $\mathcal{F}_B(u(\varphi))$ nicht einelementig, so gibt es zwei verschiedene Extrempunkte $x^1(\varphi), x^2(\varphi) \in \mathbb{E}^2$ von B mit $\mathcal{F}_B(u(\varphi)) = \text{conv}\{x^1(\varphi), x^2(\varphi)\}$. Es existieren stets die einseitigen Richtungsableitungen $\dot{h}_B(\varphi + 0), \dot{h}_B(\varphi - 0)$, und es gilt

$$|\dot{h}_B(\varphi + 0) - \dot{h}_B(\varphi - 0)| = \|x^1(\varphi) - x^2(\varphi)\|.$$

Die Stützfunktion h_B einer konvexen Figur $B \subseteq \mathbb{E}^2$ gehört zum Sobolev-Raum $W_\infty^1[0, 2\pi]$ aller auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktionen mit verallgemeinerten Ableitungen erster Ordnung, die wesentlich beschränkt sind (vgl. Anhang A.1). Die zweite Ableitung \ddot{h}_B ist i.A. eine verallgemeinerte Funktion der Gestalt

$$\ddot{h} = \sum_i \|x^1(\gamma_i) - x^2(\gamma_i)\| \cdot \delta_{\gamma_i} + g.$$

Hierbei bezeichnet δ_{γ_i} die δ -Distribution, die auf der Normalenrichtung γ_i der Stützmenge $\mathcal{F}_B(u(\gamma_i)) = \text{conv}\{x^1(\gamma_i), x^2(\gamma_i)\}$ konzentriert ist, und g eine reguläre Distribution. Für eine streng konvexe Figur B existiert f.ü. die summierbare

zweite Ableitung \ddot{h}_B , d.h. es gilt $h_B \in W_1^2[0, 2\pi]$. Die Konvexität von B wird dann durch die Ungleichung

$$\varrho_B(\varphi) := h_B(\varphi) + \ddot{h}_B(\varphi) \geq 0 \quad \text{f.ü. auf } [0, 2\pi] \quad (1.5)$$

mit dem Krümmungsradius ϱ_B von B beschrieben. Umgekehrt ist jede Funktion $f \in W_1^2[0, 2\pi]$, für die $f + \ddot{f} \geq 0$ f.ü. auf $[0, 2\pi]$ gilt, Stützfunktion einer streng konvexen Figur. Dies folgt aus der eindeutigen Beschreibung der konvexen Figur B durch eine sublineare Funktion H_B und der Auswertung der positiven Semidefinitheit der Hessematrix dieser Funktion (vgl. auch [26], [90], [113]). Im Kapitel 2 treten einige spezielle Stützfunktionen auf:

(1) $h_B(\varphi) = 1$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$

ist Stützfunktion des Einheitskreises $B = B_1^2$.

(2) $h_B(\varphi) = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$

ist Stützfunktion des Punktes $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}$.

(3) $h_B(\varphi) = \begin{cases} x_1^1 \cos \varphi + x_2^1 \sin \varphi & \text{für } \varphi \in [0, \varphi_0) \cup [\varphi_0 + \pi, 2\pi] \\ x_1^2 \cos \varphi + x_2^2 \sin \varphi & \text{für } \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \pi) \end{cases}$

ist Stützfunktion der Strecke $B = [x^1, x^2]$ mit Normalenrichtung $u(\varphi_0)$.

(4) $h_B(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi \in [0, \pi) \\ -\cos \varphi & \text{für } \varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \\ \cos \varphi & \text{für } \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$

ist Stützfunktion des Halbkreises $B = B_+^2$.

Ist die konvexe Figur B nicht streng konvex, dann können \ddot{h}_B und ϱ_B nur im Sinne verallgemeinerter Funktionen (Distributionen) erklärt werden. Eine *Distribution* χ ist dabei ein lineares stetiges Funktional über einem Grundraum \mathbb{K} . Wir wählen als Grundraum den Sobolev-Raum $\dot{W}_p^m[0, 2\pi]$. Den Raum der Distributionen über \mathbb{K} bezeichnen wir mit $D(\mathbb{K})$. Grundlegende Begriffe und Rechenregeln hierzu sind im Anhang A.1 zusammengestellt.

Der Begriff der Konvergenz konvexer Körper, wie er von BLASCHKE [10] benutzt wurde, führt auf die *Hausdorff-Metrik* δ in \mathcal{K}^n . Sie ist definiert durch

$$\delta(K, M) := \text{Max} \{ \text{Max}_{x \in K} \text{Min}_{y \in M} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}, \text{Max}_{x \in M} \text{Min}_{y \in K} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \}$$

für $K, M \in \mathcal{K}^n$. Gleichbedeutend damit ist die Darstellung

$$\delta(K, M) = \text{Min}\{\lambda \geq 0 / K \subseteq M + \lambda \cdot B_1^n, M \subseteq K + \lambda \cdot B_1^n\}. \quad (1.6)$$

Der metrische Raum (\mathcal{K}^n, δ) ist vollständig. Insbesondere ist er lokalkompakt. Dies ist eine Konsequenz des folgenden grundlegenden Satzes [10].

Theorem 1.1 (Auswahlsatz von Blaschke) *Aus jeder unendlichen Menge gleichmäßig beschränkter konvexer Körper lässt sich eine Folge konvexer Körper auswählen, die gegen einen konvexen Körper konvergiert.*

Beschränkte und abgeschlossene Teilmengen des Raumes \mathcal{K}^n sind damit kompakt. Durch die Hausdorff-Metrik wird auf \mathcal{K}^n eine Topologie induziert. Die Konvergenz konvexer Körper spiegelt sich wegen

$$\delta(K, M) = \sup_{u \in S^{n-1}} |H_K(u) - H_M(u)| = \|\bar{H}_K - \bar{H}_M\|_{C(S^{n-1})} \quad (1.7)$$

in den Stützfunktionen wider. Die Abbildung $\bar{H}_{(\cdot)} : \mathcal{K}^n \rightarrow C(S^{n-1})$ gemäß $K \rightarrow \bar{H}_K$ bewirkt also eine isomorphe und isometrische Einbettung des Raumes \mathcal{K}^n der konvexen Körper in den Banachraum $C(S^{n-1})$ der auf S^{n-1} stetigen Funktionen. Folglich ist die Konvergenz konvexer Körper äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz der durch (1.2) auf S^{n-1} definierten Stützfunktionen \bar{H}_K . Die gleichmäßige Konvergenz von Stützfunktionen folgt bereits aus deren punktweiser Konvergenz. Dies ist insbesondere eine Konsequenz der lokalen Lipschitzstetigkeit der Stützfunktion gemäß

$$|H_K(u) - H_M(v)| \leq r \|u - v\|_{\mathbb{R}^n} + \text{Max}\{\|u\|_{\mathbb{R}^n}, \|v\|_{\mathbb{R}^n}\} \cdot \delta(K, M) \quad (1.8)$$

für alle $K, M \in \mathcal{K}^n$ mit $K, M \subseteq B_r^n$ und für alle $u, v \in \mathbb{E}^n$. Dabei bezeichnet $B_r^n \subseteq \mathbb{E}^n$ eine Kugel um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$. Aus (1.8) folgt mit dem Satz von Arzela–Ascoli die Kompaktheit der Mengen

$$\{\bar{H}_K / K \in \mathcal{K}^n, K \subseteq B_r^n\},$$

also Blaschkes Auswahlsatz.

Konvexe Körper können durch solche mit speziellen Eigenschaften approximiert werden (vgl. etwa [113]).

Theorem 1.2 (Approximationssatz) *Polytope, streng konvexe Körper und glatte konvexe Körper liegen dicht in \mathcal{K}^n .*

Durch die Einbettung (1.2) übertragen sich Approximationseigenschaften auf die Stützfunktion. Sie bieten die Möglichkeit, die Gültigkeit einer geometrischen Ungleichung zunächst für spezielle Klassen konvexer Körper zu nachzuweisen.

1.2 Charakteristische Parameter

Zu grundlegenden charakteristischen Parametern einer konvexen Figur $B \in \mathcal{K}^2$ gehören Durchmesser, Dicke, Flächeninhalt, Umfang sowie Um- und Inkreisradius. Eine Reihe ihrer Eigenschaften wurden von JAGLOM und BOLTYANSKII in [60] zusammengestellt. Diese Größen definieren Funktionale auf \mathcal{K}^2 . Sie lassen sich mit Hilfe der in Polarkoordinaten gegebenen Stützfunktion h_B aus (1.3) beschreiben (vgl. etwa [15]).

Die *Breite* von B in Richtung φ wird durch die Funktion

$$w_B(\varphi) := h_B(\varphi) + h_B(\varphi + \pi), \quad (1.9)$$

die für jedes $\varphi \in [0, \pi]$ den Abstand zweier zur Normalenrichtung $u(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ gehörenden parallelen Stützhyperebenen von B angibt, beschrieben. Sie ist selbst Stützfunktion eines zentralsymmetrischen Bereichs, und zwar des zu B gehörigen *Breitenbereichs* (vgl. [54] und [101]).

Durchmesser bzw. *Dicke* von B sind durch

$$\mathcal{D}(B) := \max_{\varphi \in [0, \pi]} w_B(\varphi) = w_B(\bar{\varphi}_B) \quad (1.10)$$

$$\Delta(B) := \min_{\varphi \in [0, \pi]} w_B(\varphi) = w_B(\underline{\varphi}_B) \quad (1.11)$$

als größte bzw. kleinste Breite von B definiert. Außerdem ist der Durchmesser gleich der Länge der größten Sehne dieser Figur. Eine Maximalstelle $\bar{\varphi}_B$ aus (1.10) beschreibt eine *Durchmesserrichtung* und eine Minimalstelle $\underline{\varphi}_B$ aus (1.11) eine *Dickerichtung* von B . Wir bezeichnen mit

$$\Phi_{\mathcal{D}}(B) := \{\varphi \in [0, 2\pi) / \mathcal{D}(B) = w_B(\varphi)\} \quad (1.12)$$

$$\Phi_{\Delta}(B) := \{\varphi \in [0, 2\pi) / \Delta(B) = w_B(\varphi)\}. \quad (1.13)$$

die Menge der Durchmesser- bzw. Dickerichtungen einer konvexen Figur B .

Flächeninhalt bzw. *Umfang* von B lassen sich mittels Stützfunktion beschreiben durch

$$\mathcal{F}(B) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_B(\varphi)^2 - \dot{h}_B(\varphi)^2) d\varphi \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}(B) := \int_0^{2\pi} h_B(\varphi) d\varphi. \quad (1.15)$$

Der kleinste die Figur B umfassende Kreis U_B heißt *Umkreis*, der größte in B enthaltene Kreis I_B heißt *Inkreis* von B . Dementsprechend sind *Umkreisradius* bzw. *Inkreisradius* von B durch

$$\mathcal{R}(B) : = \min_{x \in B} \min_{y \in B} \{ \|x - y\| / B_{\|x-y\|}^2(x) \supseteq B \} \quad (1.16)$$

$$r(B) : = \max_{x \in B} \max_{y \in B} \{ \|x - y\| / B_{\|x-y\|}^2(x) \subseteq B \} \quad (1.17)$$

erklärt. Hierbei bezeichnet $B_{\|x-y\|}^2(x) \subset \mathbb{E}^2$ einen Kreis mit Radius $\|x - y\|$ um den Punkt x . Der Umkreis ist stets eindeutig bestimmt, der Inkreis dagegen nicht. Beide Kreise enthalten entweder zwei diametral entgegengesetzte Randpunkte der konvexen Figur oder es bilden drei ihrer Randpunkte ein spitzwinkliges Dreieck (vgl. [60]). Um- bzw. Inkreisradius sind wegen der Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B) &= \min_{x \in \mathbb{E}^2} \sup_{y \in B} \|x - y\| \\ r(B) &= \max_{(x, \rho) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}} \{ \rho / u(\varphi)^T x + \rho \leq h_B(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi) \} \end{aligned}$$

jeweils als Lösung einer konvexen Optimierungsaufgabe berechenbar (vgl. [43], [62], [63] und [90]).

Eigenschaften der Stützfunktion übertragen sich unmittelbar auf die Funktionale \mathcal{D} , Δ und \mathcal{L} . So sind Durchmesser, Dicke und Umfang positiv homogene und wegen (1.8) auch stetige Funktionale auf \mathcal{K}^2 . Aus der Minkowski–Linearität der Abbildung $h_{(\cdot)} : \mathcal{K}^2 \rightarrow C[0, 2\pi]$ folgt insbesondere die Minkowski–Linearität von \mathcal{L} , die Sublinearität von \mathcal{D} und die Superlinearität von Δ auf \mathcal{K}^2 .

Für viele geometrische Betrachtungen ist es sinnvoll, sich auf gewisse Repräsentanten kongruenter konvexer Figuren zu beschränken. Fixiert man z.B. eine Durchmesser- bzw. Dickerichtung von B , so erhält man mit (1.12) und (1.13) die Teilmengen

$$\mathcal{K}_{\mathcal{D}}^2 = \{ B \in \mathcal{K}^2 / \varphi = 0 \text{ für ein } \varphi \in \Phi_{\mathcal{D}}(B) \} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{K}_{\Delta}^2 = \{ B \in \mathcal{K}^2 / \varphi = 0 \text{ für ein } \varphi \in \Phi_{\Delta}(B) \} \quad (1.19)$$

von \mathcal{K}^2 . Diese sind wieder konvexe Kegel und vollständige metrische Räume. Durch diese Einschränkung erreicht man, dass das Funktional \mathcal{D} auf $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}^2$ und das Funktional Δ auf \mathcal{K}_{Δ}^2 sogar Minkowski–linear ist.

Das Flächenfunktional \mathcal{F} ist auf \mathcal{K}^2 stetig (vgl. etwa [113]). Die Wirkung der Struktur von \mathcal{K}^2 auf \mathcal{F} ergibt sich aus der folgenden grundlegenden Aussage über das Volumenfunktional.

Theorem 1.3 (Satz von Brunn-Minkowski) Die n -te Wurzel aus dem Volumen eines konvexen Körpers ist ein konkaves Funktional auf \mathcal{K}^n .

Folglich ist $\sqrt[n]{\mathcal{V}}$ ein konkaves Funktional auf \mathcal{K}^2 . BRUNN [20, 21] hat diese Aussage für $n \leq 3$ formuliert und bewiesen, MINKOWSKI [97] führte erstmalig den Beweis für den allgemeinen n -dimensionalen Fall. Dieser Satz war Ausgangspunkt für eine reichhaltige Theorie der geometrischen Ungleichungen und entsprechender Anwendungen (vgl. [15], [113]).

Für Um- und Inkreisradius gelten folgende Aussagen.

Lemma 1.1 Die Funktionale \mathcal{R} und r sind stetig. Insbesondere ist \mathcal{R} sub- und r superlinear auf \mathcal{K}^2 .

Beweis:

Für beliebige konvexe Figuren $B, B_1, B_2 \in \mathcal{K}^2$ seien U, U_1, U_2 die zugehörigen Umkreise mit den Umkreisradien $\mathcal{R}(B), \mathcal{R}(B_1), \mathcal{R}(B_2)$ und I, I_1, I_2 zugehörige Inkreise mit den Inkreisradien r, r_1, r_2 . Aus der Definition von Um- und Inkreis folgt unmittelbar $\lambda I \subseteq \lambda B \subseteq \lambda U$ für alle $\lambda \geq 0$, also die positive Homogenität von \mathcal{R} und r . Außerdem gilt $I_1 + I_2 \subseteq B_1 + B_2 \subseteq U_1 + U_2$, wobei $U_1 + U_2$ ein Kreis mit Radius $\mathcal{R}(B_1) + \mathcal{R}(B_2)$ und $I_1 + I_2$ ein Kreis mit Radius $r(B_1) + r(B_2)$ ist. Hieraus folgt mit

$$r(B_1) + r(B_2) \leq r(B_1 + B_2) \leq \mathcal{R}(B_1 + B_2) \leq \mathcal{R}(B_1) + \mathcal{R}(B_2)$$

die Subadditivität von \mathcal{R} und die Superadditivität von r auf \mathcal{K}^2 .

Um die Stetigkeit von \mathcal{R} und r zu zeigen, betrachten wir eine beliebige konvexe Figur $B_0 \in \mathcal{K}^2$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Für jedes $B \in \mathcal{K}^2$ mit $\delta(B_0, B) < \varepsilon$ gelten dann wegen (1.6) die Relationen

$$B \subseteq B_0 + \varepsilon \cdot B_1^2, \quad B_0 \subseteq B + \varepsilon \cdot B_1^2 \quad (1.20)$$

mit der Einheitskugel B_1^2 des \mathbb{E}^2 . Aus der Definition von Um- bzw. Inkreisradius ergibt sich $\mathcal{R}(B + \varepsilon \cdot B_1^2) = \mathcal{R}(B) + \varepsilon$ bzw. $r(B + \varepsilon \cdot B_1^2) = r(B) + \varepsilon$. Zusammen mit (1.20) folgt hieraus die Stetigkeit von \mathcal{R} und r . ■

Für konvexe Körper $K \in \mathcal{K}^n$ lassen sich Funktionale \mathcal{D} und Δ mit Hilfe der Stützfunktion \bar{H}_K analog zu (1.10) und (1.11) definieren. Ein konvexer Körper K mit $\mathcal{D}(K) = D = \Delta(K)$ heißt *Körper konstanter Breite* oder auch *Gleichdick*.

Die Stützfunktion des zugehörigen Differenzkörpers $K - K$ ist dann konstant. Gleichdicke lassen sich wie die Kugel allseitig tangierend zwischen parallelen

Hyperebenen drehen. Einen Überblick über diese interessante Klasse konvexer Körper geben CHAKERIAN und GROEMER in [23] sowie HEIL und MARTINI in [52]. EULER [27] bezeichnete ebene Gleichdicke $B \in \mathcal{K}^2$ als *Orbiformen*. Sie sind charakterisiert durch

$$w_B(\varphi) \equiv D \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Spezielle Gleichdicke sind die von REULEAUX in [107] eingeführten *Reuleaux-Polygone*. Ein Reuleaux-Polygon ist Durchschnitt endlich vieler Kreise gleichen Durchmessers (vgl. [26]). Die Anzahl n dieser Kreise ist notwendigerweise ungerade. Für $n \geq 3$ sind die Mittelpunkte dieser Kreise genau die Ecken (singuläre Randpunkte) des n -seitigen Reuleaux-Polygons, auch Reuleaux- n -gon genannt. Ein spezielles Reuleaux-Polygon ist das Kreisbogendreieck, genannt *Reuleaux-Dreieck* (siehe Abb. 1.1). Man findet das Reuleaux-Dreieck z. B. im Wankelmotor, das reguläre Reuleaux-Siebeneck in der englischen Fifty-Pence Münze wieder. Reuleaux-Polygone vom Durchmesser D liegen (bez. der Hausdorff-Metrik) dicht in der Menge aller Orbiformen desselben Durchmessers (siehe [11], [26] und [60]). Von KUPITZ, MARTINI und WEGNER wurde in [86] ein Algorithmus zur Konstruktion von Reuleaux-Polygonen angegeben.

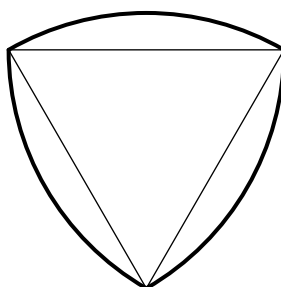


Abbildung 1.1: Reuleaux-Dreieck

Ein naheliegendes Extremalproblem ergibt sich aus der Frage nach flächenextremalen Orbiformen vorgegebenen Umfangs. Da nach dem Satz von BARBIER [5] (siehe auch [60]) alle Orbiformen vom Durchmesser D den Umfang $L = \pi D$ besitzen, führt diese Fragestellung auf die Aufgabe

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{F}(B)} &\rightarrow \text{Extr!} \\ \mathcal{L}(B) &= L \\ \mathcal{D}(B) &= L/\pi \end{aligned}$$

mit konkaver Zielfunktion und Minkowski–linearen Restriktionen. Die scharfe obere Schranke für den Flächeninhalt ergibt sich aus der isoperimetrischen Maximaleigenschaft des Kreises. Ein recht eleganter Beweis hierfür findet sich bei LITTLEWOOD [91] (siehe auch [64]). Der folgende Satz liefert eine entsprechende scharfe untere Schranke.

Theorem 1.4 (Satz von Blaschke–Lebesgue) *Unter allen Orbiformen besitzt das Reuleaux–Dreieck den kleinsten Flächeninhalt.*

Diese Aussage führt auf die Ungleichung

$$F \geq (\pi - \sqrt{3}) \frac{L^2}{2\pi^2} \quad (1.21)$$

mit $F = \mathcal{F}(B)$. Unabhängig voneinander wiesen BLASCHKE und LEBESGUE erstmalig diese Minimaleigenschaft des Reuleaux–Dreiecks nach. Ihre Beweise basieren auf folgenden grundlegenden Ideen. BLASCHKE [11] zeigte zunächst mit Hilfe einer Variante des Steiner’schen Vielgelenkverfahrens [118], dass das Reuleaux–Dreieck die flächenkleinste Figur unter den Reuleaux–Polygonen ist. Mit dem Nachweis, dass sich jede Orbiform beliebig genau durch Reuleaux–Polygone approximieren lässt, bewies er schließlich die Behauptung. LEBESGUE [89] ging von einem der Orbiform umbeschriebenem regulären Sechseck aus. Aus diesem erzeugte er mittels paralleler Stützgeraden eine Folge von Polyedern, welche die Orbiform von außen approximieren. Deren Flächeninhalt schätzte er scharf ab. Nach entsprechendem Grenzübergang erhielt er die gesuchten Schranken für den Flächeninhalt.

Einen ersten analytischen Beweis zu Theorem 1.4 führte FUJIWARA [40]. Mittels Stützfunktion formulierte er ein Optimierungsproblem im Funktionenraum und gab für dessen Zielfunktional eine scharfe untere Schranke an. GHANDEHARI [42] diskutierte die Aufgabe mit Methoden der Optimalen Steuerung. In einer umfassenderen Klasse konvexer Figuren – den n –Orbiformen – bestimmte KLÖTZLER [66] diejenigen kleinsten Flächeninhalts. Eine n –Orbiform ist dabei eine konvexe Figur, die sich allseitig tangierend in einem regulären n –Eck drehen lässt. Ebene Gleichdicke sind also 4–Orbiformen. Bei seinen Untersuchungen stützte sich KLÖTZLER auf die Ergebnisse von FOCKE [34]. Dieser untersuchte, ausgehend von einer technischen Anwendung im Maschinenbau beim spitzenlosen Außenrundscheifen [33], symmetrische n –Orbiformen kleinsten Flächeninhalts. Solche Orbiformen besitzen eine gewisse Rotationssymmetrie und stückweise konstanten Krümmungsradius. KLÖTZLER wies mit Methoden der Optimalen Steuerung

deren Minimaleigenschaft in der Klasse aller n -Orbiformen nach. Als Spezialfall ergab sich daraus mit $n = 4$ der Satz von Blaschke–Lebesgue. Bezüglich weiterer Beweise für diesen Satz sei hier auf [23] verwiesen.

Auch höherdimensionale Gleichdicken sind von mathematischem Interesse. Sie entstehen z.B. durch Rotation eines regulären Reuleaux-Polygons um eine seiner Symmetrieachsen. Es gibt allerdings auch nicht rotationssymmetrische Körper konstanter Breite, etwa die Meissner'schen Körper (siehe z.B. [14]). Unter den n -dimensionalen Gleichdicken besitzt die Kugel maximales Volumen. Bereits unter den 3-dimensionalen Gleichdicken, den sogenannten *Späroformen* (vgl. [15]), sind solche minimalen Volumens bis heute unbekannt. Hier gibt es schon zum Satz von Barbier kein natürliches Analogon (vgl. etwa [13]).

Abschließend wollen wir noch auf Verallgemeinerungen dieses Problems im ebenen Fall hinweisen. HEMMI und KUBOTA [53], SHOLANDER [115] sowie OHMANN [101] wiesen die Minimaleigenschaft sogenannter *allgemeiner Reuleaux-Dreiecke* (siehe auch Kapitel 5) nach. Der Beweis orientiert sich an den oben beschriebenen Lebesgue'schen Ideen. FIREY [30] und SALLEE [109] untersuchten den Flächeninhalt von Reuleaux-Polygonen. Sie zeigten, dass das reguläre Reuleaux- n -gon maximalen Flächeninhalt unter allen n -seitigen Reuleaux-Polygonen besitzt. Dabei heißt ein Reuleaux-Polygon *regulär*, falls alle seine Randkreisbögen gleich lang sind. Das Infimum des Flächeninhaltes aller Reuleaux- n -gone ist durch den Flächeninhalt des Reuleaux-Dreiecks gegeben.

1.3 Ungleichungen und Blaschke-Diagramme

Ein Ungleichungssystem, welches alle (nichtredundanten) Relationen zwischen jeweils k , $k \geq 2$, charakteristischen Parametern einer konvexen Figur enthält, bezeichnete SANTALO [110] als *vollständiges Ungleichungssystem*. Jede Lösung eines solchen Ungleichungssystems beschreibt dann Parameter einer konvexen Figur. Die einfachsten Ungleichungen sind diejenigen zwischen zwei charakteristischen Parametern. Uns interessieren hier vor allem die paarweisen Beziehungen zwischen D , L , F und R , also die Ungleichungen:

$$\begin{array}{llll}
 (2.I) & 4\pi F \leq L^2 & (\text{Kreis}) & (2.VI) & L \leq 2\pi R & (\text{Kreis}) \\
 (2.II) & 4F \leq \pi D^2 & (\text{Kreis}) & (2.VII) & D \leq 2R & (\text{Strecke}) \\
 (2.III) & F \leq \pi R^2 & (\text{Kreis}) & (2.VIII) & \sqrt{3}R \leq D & (\text{Dreieck}) \\
 (2.IV) & L \leq \pi D & (\text{Gleichdick}) & (2.IX) & 4R \leq L & (\text{Strecke}) \\
 (2.V) & 2D \leq L & (\text{Strecke}) & & &
 \end{array}$$

In Klammern steht jeweils ein Repräsentant jener konvexen Figuren, für welche die entsprechende Ungleichung scharf ist. Die Ungleichung (2.VIII) ist neben dem gleichseitigen Dreieck auch scharf für alle solchen konvexen Figuren, die dieses Dreieck umfassen und im Reuleaux–Dreieck der Breite D enthalten sind.

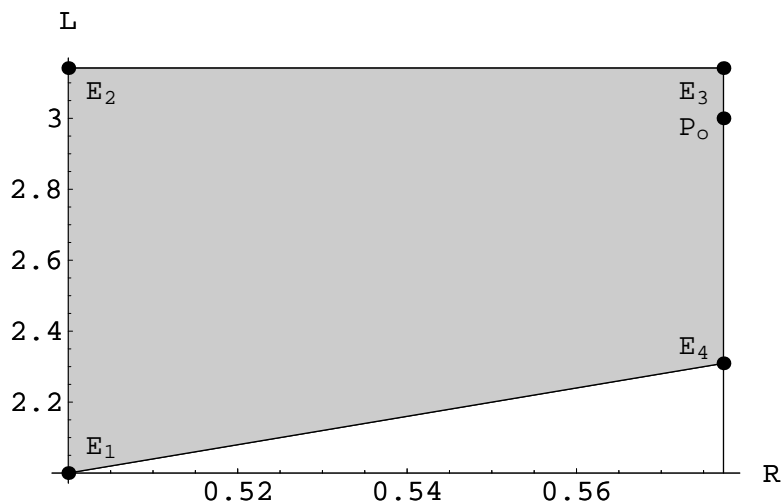


Abbildung 1.2: Ungleichungen für Paare aus $\{D, R, L\}$

Wir betrachten nun Tripel aus der Parametermenge $\{F, D, L, R\}$. Die Ungleichungen (2.IV), (2.VII), (2.VIII) und (2.IX) beschreiben einen konvexen polyedrischen Kegel für Tripel $(D, R, L) \in \mathbb{R}^3$, die Ungleichungen (2.V) und (2.VI) sind redundant. In der Abb. 1.2 ist der Schnitt dieses Kegels mit der Hyperebene $\{(D, R, L) \in \mathbb{R}^3 / D = 1\}$ dargestellt. Dabei ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen Randpunkten dieses Kegels und konvexen Figuren mit Durchmesser $D = 1$:

- $E_1 = (1, \frac{1}{2}, 2)$ repräsentiert eine Strecke
- $E_2 = (1, \frac{1}{2}, \pi)$ repräsentiert einen Kreis
- $E_3 = (1, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \pi)$ repräsentiert ein Reuleaux–Dreieck
- $P_0 = (1, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 3)$ repräsentiert ein gleichseitiges Dreieck .

Des Weiteren gilt für die Verbindungsstrecken dieser Punkte:

- $\overline{E_1 E_2}$ repräsentiert Linsen

- $\overline{E_2E_3}$ repräsentiert Gleichdicke
- $\overline{E_3P_0}$ repräsentiert konvexe Figuren mit $D = \sqrt{3}R$.

Jedoch zu $E_4 = (1, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ und zu Punkten der offenen Strecken $\overline{P_0E_4}$, $\overline{E_1E_4}$ existieren wegen (2.VIII) keine passenden konvexen Figuren. Deshalb beschreibt der betrachtete Kegel keine Lösungsmenge eines vollständiges Ungleichungssystem. Es fehlt eine Relation zwischen allen drei Größen D , R und L . Um die entsprechende Ungleichung zu finden, diskutieren wir die Extremalaufgabe

$$(\underline{P}_{L,\{D,R\}}) : \quad \mathcal{L}(B) \rightarrow \text{Min!} \\ B \in \mathcal{K}^2(R, D)$$

mit Parametern R und D aus $\sqrt{3}R \leq D \leq 2R$. Das Zielfunktional \mathcal{L} ist linear und stetig, der zulässige Bereich

$$\mathcal{K}^2(R, D) = \{B \in \mathcal{K}^2 / \mathcal{R}(B) = R, \mathcal{D}(B) = D\} \quad (1.22)$$

eine kompakte Teilmenge von \mathcal{K}^2 . Damit existieren Lösungen dieses Problems.

Lemma 1.2 *In der Klasse $\mathcal{K}^2(R, D)$ wird der minimale Umfang*

$$L = D \left(2 + \sqrt{4 - \left(\frac{D}{R}\right)^2} \right)$$

durch das gleichschenklige spitzwinklige Dreieck mit zwei Seiten der Länge D angenommen.

Beweis:

Für $D = 2R$ ist die Behauptung mit $L = 2D$ offensichtlich. Sei nun B^* für $\sqrt{3}R < D < 2R$ eine umfangs kleinste Figur in der Klasse $\mathcal{K}^2(R, D)$. Der Umkreis von B^* wird durch ein spitzwinkliges Dreieck $\Delta_R := \Delta UVW$ mit $U, V, W \in \partial B^*$ und $\mathcal{D}(\Delta_R) \leq D$ aufgespannt. Wegen $\Delta_R \subseteq B^*$ gilt dann

$$\mathcal{L}(\Delta_R) \leq \mathcal{L}(B^*). \quad (1.23)$$

Seien $V' \in \partial B^*$ bzw. $W' \in \partial B^*$ der zu V bzw. W nächstgelegene Punkt zwischen V und W mit $d(U, V') = D = d(U, W')$ (siehe Abb. 1.3), wobei d hier den euklidischen Abstand zweier Punkte bezeichnet. Dann sind $\tilde{B} := \Delta UV'W'$ und $\tilde{B} := \Delta UVW$ zwei spitzwinklige Dreiecke mit $\tilde{B}, \tilde{B} \in \mathcal{K}^2(R, D)$. Fasst man U und V' als Brennpunkte einer Ellipse durch den Punkt W auf, so liegt der Punkt

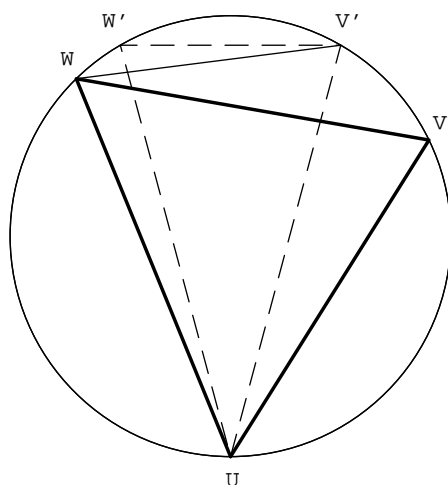


Abbildung 1.3: Beweisskizze

W' innerhalb dieser Ellipse. Mit der Optimalität von B^* in der Menge $\mathcal{K}^2(R, D)$ ergibt sich hieraus die Ungleichung

$$\mathcal{L}(B^*) \leq \mathcal{L}(\bar{B}) \leq \mathcal{L}(\tilde{B}). \quad (1.24)$$

Betrachtet man nun andererseits eine Ellipse durch den Punkt V mit den Brennpunkten U und W , so liegt der Punkt V' innerhalb dieser Ellipse. Es gilt also die Ungleichung

$$\mathcal{L}(\tilde{B}) \leq \mathcal{L}(\Delta_R). \quad (1.25)$$

Aus den Ungleichungen (1.23), (1.24) und (1.25) folgt schließlich mit $\mathcal{L}(B^*) = \mathcal{L}(\bar{B}) = \mathcal{L}(\Delta_R)$ die Behauptung. ■

Gleichschenklige Dreiecke sind damit umfangskleinste konvexe Figuren gegebenen Durchmessers und Umkreises. Für $2D \leq L \leq 3D$ folgt aus diesem Lemma die Äquivalenz der Minimierungsaufgabe $(\bar{P}_{L, \{D, R\}})$ zum konvexen Maximierungsproblem

$$(\bar{P}_{R, \{L, D\}}) : \quad \mathcal{R}(B) \rightarrow \text{Max!} \\ B \in \mathcal{K}_D^2(L, D)$$

mit zulässigem Bereich

$$\mathcal{K}_D^2(L, D) = \{B \in \mathcal{K}_D^2 / \mathcal{L}(B) = L, \mathcal{D}(B) = D\} \quad (1.26)$$

und \mathcal{K}_D^2 aus (1.18), d.h. mit Minkowski-linearen Restriktionen.

Nach einer Idee von BLASCHKE [13] lassen sich Relationen zwischen drei charakteristischen Parametern in einem ebenen Diagramm veranschaulichen (siehe auch [15] und [46]). Das vollständige Ungleichungssystem für Tripel (D, R, L) ist durch die Ungleichungen (2.VII), (2.VIII), (2.IX) und

$$D \left(2 + \sqrt{4 - \left(\frac{D}{R} \right)^2} \right) \leq L \leq \pi D \quad (1.27)$$

gegeben. Dabei resultiert letztere aus Lemma 1.2 und der Ungleichung (2.IV). Das zugehörige *Blaschke-Diagramm* ist in Abb. 1.4 dargestellt. Mit der Festlegung $D = 1$ werden die für die Ungleichungen unwesentlichen Ähnlichkeitstransformationen ausgeblendet.

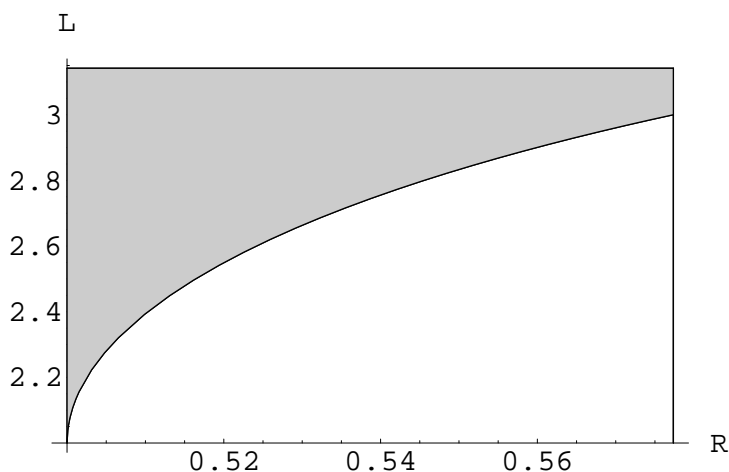


Abbildung 1.4: Blaschke-Diagramm für (D, R, L)

Wir wenden uns nun entsprechenden Extremalaufgaben für den Flächeninhalt zu. In der Klasse

$$\mathcal{K}^2(L, R) = \{B \in \mathcal{K}^2 / \mathcal{L}(B) = L, \mathcal{R}(B) = R\}, \quad 4R \leq L \leq 2\pi R, \quad (1.28)$$

wurde das Flächenmaximum von KUBOTA [87] bestimmt. Er diskutierte damit die folgende Aufgabe:

$$(\overline{\mathbb{P}}_{F, \{L, R\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Max!} . \\ B \in \mathcal{K}^2(L, R)$$

Optimalfigur ist eine Linse vom Durchmesser $D = 2R$. FAVARD [28] löste die zugehörige Minimierungsaufgabe:

$$(\underline{P}_{F,\{L,R\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Min!} . \\ B \in \mathcal{K}^2(L, R)$$

Sie wird als *Favard–Problem* bezeichnet. Lösung dieser Aufgabe ist ein eindeutig bestimmtes *fastreguläres Inpolyeder* des Kreises vom Radius R . Die Seiten eines solchen Polyeders sind alle gleich lang bis auf eine, höchstens kürzere Seite. Das Problem $(\underline{P}_{F,\{L,R\}})$ ist äquivalent zur konkaven Minimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{F}(B)} &\rightarrow \text{Min!} \\ \mathcal{L}(B) &= L \\ \mathcal{R}(B) &\leq R. \end{aligned}$$

In beiden Aufgaben sind die Optimalwertfunktionen in Abhängigkeit von $\frac{R}{L}$ nur implizit gegeben. Für das Tripel (F, L, R) erhält man die scharfen Abschätzungen

$$R^2 \left(\frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(2\pi - (n-1)\alpha) \right) \leq F \leq \frac{\cos \varphi}{8\varphi} L(L - 4R) \quad (1.29)$$

mit $L \in [4R, 2\pi R]$ und implizit gegebenen Werten n, α und φ . Der Linsenwinkel φ berechnet sich aus

$$L \sin \varphi = 4R\varphi. \quad (1.30)$$

Die Seitenzahl $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und der charakteristische Winkel $\alpha \in [\frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n-1})$ des fastregulären Kreis–Inpolyeders sind eindeutig durch

$$2(n-1) \sin \frac{\pi}{n-1} < \frac{L}{R} \leq 2n \sin \frac{\pi}{n} \quad (1.31)$$

und durch

$$\frac{L}{R} = 2(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{2\pi - (n-1)\alpha}{2} \quad (1.32)$$

bestimmt. Eine Verallgemeinerung des Favard–Problems wird in Kapitel 2 behandelt.

In der Klasse

$$\mathcal{K}^2(L, D) = \{B \in \mathcal{K}^2 / \mathcal{L}(B) = L, \mathcal{D}(B) = D\}, \quad (1.33)$$

$2D \leq L \leq \pi D$, besitzt ebenfalls die Linse mit $D = 2R$ maximalen Flächeninhalt. Die zugehörige Extremalaufgabe

$$(\overline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F},\{L,D\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Max!} \\ B \in \mathcal{K}_D^2(L, D)$$

mit $\mathcal{K}_D^2(L, D)$ aus (1.26) ist nach dem Satz von Brunn–Minkowski äquivalent zu einem konkaven Maximierungsproblem. Die aus der Lösung resultierende Ungleichung ergibt sich mit $2R = D$ aus der rechten Seite der Ungleichung (1.29) mit Linsenwinkel φ aus (1.30).

Flächenminima wurden von KUBOTA [87] in der Klasse $\mathcal{K}^2(L, D)$ für Parameterwerte $2D \leq L \leq 3D$ untersucht. Optimalfiguren des Problems

$$(\underline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F},\{L,D\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Min!} \\ B \in \mathcal{K}_D^2(L, D)$$

sind hier gleichschenklige Dreiecke mit zwei Seiten der Länge D . Für größtmöglichen Umfang, also $L = \pi D$, ergibt sich die Lösung aus dem Satz von Blaschke–Lebesgue. In diesem Fall ist das Reuleaux–Dreieck optimal. Für die verbleibenden Parameterwerte $3D < L < \pi D$ wurde das Problem von KUBOTA und HEMMI in [53] bis [57] gelöst. Wir bezeichnen die optimalen Figuren als *Hemmi–Polyeder*. Die Lösung dieses isoperimetrisch–isodiametrischen Problems $(\underline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F},\{L,D\}})$ ist Gegenstand von Kapitel 5. Da diese Aufgabe zu einem konkaven Minimierungsproblem äquivalent ist, können insbesondere vom globalen Minimum verschiedene lokale Minima auftreten.

Schließlich sind flächenextremale Figuren in der Klasse

$$\mathcal{K}^2(D, R) = \{B \in \mathcal{K}^2 / \mathcal{D}(B) = D, \mathcal{R}(B) = R\} \quad (1.34)$$

mit $\sqrt{3}R \leq D \leq 2R$ unter denjenigen extremalen Umfangs zu suchen. Wegen Lemma 1.2 ist ein gleichschenkliges Dreieck die Optimalfigur des Minimierungsproblems

$$(\underline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F},\{D,R\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Min!} \\ B \in \mathcal{K}^2(D, R)$$

Die Lösung des entsprechenden Maximierungsproblems

$$(\overline{\mathbb{P}}_{\mathbb{F},\{D,R\}}) : \quad \mathcal{F}(B) \rightarrow \text{Max!} \\ B \in \mathcal{K}^2(D, R)$$

muss wegen der Ungleichung (2.IV) ein Gleichdick mit Umkreisradius R sein.

Kapitel 2

Verallgemeinertes Favard-Problem

Im Jahre 1929 löste FAVARD [28] das folgende geometrische Extremalproblem:

Welche konvexe Figur mit vorgegebenem Umkreis und Flächeninhalt besitzt den größten Umfang?

Diese Aufgabe ist äquivalent zum Problem $(\underline{P}_{F,\{L,R\}})$ aus Kapitel 1. Optimalfiguren sind eindeutig bestimmte fastreguläre Kreispolyeder. Sie liefern scharfe untere Schranken für den Flächeninhalt einer beliebigen konvexen Figur mit Umfang L und Umkreisradius R .

Beim verallgemeinerten Favard'schen Problem, wie es in [78] diskutiert wurde, ersetzt ein Kreissektor den Umkreis. Es liegt dann die Vermutung nahe, dass die optimalen Figuren *fastreguläre Sektorinpolyeder* sind. Behandelt man diese Aufgabe als Problem der optimalen Steuerung, so muss man, um polyedrische Lösungen einzuschließen, distributionelle Steuerungen zulassen. Die Auswertung der Bedingungen aus der distributionellen Version des Pontrjagin'schen Maximumprinzips von KLÖTZLER [70] liefert zunächst notwendige Eigenschaften einer Optimalfigur. Diese Ergebnisse gestatten es, das Problem auf die Lösung einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe zurückzuführen.

2.1 Problemstellung

Die kompakte Menge $S_\omega \subseteq \mathbb{E}^2$ sei ein Kreissektor mit Radius $R = 1$ (o.B.d.A), Zentrum O , Zentriwinkel $\omega \in [0, 2\pi]$ und Sektorbogen s_ω . Mit der konvexen kompakten Menge $\Delta_\omega \subseteq \mathbb{E}^2$ bezeichnen wir das zugehörige gleichschenklige Dreieck, welches durch die beiden Schenkel von S_ω und den eingeschlossenen Winkel ω für $\omega \in [0, \pi]$ bzw. $2\pi - \omega$ für $\omega \in (\pi, 2\pi]$ erzeugt wird. Es ist dann $S_\omega \cup \Delta_\omega$ konvex.

Definition 2.1 Sei $B_\omega \subseteq \mathbb{E}^2$ eine abgeschlossene Menge mit $S_\omega \cap \Delta_\omega \subseteq B_\omega \subseteq S_\omega$. Falls $B_\omega \cup \Delta_\omega$ konvex ist, dann heißt B_ω Sektorinbereich von S_ω .

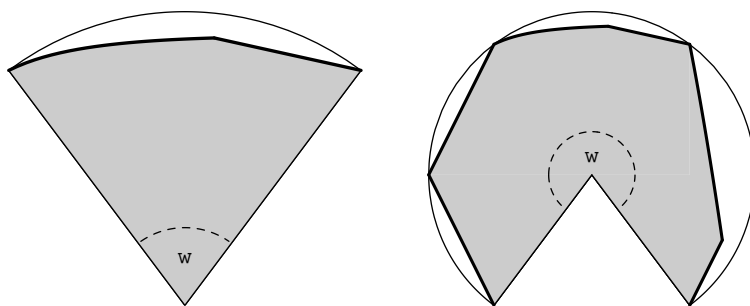


Abbildung 2.1: Sektorinbereiche

Der Rand ∂B_ω eines Sektorinbereiches B_ω (siehe Abb. 2.1) setzt sich für $\omega \in (0, 2\pi)$ aus den Schenkeln von S_ω und einer die Endpunkte der Schenkel verbindenden Randkurve b_ω zusammen. Die Ecken von Δ_ω gehören zu ∂B_ω . Zu festem $\omega \in (0, 2\pi]$ unterscheidet sich der Rand verschiedener Sektorinbereiche genau durch deren Randkurve b_ω . Die Länge von b_ω bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_\omega(B_\omega)$. Im Fall $\omega = 2\pi$ ist $b_\omega = \partial B_\omega$ und $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}$ mit dem Umfangsfunktional \mathcal{L} aus (1.15). Für $\omega \in (0, \pi)$ ist B_ω konvex und $\mathcal{L}_\omega(B_\omega) \geq 2 \sin \frac{\omega}{2}$. Ist $\omega \in (\pi, 2\pi)$, so betrachten wir nur Sektorinbereiche mit Mindestumfang $4 - 2 \cos \frac{\omega}{2}$. Setzen wir

$$l_1^\omega := \begin{cases} 2 \sin \frac{\omega}{2} & \text{für } \omega \in [0, \pi] \\ 2(1 - \cos \frac{\omega}{2}) & \text{für } \omega \in (\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad (2.1)$$

so gilt $\mathcal{L}_\omega(B_\omega) \in [l_1^\omega, \omega]$ für jeden Sektorinbereich B_ω . Das verallgemeinerte Favard-Problem lässt sich nun folgendermaßen formulieren:

Welcher Sektorinbereich besitzt bei vorgegebenem Umfang den kleinsten Flächeninhalt?

Bezeichnen wir mit \mathcal{K}_ω^2 die Menge aller Sektorbereiche von S_ω , dann führt diese Aufgabe auf das geometrische Extremalproblem

$$(\text{FP}^{\omega,L}) : \quad \mathcal{F}(B_\omega) \rightarrow \text{Min!} . \\ \mathcal{L}_\omega(B_\omega) = L, \quad B_\omega \in \mathcal{K}_\omega^2$$

Da \mathcal{F} und \mathcal{L}_ω stetige Funktionale auf der konvexen kompakten Menge \mathcal{K}_ω^2 sind, existiert die Lösung dieser Aufgabe. Mit $\sqrt{\mathcal{F}}$ als Zielfunktional ist sie ein konkaves Minimierungsproblem. Für jeden Wert von $\omega \in (0, 2\pi]$ ist die Struktur flächenminimaler Sektorbereiche in Abhängigkeit vom Parameter $L \in [l_1^\omega, \omega)$ gesucht. Beim Favard'schen Problem ($\underline{P}_{F,\{L;R\}}$) sind die Lösungsbereiche fastreguläre Inpolyeder des Kreises. Wir führen nun für das verallgemeinerte Favard-Problem analoge Begriffe ein.

Definition 2.2 Der Sektorbereich B_ω heißt Sektorinpolyeder von S_ω , falls B_ω ein Polyeder ist und alle vom Zentrum O verschiedenen Ecken von B_ω auf dem Sektorbogen s_ω liegen.

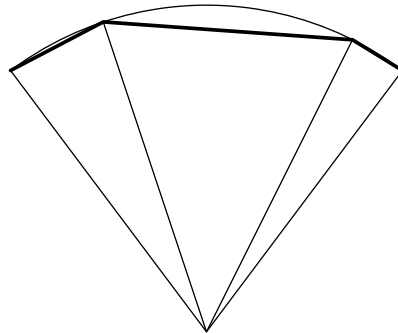


Abbildung 2.2: Sektorinpolyeder

Wir bezeichnen ein Sektorinpolyeder von S_ω (siehe Abb. 2.2) mit P_ω und das die Schenkel von S_ω verbindende Randpolygon mit p_ω . Ein Sektorinpolyeder P_ω mit $n + 1 \geq 2$ Ecken auf dem Sektorbogen nennen wir n -seitig. Es lässt sich eindeutig mit Hilfe entsprechender Zentriwinkel $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in [0, \omega]$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \omega$, beschreiben. Die Länge von p_ω und der Flächeninhalt von P_ω sind dann durch

$$\mathcal{L}_\omega(P_\omega) = 2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{\varphi_i}{2}, \quad \mathcal{F}(P_\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i \quad (2.2)$$

gegeben. Ist $\mathcal{L}(P_\omega) = l_1^\omega$, dann existiert im Fall $\omega \leq \pi$ genau ein Sektorinpolyeder mit $n = 1$, $\varphi_1 = \omega$ und im Fall $\omega > \pi$ ein bis auf Vertauschungen der Zentriwinkel

eindeutiges Sektorinpolyeder mit $n = 2$, $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \omega - \pi$. Für $L > l_1^\omega$ gilt $n \geq 2$ und $\varphi_i < \omega$ für alle i .

In Analogie zum Favard'schen Problem ($\omega = 2\pi$) sind auch für das verallgemeinerte Problem polyedrische Lösungen zu erwarten. Um entsprechende Strukturaussagen zu erhalten, wählen wir einen analytischen Zugang.

2.2 Behandlung als Steuerproblem

Der Flächeninhalt $\mathcal{F}(B_\omega)$ und die Länge $\mathcal{L}_\omega(B_\omega)$ der Randkurve b_ω eines Sektorinbereiches B_ω lassen sich mit Hilfe der Stützfunktion $h : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} F(h) &:= \frac{1}{2} \int_0^\omega \left(h(\varphi)^2 - \dot{h}(\varphi)^2 \right) d\varphi \\ L(h) &:= \int_0^\omega h(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

ausdrücken. Dabei ist $h(\varphi) \leq 1$ für $\varphi \in [0, \omega]$, $h(0) = h(\omega) = 1$ sowie $\dot{h}(0) = \dot{h}(\omega) = 0$ zu beachten. Gehören zu b_ω nur reguläre Stützhyperebenen, dann wird durch die Bedingung $h(\varphi) + \dot{h}(\varphi) \geq 0$ die Konvexität von $B_\omega \cup \Delta_\omega$ beschrieben. Da aber b_ω auch Streckenstücke enthalten kann, ist \ddot{h} im Allgemeinen nur im distributionellen Sinne zu verstehen. Dazu wählen wir als Grundraum den Sobolev-Raum $\mathbb{K} = W_\infty^1(0, \omega)$ aller Funktionen $\psi \in W_\infty^1(0, \omega)$ mit kompaktem Träger (siehe Anhang A.1). Den Raum der Distributionen über \mathbb{K} bezeichnen wir mit $D(\mathbb{K})$. Durch die Menge

$$D_0(\mathbb{K}) := \{\chi \in D(\mathbb{K}) / \text{supp}\chi \in [0, \omega]\}$$

zeichnen wir speziell die Distributionen über \mathbb{K} mit Träger in $[0, \omega]$ aus. Des Weiteren sei $\mathbb{K}_+ := \{\psi \in \mathbb{K} / \psi \geq 0\}$. Relationen, die im distributionellen Sinne zu verstehen sind, werden wir der Einfachheit halber mit Anführungsstrichen kennzeichnen. Damit sind nun $\ddot{h} \in D(\mathbb{K})$ durch

$$\langle \ddot{h}, \psi \rangle := -\langle \dot{h}, \dot{\psi} \rangle_{L^\infty} \quad \forall \psi \in \mathbb{K},$$

der Krümmungsradius $\varrho \in D(\mathbb{K})$ durch

$$\langle \varrho, \psi \rangle := \langle h, \psi \rangle - \langle \dot{h}, \dot{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}$$

und die Konvexitätsforderung an die Randkurve b_ω durch

$$\langle \varrho, \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{K}_+$$

bzw. $\varrho \geq 0$ erklärt. Um der Aufgabe $(FP^{\omega,L})$ ein Steuerproblem in Standardform zuzuordnen, führen wir folgende auf $[0, 2\pi]$ definierte Funktionen ein:

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= h(t) \\ x_2(t) &:= \dot{h}(t) \\ x_3(t) &:= \int_0^t h(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Den Krümmungsradius ϱ fassen wir als Steuerung u auf. Damit erhalten wir das distributionelle Steuerproblem

$$(SP^{\omega,L}) : \quad I(x, u) := \frac{1}{2} \int_0^\omega (x_1(t)^2 - x_2(t)^2) dt \rightarrow \text{Min!}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= x_1(\omega) = 1 \\ \dot{x}_2 &= u - x_1 & x_2(0) &= x_2(\omega) = 0 \\ \dot{x}_3 &= x_1 & x_3(0) &= 0 \\ x_1 &\leq 1 & x_3(\omega) &= L \\ u &\geq 0. \end{aligned}$$

Hierbei seien die Funktionen $x_i \in L_{2,loc} \subseteq D(\mathbb{K})$, $i = 1, 2, 3$, reguläre Distributionen über dem Grundraum \mathbb{K} und $u \in D_0(\mathbb{K})$ eine Distribution über \mathbb{K} mit kompaktem Träger.

Wegen $x_2 \in L_{2,loc}$ und $\dot{x}_1 = x_2$ ist die Zustandsfunktion x_1 auf $[0, \omega]$ stetig. Damit ist die Menge

$$N_1 := \{t \in [0, \omega] / x_1(t) = 1\} \quad (2.3)$$

der bezüglich dieser Zustandsbeschränkung aktiven Punkte abgeschlossen. Ein Umsortieren der höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Teilintervalle von N_1 führt auf einen zulässigen Prozess mit gleichem Zielfunktionswert. Die entsprechenden Sektorinbereiche besitzen denselben Flächeninhalt und Umfang. Deshalb können wir o.B.d.A. nach einem optimalen Prozess mit folgender speziellen Struktur der Menge der aktiven Punkte suchen.

Strukturvoraussetzung (S):

(x, u) sei ein zulässiger Prozess des Steuerproblems $(SP^{\omega, L})$ mit

$$N_1 = \{0\} \cup \{\varphi_i/i \in J\} \cup [\omega', \omega]$$

für gewisse $\varphi_i, \omega' \in (0, \omega]$ und eine höchstens abzählbare Menge J .

Zu solchen zulässigen Prozessen korrespondieren Sektorinbereiche B_ω , die sich aus einem Teilsektor $S_{\omega-\omega'}$ und einem Sektorinbereich $B_{\omega'}$ mit höchstens abzählbar vielen singulären Randpunkten auf dem Sektorbogen zusammensetzen.

Wir wenden nun die von KLÖTZLER in [70] hergeleitete distributionelle Version des Pontrjagin'schen Maximumprinzips (siehe Anhang A.2) auf das Problem $(SP^{\omega, L})$ an, um notwendige Eigenschaften eines optimalen Prozesses zu bestimmen. Die Voraussetzungen für die Anwendung dieses Prinzips sind erfüllt. Insbesondere folgt die Existenz regulärer zulässiger Prozesse in der Nähe eines optimalen Prozesses aus der Approximierbarkeit konvexer Figuren durch streng konvexe Figuren gemäß Theorem 1.2.

Die Pontrjagin-Funktion zur Aufgabe $(SP^{\omega, L})$ ist gegeben durch

$$H(t, \xi, \nu, \eta, \lambda_0) = -\frac{1}{2}\lambda_0 (\xi_1^2 - \xi_2^2) + \eta_1 \xi_2 + \eta_2 (-\xi_1 + \nu) + \eta_3 \xi_1$$

mit $t \in [0, \omega]$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^3$. Um die Maximumbedingung (M), die kanonischen Gleichungen (K) und die Transversalitätsbedingungen (T) auszuwerten, unterscheidet man bez. λ_0 zwei Fälle. Zu beachten sind dabei stets auch die Zustandsgleichungen sowie die Steuer- und Zustandsrestriktionen des Problems $(SP^{\omega, L})$.

Fall: $\lambda_0 = 1$.

Hier führt das Maximumprinzip auf folgende Bedingungen: Sei (x, u) ein optimaler Prozess, der die Strukturvoraussetzung (S) erfüllt. Dann existieren Vektoren $l^0, l^1 \in \mathbb{E}^3$, eine linksstetige vektorwertige Funktion $y : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{E}^3$ von beschränkter Variation und ein auf $[0, \omega]$ definiertes sowie auf der Menge N_1 konzentriertes nichtnegatives reguläres Maß μ , so dass

die Maximumbedingung

$$\sup_{\substack{v \geq 0, \\ v \in L_\infty(0, \omega) \cap D_0(\mathbb{K})}} \langle v \cdot y_2, \psi \rangle = \langle u \cdot y_2, \psi \rangle \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{K}_+, \quad (\text{M})$$

die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -l_1^1 + \int_t^\omega (-x_1(\tau) - y_2(\tau) + y_3(\tau))d\tau - \int_t^\omega \mu(d\tau) \\ y_2(t) &= -l_2^1 + \int_t^\omega (x_2(\tau) + y_1(\tau))d\tau \\ y_3(t) &= -l_3^1 \end{aligned} \quad (\text{K})$$

und die Transversalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= l_1^0 \\ y_2(0) &= l_2^0 \\ y_3(0) &= l_3^0 \end{aligned} \quad (\text{T})$$

erfüllt sind.

Das Maximum in (M) existiert nur im Fall $y_2(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, \omega]$. Der Maximalwert ist dann 0. Folglich muss die optimale Steuerung u der Komplementaritätsbedingung

$$\langle u \cdot y_2, \psi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{K}_+ \quad (2.4)$$

genügen. Das bedeutet

$$\text{supp } u \subseteq \{t \in [0, \omega] / y_2(t) = 0\}. \quad (2.5)$$

Aus (2.4) und der zweiten Zustandsgleichung folgt

$$\langle x_1 \cdot y_2, \psi \rangle + \langle \dot{x}_2 \cdot y_2, \psi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{K}_+.$$

Nach partieller Integration führt dies auf

$$\langle x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot \dot{y}_2, \psi \rangle + \langle x_2 \cdot y_2, \dot{\psi} \rangle = 0 \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{K}_+. \quad (2.6)$$

Sei nun $t_0 \in (0, \omega)$ beliebig fest. Mit der speziellen Folge $\{\psi_n\} \subseteq \mathbb{K}_+$ von Grundfunktionen gemäß

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 1 - n \cdot |t - t_0| & \text{für } t \in [t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man aus (2.6) unter Beachtung der Stetigkeit von y_2 die Bedingung

$$(x_2(t_0 - 0) - x_2(t_0 + 0)) y_2(t_0) = 0. \quad (2.7)$$

Analog liefert die Steuerrestriktion $\langle u, \psi \rangle \geq 0$ für alle $\psi \in \mathbb{K}_+$ die Bedingung

$$x_2(t_0 - 0) \leq x_2(t_0 + 0). \quad (2.8)$$

Aus den kanonischen Gleichungen folgt mit der Nichtnegativität des Maßes μ zunächst

$$y_1(t_0) \leq y_1(t_0 + 0) \quad (2.9)$$

für die linksstetige Funktion y_1 . Die absolutstetige Funktion y_2 genügt der kanonischen Differentialgleichung

$$\dot{y}_2 = -x_2 - y_1 \quad \text{f.ü. auf } [0, \omega]. \quad (2.10)$$

Hieraus folgt mit (2.8) und (2.9)

$$\dot{y}_2(t_0 + 0) \leq \dot{y}_2(t_0 - 0). \quad (2.11)$$

Die Funktion y_3 ist konstant auf $[0, \omega]$. Des Weiteren gilt auf jedem offenen Intervall $(a, b) \subseteq [0, \omega]$ mit $(a, b) \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ die kanonische Gleichung

$$\dot{y}_1 = x_1 + y_2 - y_3 \quad \text{f.ü. auf } (a, b). \quad (2.12)$$

Wegen (2.10) und (2.12) genügt y_2 auf (a, b) der distributionellen Differentialgleichung

$$\langle \ddot{y}_2 + y_2 - y_3 + u, \psi \rangle = 0 \quad (2.13)$$

für alle $\psi \in \mathbb{K}$ mit $\text{supp } \psi \subseteq (a, b)$.

Wir betrachten nun das Intervall $[\omega', \omega] \subseteq N_1$ aus der Strukturvoraussetzung (S). Für $\omega' < \omega$ gilt $x_2 = 0$ und $u = 1$ auf (ω', ω) . Da y_2 stetig ist, folgt $y_2 = 0$ auf $[\omega', \omega]$ aus (2.7). Nach (2.10) ist also $y_1 = 0$ auf (ω', ω) . Aus der kanonischen Gleichung (K) für y_1 ergibt sich damit

$$\mu([t, \omega]) = -l_1^1 + (\omega - t)(y_3 - 1) \geq 0 \quad (2.14)$$

für alle $t \in (\omega', \omega)$, also $l_1^1 \leq 0$ und $y_3 \geq 1$. Hieraus folgt alternativ

$$\text{supp } \mu \cap [\omega', \omega] = \emptyset \quad \text{oder} \quad [\omega', \omega] \subseteq \text{supp } \mu. \quad (2.15)$$

Die Struktur der Randkurve b_ω ist insbesondere im Inneren des Kreissektors S_ω zu diskutieren. Dies spiegelt sich in folgender Fallunterscheidung bez. des Trägers von μ wieder.

Fall 1: $t_0 \in (0, \omega) \setminus \text{supp } \mu$

Unter Beachtung der Komplementaritätsbedingung (2.4) und der Stetigkeit von y_2 betrachten wir folgende Teilfälle.

Fall 1.1: $y_2(t_0) < 0$

Da y_2 stetig ist, existiert ein offenes Intervall $I_0 \subseteq [0, \omega]$ mit $t_0 \in I_0$ und $y_2(t) < 0$ für $t \in I_0$. Aus (2.5) folgt dann $u = 0$ auf I_0 . Die Gleichung (2.13) besitzt also auf I_0 die reguläre Lösung

$$y_2(t) = A \cdot \cos(t - \alpha) + y_3. \quad (2.16)$$

Geometrisch entspricht dieser Fall einer Ecke des Sektorinbereichs.

Fall 1.2: $y_2(t_0) = 0$

Falls $y_2(t) = 0$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[b_0, c_0] \subseteq [0, \omega]$ mit $t_0 \in [b_0, c_0]$ ist, dann folgt aus (2.13) die Relation $u = y_3 \geq 1$ auf $[b_0, c_0]$. Dies entspricht geometrisch einem Kreisbogen vom Radius $y_3 \geq 1$. Für $y_3 > 1$ ergibt sich $x_1 < 1$ auf $[b_0, c_0]$ aus der Zustandsrestriktion und den Zustandsgleichungen. Für $y_3 = 1$ muss $[b_0, c_0] = [\omega', \omega]$ wegen der Strukturvoraussetzung (S) gelten. Es ist dann $x_1 < 1$ auf $(\omega' - \varepsilon, \omega')$ für ein $\varepsilon > 0$. Wegen $\text{supp } \mu \subseteq N_1$ und (2.15) sowie $t_0 \notin \text{supp } \mu$ folgt hieraus $[b_0, c_0] \cap \text{supp } \mu = \emptyset$.

Ist nun t_0 eine isolierte Nullstelle von y_2 , dann muss $y_2 < 0$ auf einer Umgebung $U(t_0) \setminus \{t_0\}$ von t_0 sein. Aus (2.5) folgt dann $u = 0$ auf $U(t_0) \setminus \{t_0\}$. Die Struktur von y_2 ist auf $U(t_0)$ durch (2.16) links- bzw. rechtsseitig von t_0 gegeben (i.A. mit jeweils unterschiedlichen Konstanten A, α). Unter Beachtung von (2.11) erhält man $\dot{y}_2(t_0 - 0) = \dot{y}_2(t_0 + 0) + d_0$ für ein $d_0 > 0$. Die Gleichung (2.13) führt damit zu $u = d_0 \cdot \delta_{t_0}$ auf $U(t_0)$ mit der in t_0 konzentrierten δ -Distribution δ_{t_0} . Dieser Fall entspricht geometrisch einer Strecke der Länge d_0 , welche mit zwei Ecken inzidiert.

Schließlich kann t_0 noch Häufungspunkt isolierter Nullstellen von y_2 sein. Geometrisch liegt dann ein Häufungspunkt von Streckenstücken vor. Dieser Fall wird später diskutiert.

Das Auftreten von Kreisbögen kann im Fall 1 folgendermaßen ausgeschlossen werden. Wie eben gezeigt, inzidiert eine Strecke nicht mit einem Kreisbogen. Dieser kann aber auch nicht mit einer Ecke inzidieren. Denn angenommen, es gibt ein Intervall (a_0, b_0) mit $u = 0$ und $x_1 < 1$ auf (a_0, b_0) sowie $u = y_3 \geq 1$ auf $[b_0, c_0]$. Dann ist $(a_0, c_0) \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ und folglich y_1 stetig auf (a_0, c_0) . Da u

auf (a_0, c_0) regulär ist, müssen x_2 und nach (2.10) auch \dot{y}_2 auf (a_0, c_0) stetig sein. Andererseits ergibt sich $y_2 = 0$ auf $[b_0, c_0]$ aus der Komplementaritätsbedingung. Auf (a_0, b_0) muss $y_2 < 0$ gelten, sonst wäre $u = y_3$ auf (a_0, b_0) . Folglich besitzt y_2 dort die Darstellung (2.16). Dann ist \dot{y}_2 aber in b_0 unstetig. Dieser Widerspruch zeigt, dass ein Kreisbogen, der im Inneren des Sektors S_ω verläuft, auch nicht mit einer Ecke inzidieren kann. Er tritt dort also nicht auf.

Fall 2: $t_0 \in \text{supp } \mu$

Wegen $\text{supp } \mu \subseteq N_1$ ist $x_1(t_0) = 1$. Nach der Strukturvoraussetzung (S) und Fall 1 kann der entsprechende Punkt auf dem Sektorbogen nur eine Ecke oder ein Häufungspunkt von Ecken des Sektorbereichs sein bzw. zum Kreisbogen vom Radius 1 über (ω', ω) gehören. Im letzten Fall muss dann $[\omega', \omega] \subseteq \text{supp } \mu$ wegen (2.14) gelten.

Fall $\lambda_0 = 0$:

Maximumbedingung und Transversalitätsbedingungen ändern sich nicht. Die kanonischen Gleichungen lauten hier wie folgt:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -l_1^1 + \int_t^\omega (-y_2(\tau) + y_3(\tau)) d\tau - \int_t^\omega \mu(d\tau) \\ y_2(t) &= -l_2^1 + \int_t^\omega y_1(\tau) d\tau \\ y_3(t) &= -l_3^1. \end{aligned} \tag{K_0}$$

Folglich genügt die absolutstetige Funktion y_2 nun statt (2.10) der kanonischen Differentialgleichung

$$\dot{y}_2 = -y_1 \quad \text{f. ü. auf } (0, \omega), \tag{2.17}$$

wobei (2.11) gültig bleibt. Auf $(a, b) \subseteq [0, \omega]$ mit $(a, b) \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ genügt y_1 statt (2.12) der kanonischen Gleichung

$$\dot{y}_1 = y_2 - y_3. \tag{2.18}$$

Zusammen mit (2.17) erhält man also für y_2 auf (a, b) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{y}_2 + y_2 - y_3 = 0. \tag{2.19}$$

Die Aussagen (2.14) und (2.15) bleiben gültig. Folglich besitzt y_2 auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $(a, b) \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ eine Darstellung der Gestalt (2.16) mit $y_3 \geq 1$.

Wegen $y_2 \leq 0$ muss deshalb $y_2 < 0$ und folglich $u = 0$ auf (a, b) gelten. Geometrisch bedeutet dies, dass jeder Punkt von b_ω , der nicht auf dem Sektorbogen liegt, nur Ecke von B_ω sein kann. Da dies nicht möglich ist, kann $\lambda_0 = 0$ nur im Fall $L = \omega$, also $B_\omega = S_\omega$, eintreten.

Bezeichnen wir einen Sektorinbereich als *fast-polyedrisch*, falls sich die zugehörige Randkurve, die die Schenkel des Sektors verbindet, nur aus Streckenstücken mit Ecken auf dem Sektorbogen und eventuell deren Häufungspunkten zusammensetzt, so lassen sich die diskutierten Konsequenzen aus dem Maximumprinzip im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.1 Sei $L \in [l_1^\omega, \omega)$. Dann gibt es ein $\omega' \in (0, \omega]$ und einen fast-polyedrischen Sektorinbereich $B_{\omega'}$, so dass

$$B_\omega = B_{\omega'} \cup S_{\omega-\omega'}$$

Optimallösung der Aufgabe $(FP^{\omega, L})$ ist.

Jeder optimale Sektorinbereich kann durch Permutation seiner von O verschiedenen Ecken in einen solchen Bereich überführt werden.

FAVARD [28] ging bei seinen Untersuchungen zum Problem $(\underline{P}_{F, \{L, R\}})$ davon aus, dass sich der Rand einer optimalen Figur aus einem Polygon und einem Teilbogen des Umkreises zusammensetzt. Wir können nach der Behandlung des Steuerproblems $(SP^{\omega, L})$ zunächst nur von fast-polyedrischen Teilbereichen ausgehen. Aus Satz 2.1 ergibt sich unmittelbar eine hierarchische Struktur optimaler Sektorinbereiche. Und zwar muss jeder polyedrische Teilbereich, welcher Inpolyeder eines Teilsektors von S_ω ist, flächenminimal unter allen vergleichbaren Sektorinbereichen desselben Teilumfangs sein. Damit lassen sich nun die noch offenen Strukturfragen diskutieren.

2.3 Fastreguläre Sektorinpolyeder

Um unter allen Sektorinpolyedern vorgegebenen Umfangs diejenigen kleinsten Flächeninhalts zu bestimmen, beschreiben wir diese mit Hilfe ihrer Zentriwinkel. Die Darstellung von Umfang und Flächeninhalt gemäß (2.2) führt auf folgende nichtlineare Optimierungsaufgabe für die Zentriwinkel φ und die Seitenzahl n :

$$(\mathbf{P}^{\omega, L}) : \quad F_{\omega}(\varphi; n) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i \rightarrow \text{Min!}$$

$$L_{\omega}(\varphi; n) := 2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{\varphi_i}{2} = L$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i = \omega$$

$$0 < \varphi_i \leq \pi \quad \forall i.$$

Bevor wir dieses Problem behandeln, zeichnen wir zunächst – analog zum Favard'schen Problem – spezielle Polyeder unter den Sektorinpolyedern aus und diskutieren für sie Flächeninhalt und Umfang.

Definition 2.3 Für $n \geq 2$ heißt ein n -seitiges Sektorinpolyeder P_{ω} fastregulär, falls es ein $\alpha > 0$ und ein $\delta \in (0, \alpha]$ gibt, so dass für die Zentriwinkel von P_{ω} die Relationen $\varphi_1 = \dots = \varphi_{n-1} = \alpha$ und $\varphi_n = \delta$ gelten. Im Fall $\delta = \alpha$ heißt P_{ω} auch regulär.

Für $\omega \in (\pi, 2\pi]$ ist das Sektorinpolyeder P_{ω} mit $\mathcal{L}(P_{\omega}) = l_1^{\omega}$ zweiseitig und fastregulär, für $\omega = 2\pi$ zweiseitig und regulär. Ein fastreguläres Sektorinpolyeder ist für $\omega = 2\pi$ in Abb. 2.3 dargestellt.

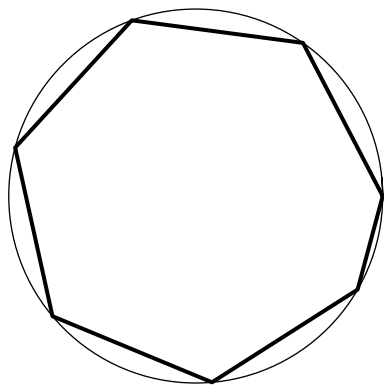


Abbildung 2.3: Fastreguläres Kreisinpolyeder

Wir bezeichnen α als *charakteristischen Winkel* und δ als *Defektwinkel*. Wegen $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \omega$ ist $\alpha \in [\frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n-1})$ sowie $\delta = \omega - (n-1)\alpha \in (0, \frac{\omega}{n}]$. Die Länge

des Randpolygons p_ω und der Flächeninhalt eines fastregulären n -seitigen Sektorinpolyeders P_ω lassen sich als Funktion des charakteristischen Winkels α folgendermaßen darstellen:

$$\mathcal{L}_\omega(\mathcal{P}_\omega) = {}^n L_\omega(\alpha) := 2(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\omega - (n-1)\alpha}{2} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}_\omega) = {}^n F_\omega(\alpha) := \frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\omega - (n-1)\alpha). \quad (2.21)$$

Für das reguläre n -seitige Sektorinpolyeder mit charakteristischem Winkel

$$\alpha_n^\omega := \frac{\omega}{n} \quad (2.22)$$

ist speziell

$${}^n L_\omega(\alpha_n^\omega) = l_n^\omega := 2n \sin \frac{\omega}{2n} \quad (2.23)$$

$${}^n F_\omega(\alpha_n^\omega) = f_n^\omega := \frac{n}{2} \sin \frac{\omega}{n}. \quad (2.24)$$

Zum kleinsten Parameterwert $L = l_1^\omega$ gehört der charakteristische Winkel

$$\alpha_1^\omega := \text{Min}\{\omega, \pi\}. \quad (2.25)$$

Im Fall $\omega = 2\pi$ ist $\alpha_1^\omega = \alpha_2^\omega = \pi$ und $l_1^\omega = l_2^\omega = 4$. Die stückweise zusammengesetzte Funktion

$$L_\omega(\alpha) := \begin{cases} \omega & \text{für } \alpha = 0 \\ {}^n L_\omega(\alpha) & \text{für } \alpha \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega), n = 2, 3, \dots \\ l_1^\omega & \text{für } \alpha = \alpha_1^\omega \end{cases} \quad (2.26)$$

ist dann auf dem Intervall

$$[0, \alpha_1^\omega] = \{0, \alpha_1^\omega\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega) \quad (2.27)$$

definiert. Mit Hilfe dieser Funktion lässt sich für fastreguläre Sektorinpolyeder die isoperimetrische Nebenbedingung durch

$$L = L_\omega(\alpha) \quad (2.28)$$

ausdrücken.

Es erweist sich für spätere Untersuchungen als günstig, eine noch allgemeinere Klasse von Sektorinpolyedern einzuführen.

Definition 2.4 Sei $\omega > 2\pi$. Dann heißt die Menge $P_\omega \subseteq \mathbb{E}^2$ mehrfach umschlungenes n -seitiges Sektorinpolyeder, falls sie sich aus endlich vielen n_j -seitigen Sektorinpolyedern P_{ω_j} von Einheitskreissectoren S_{ω_j} mit $\omega_j \in [0, 2\pi]$, $\sum_j \omega_j = \omega$ und $n = \sum_j n_j$ zusammensetzt.

Ein mehrfach umschlungenes Sektorinpolyeder heißt fastregulär, falls alle Teilpolyeder bis auf höchstens eines regulär sind, das verbleibende Teilpolyeder fastregulär ist und die charakteristischen Winkel alle übereinstimmen.

Das Randpolygon p_ω , welches sich aus den zu P_{ω_j} gehörigen Randpolygonen p_{ω_j} zusammensetzt, heißt ebenfalls mehrfach umschlungen.

Sei nun P_ω ein mehrfach umschlungenes n -seitiges Sektorinpolyeder mit $\omega \in (k\pi, (k+1)\pi]$ für ein $k \geq 0$ und $\mathcal{L}(P_\omega) = \sum_j \mathcal{L}(P_{\omega_j})$. Dann bezeichnet

$$l_k^\omega := 2k + l_1^{\omega - k\pi} \quad (2.29)$$

die Mindestlänge des Randpolygons p_ω . Insbesondere gilt $l_0^\omega = l_1^\omega$ für $\omega \in (0, \pi]$ und $l_k^\omega = l_{k+1}^\omega = 2(k+1)$ für $\omega = (k+1)\pi, k \geq 1$. Zu $l_k^\omega, k \geq 1$, gehört der charakteristische Winkel

$$\alpha_k^\omega = \pi \quad (2.30)$$

und der Defektwinkel $\delta_k^\omega = \omega - k\pi$. Offensichtlich gilt $n = k+1$ für $L = l_k^\omega$ und $n \geq k+2$ sonst. Alle weiteren Größen bleiben auch für mehrfach umschlungene Sektorinpolyeder wie bisher durch (2.20) bis (2.24) erklärt. Die Funktion L_ω ist durch (2.26) nun auf

$$[0, \alpha_k^\omega] = \{0, \alpha_k^\omega\} \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega) \quad (2.31)$$

definiert.

Eigenschaften fastregulärer Kreisinpolyeder ($\omega = 2\pi$) wurden von Focke [35] diskutiert und in [18] auf den Fall $\omega \in [0, 2\pi]$ übertragen. Wir beschreiben nun den Zusammenhang zwischen L, α und n für beliebiges $\omega > 0$.

Lemma 2.1 Sei $\omega \in (k\pi, (k+1)\pi]$ für ein $k \geq 0$. Dann existiert zu jedem $L \in (l_k^\omega, \omega)$ eindeutig ein $n \geq k+1$ gemäß $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ und ein $\alpha \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega)$ mit $L = {}^n L_\omega(\alpha)$.

Beweis:

Für $0 < \omega - (n-1)\alpha \leq \alpha$ ist die Funktion ${}^n L_\omega$ gemäß (2.20) und (2.23) auf $[\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega]$ definiert. Sie ist dort stetig mit

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{n-1}^\omega} {}^n L_\omega(\alpha) = l_{n-1}^\omega. \quad (2.32)$$

Auf $(\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega)$ ist sie stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{d\alpha} {}^n L_\omega(\alpha) = (n-1) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\delta_\omega(\alpha)}{2} \right) < 0. \quad (2.33)$$

Das Vorzeichen dieser Ableitung ergibt sich dabei aus $\alpha \in (\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega) \subset (0, \pi)$ und $\delta_\omega(\alpha) = \omega - (n-1)\alpha < \alpha$ für $L > l_k^\omega$, also $n \geq k+1$. Die zusammengesetzte Funktion L_ω aus (2.26) ist folglich auf $[0, \alpha_k^\omega]$ stetig und streng monoton fallend. Zu jedem $L \in [l_k^\omega, \omega]$ existiert also eindeutig ein $\alpha = \alpha_\omega(L) \in [0, \alpha_k^\omega]$ mit (2.28). Wegen (2.26) und (2.27) gibt es dann genau ein $n \geq k+1$ mit $\alpha_\omega(L) \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega]$ und $L_\omega(\alpha) = {}^n L_\omega(\alpha)$. Die Zerlegung des α -Intervalls $(0, \alpha_k^\omega)$ korrespondiert folglich eineindeutig zur Zerlegung des L -Intervalls

$$(l_k^\omega, \omega) = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega). \quad (2.34)$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Mit der Funktion L_ω ist auch die Umkehrfunktion α_ω streng monoton fallend. Geometrisch besagt dieses Lemma, dass es zu jedem $L \in (l_k^\omega, \omega)$ ein bis auf Permutationen der Sektorwinkel eindeutig bestimmtes n -seitiges fastreguläres Sektorinpolyeder P_ω mit $\mathcal{L}_\omega(P_\omega) = L$ und $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ gibt. Das zugehörige Paar $(\varphi; n)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_1 = \dots = \varphi_{n-1} = \alpha$, $\varphi_n = \delta$ ist dann eine zulässige Lösung des Problems $(P^{\omega, L})$.

Analog zu L_ω lässt sich der Flächeninhalt als Funktion des charakteristischen Winkels α stückweise auf $[0, \alpha_k^\omega]$ durch

$$F_\omega(\alpha) := \begin{cases} \frac{\omega}{2} & \text{für } \alpha = 0 \\ {}^n F_\omega(\alpha) & \text{für } \alpha \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega), n \geq k+1 \\ f_k^\omega & \text{für } \alpha = \alpha_k^\omega \end{cases} \quad (2.35)$$

definieren. Dabei ist ${}^n F_\omega$ durch (2.21) gegeben und $f_k^\omega := \frac{1}{2} \sin \alpha_k^\omega$. Die Funktion F_ω ist dann wegen

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{n-1}^\omega} {}^n F_\omega(\alpha) = f_{n-1}^\omega \quad (2.36)$$

mit f_{n-1}^ω aus (2.24) auf dem Intervall $[0, \alpha_k^\omega]$ stetig sowie auf dem offenen Intervall $(0, \alpha_k^\omega)$ stückweise stetig differenzierbar.

Kompositions- und Dekompositionseigenschaften fastregulärer Sektorinpolyeder spiegeln sich in der durch (2.26) definierten Längenfunktion L_ω und in der durch (2.35) definierten Flächeninhaltsfunktion F_ω wider.

Kompositionsregeln:

Sei $\omega = j \cdot \alpha + \delta$ mit $j \geq 2$ und $\alpha \in [\frac{\omega}{j+1}, \frac{\omega}{j}]$ sowie $\omega' = j' \cdot \alpha + \delta$ für ein j' mit $1 \leq j' \leq j - 1$. Dann gilt:

$$(i) \quad L_\omega(\alpha) = L_{(j-j')\cdot\alpha}(\alpha) + L_{\omega'}(\alpha)$$

$$(ii) \quad F_\omega(\alpha) = F_{(j-j')\cdot\alpha}(\alpha) + F_{\omega'}(\alpha)$$

$$(iii) \quad L_\omega(\alpha) + L_\omega(\alpha_j^\omega) = L_{j\cdot\alpha}(\alpha) + L_{\omega+\delta}(\alpha_j^\omega)$$

$$(iv) \quad F_\omega(\alpha) + F_\omega(\alpha_j^\omega) = F_{j\cdot\alpha}(\alpha) + F_{\omega+\delta}(\alpha_j^\omega).$$

Beweis:

Die Regeln für die Zerlegungen bzw. Umordnungen ergeben sich unmittelbar aus (2.20), (2.21), (2.22), (2.26) und (2.35). Wegen $\alpha \in [\frac{\omega}{j+1}, \frac{\omega}{j}]$ ist $\delta = \omega - j \cdot \alpha \in (0, \frac{\omega}{j+1}]$, also $\delta \leq \alpha$ erfüllt. Hieraus folgt unmittelbar $\alpha \in [\frac{\omega'}{j+1}, \frac{\omega'}{j}]$, und damit auch $\delta \in (0, \frac{\omega'}{j+1}]$. Analog erhält man $\alpha_j^\omega \in [\frac{\omega+\delta}{j+1}, \frac{\omega+\delta}{j}]$ und $\delta \in (0, \frac{\omega+\delta}{j+1}]$. ■

Schließlich lässt sich der Flächeninhalt fastregulärer Sektorinpolyeder durch die Funktion $F_\omega(\alpha_\omega(L))$ mit $\alpha_\omega(L)$ gemäß (2.28) auch in Abhängigkeit vom Umfang beschreiben. Dabei ist $\alpha_\omega : [l_k^\omega, \omega] \mapsto [0, \alpha_k^\omega]$ die nach Lemma 2.1 existierende Umkehrfunktion zur Funktion L_ω aus (2.26).

Definition 2.5 Die Funktion $f_\omega : [l_k^\omega, \omega] \mapsto \mathbb{R}$ gemäß $f_\omega(L) := F_\omega(\alpha_\omega(L))$ heißt 'fonction penetrante'.

Mit (2.20), (2.21), (2.26), (2.35) sowie $f_\omega(l_k^\omega) = f_k^\omega$ und $f_\omega(\omega) = \frac{\omega}{2}$ ist die 'fonction penetrante' stückweise implizit auf $[l_k^\omega, \omega]$ definiert. Und zwar ist sie auf $(l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ durch

$$f_\omega(L) = \frac{n-1}{2} \sin \alpha_\omega(L) + \frac{1}{2} \sin \delta_\omega(L) \quad (2.37)$$

und

$$L = 2(n-1) \sin \frac{\alpha_\omega(L)}{2} + 2 \sin \frac{\delta_\omega(L)}{2} \quad (2.38)$$

mit $\alpha_\omega(L) \in [\frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n-1})$, $\delta_\omega(L) = \omega - (n-1)\alpha_\omega(L)$ und n gemäß

$$L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$$

gegeben. Dabei gehören die Größen l_n^ω aus (2.23) und $f_\omega(l_n^\omega) = f_n^\omega$ aus (2.24) für $n \geq k+1$ zum regulären n -seitigen Sektorinpolyeder.

Lemma 2.2 *Sei $\omega \in (k\pi, (k+1)\pi]$ für ein $k \geq 0$. Dann ist die Funktion f_ω auf $[l_k^\omega, \omega]$ streng monoton wachsend, stetig und stückweise stetig differenzierbar.*

Beweis:

Die Stetigkeit von f_ω folgt aus der Stetigkeit von F_ω und α_ω . Für $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$ ist

$$f'_\omega(L) = \frac{F'_\omega(\alpha)}{L'_\omega(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos \delta)}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\delta}{2}}$$

mit $\alpha = \alpha_\omega(L)$ und $\delta = \delta_\omega(L)$. Wegen $\alpha, \delta \in (0, \pi)$ und $\delta < \alpha$ ist $f'_\omega(L) > 0$ auf jedem offenen Intervall $(l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$. ■

Wir wenden uns nun wieder der Aufgabe $(P^{\omega, L})$ mit $\omega > 0$ zu. Die Auswertung notwendiger Optimalitätsbedingungen führt auf das folgende Ergebnis.

Satz 2.2 *Sei $\omega \in (k\pi, (k+1)\pi]$ für ein $k \geq 0$ und $L \in [l_k^\omega, \omega)$. Dann ist das Paar $(\varphi; n)$ mit*

$$(i) \quad n = k+1 \text{ für } L = l_k^\omega \text{ bzw. } n \geq k+1 \text{ gemäß } L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$$

$$(ii) \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ mit } \varphi_1 = \dots = \varphi_{n-1} = \alpha_\omega(L) \text{ und } \varphi_n = \omega - (n-1)\varphi_1$$

eindeutige Optimallösung des Problems $(P^{\omega, L})$.

Beweis

Sei $\omega \in (k\pi, (k+1)\pi]$ für ein $k \geq 0$. Zu kleinstmöglichem Umfang gehört genau ein Sektorinpolyeder. Dieses ist $(k+1)$ -seitig und fastregulär mit $\alpha = \pi$. Damit ist für $L = l_k^\omega$ das Paar (φ, n) mit (i) und (ii) einzige zulässige Lösung des Problems $(P^{\omega, L})$. Wir brauchen also nur den Fall $L > l_k^\omega$ zu betrachten.

Es sei nun $(\varphi; n)$ mit $n \geq k+1$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Optimallösung des Problems $(P^{\omega, L})$. Die Lagrange-Funktion bez. φ lautet hierzu

$$L(\varphi, \lambda) := \frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i + \lambda_1 \left(2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{\varphi_i}{2} - L \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i - \omega \right).$$

Es muss also ein Vektor $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ existieren mit

$$\frac{1}{2}\lambda_0 \cos \varphi_i + \lambda_1 \cos \frac{\varphi_i}{2} + \lambda_2 = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (2.39)$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1: $\lambda_0 = 0$.

Wegen $\lambda \neq 0$ folgt aus (2.39) $\lambda_1 \neq 0$ und

$$\cos \frac{\varphi_i}{2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (2.40)$$

also $\varphi_i = \varphi_1$ für alle i wegen $\varphi \in (0, \pi]$.

Fall 2: $\lambda_0 = 1$.

Sei nun etwa $\varphi_1 > \varphi_n$. Aus (2.39) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + \cos \frac{\varphi_n}{2}\right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} + \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_n}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\cos \frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + \cos \frac{\varphi_n}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_n}{2} \right) \quad (2.41)$$

für $i = 1, \dots, n$. Wegen $0 < \varphi_i \leq \pi$ für alle i und $\varphi_1 \neq \varphi_n$ gibt es deshalb eine Zahl n_1 , $1 \leq n_1 < n$, mit

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_1 & \text{für } i = 1, \dots, n_1 \\ \varphi_n & \text{für } i = n_1 + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Im Fall einer Minimallösung muss außerdem noch die Definitheitsbedingung

$$\left(\cos \frac{\varphi_n}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\sin \frac{\varphi_1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} z_i^2 - \sin \frac{\varphi_n}{2} \sum_{i=n_1+1}^n z_i^2 \right) \geq 0 \quad (2.42)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n_1} z_i = 0, \quad \sum_{i=n_1+1}^n z_i = 0 \quad (2.43)$$

erfüllt sein. Für $n_1 = n - 1$ ist die Relation (2.42) wegen $z_n = 0$, $\varphi_1 > \varphi_n$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi]$ gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \geq 0,$$

also erfüllt. Ist dagegen $n_1 \leq n - 2$, dann gilt für die spezielle Lösung $z_n = -z_{n-1} = 1$, $z_i = 0$ für $i \leq n - 2$ von (2.43) die Relation

$$\sin \frac{\varphi_n}{2} (z_{n-1}^2 + z_n^2) > 0.$$

Wegen $\varphi_1 > \varphi_n$ führt diese Ungleichung auf einen Widerspruch zur Bedingung (2.42). Für eine Minimallösung muss also $n_1 = n - 1$ gelten.

In Fall 1 und Fall 2 setzen wir $\alpha := \varphi_1$ und $\delta := \varphi_n$. Aus $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \omega$ und $0 < \varphi_n \leq \varphi_1$ folgt $\alpha \in [\frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n-1})$ und $\delta \in (0, \frac{\omega}{n}]$, also $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Damit ist $L_\omega(\alpha) = L$ mit der Funktion L_ω aus (2.26). Wegen $L > l_k^\omega$ und der strengen Monotonie der Umkehrfunktion α_ω von L_ω (vgl. Lemma 2.1) ist $\alpha = \alpha_\omega(L) < \pi$. Die gefundene Lösung erfüllt damit die isoperimetrische Nebenbedingung und ist nach Lemma 2.1 eindeutig bestimmt. ■

Flächenminimale Sektorinpolyeder P_ω sind also fastregulär und durch $L \in [l_k^\omega, \omega)$ eindeutig bestimmt. Die 'fonction penetrante' f_ω ist folglich Optimalwertfunktion der Aufgabe $(P^{\omega, L})$.

Wir wenden uns jetzt wieder dem verallgemeinerten Favard'schen Problem $(P^{\omega, L})$ mit $\omega \in (0, 2\pi]$ zu. Die in Satz 2.1 formulierten ersten Strukturaussagen für flächenminimale Sektorinbereiche können nun mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes vervollständigt werden. Teilsektoren und Häufungspunkte von Ecken sind noch auszuschließen.

Lemma 2.3 *Ein flächenminimaler fast-polyedrischer Sektorinbereich B_ω besitzt keine Häufungspunkte von Ecken.*

Beweis

Angenommen, B_ω besitzt einen Häufungspunkt H von Ecken auf dem Sektorbogen s_ω . Sei $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ eine Folge benachbarter Ecken mit $d(E_i, H) > d(E_{i+1}, H) > 0$ für alle $i \geq 1$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} d(E_i, H) = 0$. Weiterhin seien $\tilde{S} \subseteq S_\omega$ bzw. $S_{\omega_i} \subseteq S_\omega$, $i \geq 2$, die entsprechenden Teilsektoren von S_ω zwischen E_1 und H bzw. zwischen E_1 und E_i . Das zugehörige fast-polyedrische Sektorinpolyeder $\tilde{B} := B_\omega \cap \tilde{S}$ bzw. die Sektorinpolyeder $P_{\omega_i} := B_\omega \cap S_{\omega_i}$ müssen flächenminimal

bez. \tilde{L} bzw. L_i sein. Dabei bezeichnen \tilde{L} bzw. L_i jeweils die Länge der Randkurve $\tilde{b} := b_\omega \cap \tilde{S}$ bzw. des Randpolygons $p_{\omega_i} := b_\omega \cap S_{\omega_i}$. Die Sektorinpolyeder P_{ω_i} sind aber nach Satz 2.2 fastregulär. Insbesondere ist P_{ω_3} fastregulär. Seien o.B.d.A. die Ecken E_1, E_2 entsprechend $d(E_1, E_2) \leq d(E_2, E_3)$ numeriert. Dann muß $L_i = L_1 + (i - 2) \cdot d$ mit $d = d(E_i, E_{i+1})$ für alle $i \geq 2$ gelten. Andererseits ist wegen $L_i \leq \tilde{L} \leq L$ für alle $i \geq 1$ die Folge $\{L_i\}_{i=1}^\infty$ beschränkt. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine Häufungspunkte von Ecken geben kann. ■

Zusammen mit Satz 2.1 und Satz 2.2 ergibt sich aus diesem Lemma jetzt die Darstellung $B_\omega = B_{\omega'} \cup S_{\omega - \omega'}$ für einen flächenkleinsten Sektorinbereich B_ω vom Umfang $L + 2$, wobei $B_{\omega'}, \omega' \in [0, \omega]$, ein fastreguläres Inpolyeder des Sektors $S_{\omega'} \subseteq S_\omega$ und $S_{\omega - \omega'}$ der ergänzende Teilsektor von S_ω sind. Der Flächeninhalt einer Lösung des verallgemeinerten Favard-Problems (FP $^{\omega, L}$) ist nun für $R = 1$ gegeben durch

$$\mathcal{F}_\omega(B_\omega) = \frac{1}{2}(\omega - \omega') + f_{\omega'}(L') \quad (2.44)$$

mit $\mathcal{L}_{\omega'}(B_{\omega'}) = L' \in [\underline{L}, L]$, $\underline{L} \in (0, L]$. Eine Untersuchung dieser Funktion ergibt schließlich folgende Aussage.

Lemma 2.4 *Ein flächenminimaler Sektorinbereich B_ω enthält keinen Teilsektor.*

Beweis

Sei $w(l) = \omega - L + l$, also $w(L') = \omega'$. Da B_ω flächenminimal ist, muss L' Minimalstelle der Funktion

$$\hat{f}(l) := \frac{1}{2}(L - l) + f_{w(l)}(l)$$

auf $[\underline{L}, L]$ sein. Die Funktion f_w ist f.ü. differenzierbar. Unter Beachtung von Lemma 2.2 gilt also

$$\frac{d\hat{f}}{dl} = -\frac{1}{2} + \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\delta}{2} \right) \left(1 + (n-1) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\delta}{2} \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} \cos \delta.$$

Dabei ist $\alpha = \alpha(l, v)$ für $v \in [0, \omega]$ definiert durch

$$2(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{v - (n-1)\alpha}{2} - l = 0$$

mit $\delta = \delta(l, v) = v - (n-1)\alpha(l, v) \in (0, \alpha]$. Hieraus folgt

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\frac{\cos \frac{\delta}{2}}{(n-1) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\delta}{2} \right)},$$

also

$$\frac{d\hat{f}}{dl} = \left(\cos \frac{\delta}{2} - 1 \right) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Wegen $\alpha \in (0, \pi]$ und $\delta \in (0, \alpha]$ ist $\frac{d\hat{f}}{dl} < 0$ f.ü. auf $[\underline{L}, L]$. Die Funktion \hat{f} ist also streng monoton fallend auf $[\underline{L}, L]$. Hieraus folgt $L' = L$, also $\omega' = \omega$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Die Lösung des verallgemeinerten Favard–Problems kann nun vollständig mittels der Aussagen aus Satz 2.1, Satz 2.2, Lemma 2.3 und Lemma 2.4 beschrieben werden.

Theorem 2.1 *Sei $\omega \in (0, 2\pi]$ und $L \in [l_1^\omega, \omega)$. Dann sind flächenkleinste Sektorinbereiche von S_ω eindeutig bestimmte fastreguläre n -seitige Sektorinpolyeder mit n gemäß $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ und Flächeninhalt $f_\omega(L)$.*

Aus diesem Theorem resultiert die Ungleichung

$$F \geq R^2 \left(\frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\omega - (n-1)\alpha) \right) \quad (2.45)$$

mit α gemäß

$$\frac{L}{R} = 2(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\omega - (n-1)\alpha}{2}, \quad (2.46)$$

und damit eine scharfe untere Schranke für den Flächeninhalt allgemeiner Sektorinbereiche vom Umfang $2R + L$ mit $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$, $n \geq 2$, Sektorwinkel $\omega \in (0, 2\pi]$ und Sektorradius $R > 0$. Als Spezialfall ergibt sich hieraus für $\omega = 2\pi$ die Favard'sche Ungleichung (1.29) mit (1.31) und (1.32).

HEMMI [54] benutzte diese Strukturaussage zur Lösung des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems $(\underline{P}_{F, \{L, D\}})$. Er verwies dabei auf die Untersuchungen von FAVARD [28] für den Fall $\omega = 2\pi$. Wir greifen auf dieses Theorem in Kapitel 5 zurück.

Kapitel 3

Favard's 'fonction penetrante'

In Kapitel 2 wurde das verallgemeinerte Favard'sche Problem behandelt. Die Optimalwertfunktion dieser Aufgabe ist auf abzählbar unendlich vielen Teilintervallen implizit erklärt, dort stückweise konvex–konkav und stückweise stetig differenzierbar. FAVARD [28] beschrieb diese Funktion im Fall des isoperimetrischen Problems für Kreispolyeder als „une fonction assez compliquée“ und meinte: „... le calcul peut être penible“. Im Zusammenhang mit ihren Untersuchungen zu Paaren flächenkleinster Inpolyeder des Kreises führten FOCKE [35] und KLÖTZLER [74] deshalb die Bezeichnung 'fonction penetrante' für die Favard'sche Funktion ein.

Aufbauend auf [79] stellen wir in diesem Kapitel analytische Eigenschaften der Optimalwertfunktion f_ω des verallgemeinerten Favard–Problems ($\text{FP}^{\omega,L}$) für $\omega \in (0, 2\pi]$ zusammen. Konvexitätsdefekte, wie sie bei dieser ebenfalls als 'fonction penetrante' bezeichneten Funktion auftreten, lassen sich für eine allgemeinere Klasse streng konvex–konkaver Funktionen untersuchen und auswerten. Sie ziehen für Aufteilungsprobleme, wie sie anschließend in Kapitel 4 behandelt werden, Strukturverzweigungen der Lösung nach sich. Andererseits sind diese Defekte so gering, dass der Graph der Funktion im Groben konvex erscheint. Es lässt sich eine untere konvexe Einhüllende angeben. Resultate zum asymptotischen Verhalten wirken sich auf die in Kapitel 5 diskutierten isoperimetrisch–isodiametrischen Ungleichungen aus.

3.1 Analytische Eigenschaften

Die 'fonction penetrante' f_ω ist durch (2.37) und (2.38) für jedes $\omega \in [0, 2\pi]$ auf $[l_1^\omega, \omega]$ definiert. Ihr Graph ist für $\omega = 2\pi$ und $L \in [4, 12 \sin \frac{\pi}{6}]$ in Abb.3.1 dargestellt.

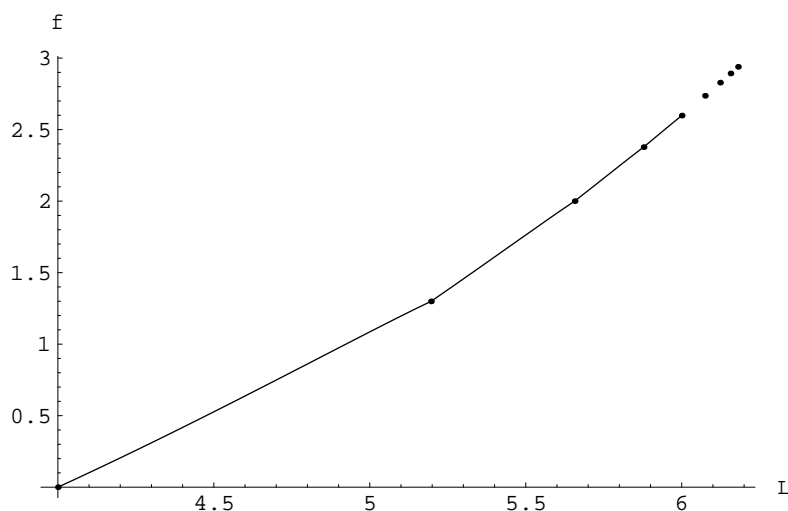


Abbildung 3.1: 'fonction penetrante' für $\omega = 2\pi$

Nach Lemma 2.2 ist diese Funktion stetig und auf jedem Intervall $I_n^0 := (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$, $n \geq 2$, stetig differenzierbar mit

$$f'_\omega(L) = \cos \frac{\alpha_\omega(L)}{2} + \cos \frac{\delta_\omega(L)}{2}. \quad (3.1)$$

Dabei ist $\alpha = \alpha_\omega(L)$ die durch (2.28) eindeutig auf $[l_1^\omega, \omega]$ definierte Umkehrfunktion von L_ω aus (2.20) und (2.26). Auf $(l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ gilt $\delta = \delta_\omega(L) = \omega - (n-1)\alpha(L)$. Im Fall $n = 2$, also $\alpha + \delta = \omega$ und $L = 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \right)$, erhält man für die erste Ableitung von f_ω auf (l_1^ω, l_2^ω) die explizite Darstellung

$$f'_\omega(L) = \frac{L}{2} \cot \frac{\omega}{4}. \quad (3.2)$$

Mit $f_\omega(l_2^\omega) = \sin \frac{\omega}{2}$ mit $l_2^\omega = 4 \sin \frac{\omega}{4}$ folgt hieraus

$$f_\omega(L) = \frac{L^2}{4} \cot \frac{\omega}{4} - \sin \frac{\omega}{2} \quad (3.3)$$

für $L \in [l_1^\omega, l_2^\omega]$. Die Funktion α_ω ist stetig auf $[l_1^\omega, \omega]$ mit $\alpha_\omega(l_n^\omega) = \alpha_n^\omega$. Aus (3.1) folgt einerseits

$$f'_\omega(l_n^\omega + 0) = \lim_{L \rightarrow l_n^\omega + 0} f'_\omega(L) = \cos \frac{\omega}{2n} + 1 \quad (3.4)$$

wegen $\alpha_\omega(L) \rightarrow \alpha_n^\omega + 0$ und $\delta_\omega(L) \rightarrow 0 + 0$ für $L \rightarrow l_n^\omega + 0$, und andererseits

$$f'_\omega(l_{n+1}^\omega - 0) = \lim_{L \rightarrow l_{n+1}^\omega - 0} f'_\omega(L) = 2 \cos \frac{\omega}{2(n+1)} \quad (3.5)$$

wegen $\alpha_\omega(L) \rightarrow \alpha_{n+1}^\omega - 0$ und $\delta_\omega(L) \rightarrow \alpha_{n+1}^\omega - 0$ für $L \rightarrow l_{n+1}^\omega - 0$.

Wir benötigen später auch höhere Ableitungen von f_ω . Für die Funktion L_ω ergeben sich zunächst aus (2.33) die Ableitungen

$$L'_\omega(\alpha) = (n-1) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\delta}{2} \right) < 0 \quad (3.6)$$

$$L''_\omega(\alpha) = -\frac{n-1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + (n-1) \sin \frac{\delta}{2} \right) < 0 \quad (3.7)$$

jeweils auf einem Intervall $(\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega)$, $n \geq 2$. Damit berechnet man (vgl. auch [18]) stückweise die Ableitungen

$$f''_\omega(L) = \frac{1}{2L'_\omega(\alpha)} \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + (n-1) \sin \frac{\delta}{2} \right) \quad (3.8)$$

$$f'''_\omega(L) = \frac{(n-1)((n-1)^2 - 1)}{4L'_\omega(\alpha)^3} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \quad (3.9)$$

$$f^{(4)}_\omega(L) = \frac{(n-1)^2((n-1)^2 - 1)}{8L'_\omega(\alpha)^5} \left(\frac{1}{2} L_\omega(\alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2} - \frac{4}{n-1} L''_\omega(\alpha) \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \right). \quad (3.10)$$

von f_ω auf I_n^0 , $n \geq 2$ mit $\alpha = \alpha_\omega(L)$ und $\delta = \delta_\omega(L)$.

Lemma 3.1 Sei $\omega \in (0, 2\pi]$. Die Funktion f_ω ist auf jedem offenen Intervall I_n^0 , $n \geq 2$, stetig differenzierbar und auf dem Intervall $[l_1^\omega, l_2^\omega]$ streng konvex. Auf jedem offenen Intervall I_n^0 , $n \geq 3$, gilt:

(i) Es existiert eine eindeutige Nullstelle ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$ von f''_ω mit

$$f''_\omega(L) > 0 \quad \text{für } L \in (l_{n-1}^\omega, {}^1\lambda_n^\omega)$$

$$f''_\omega(L) < 0 \quad \text{für } L \in ({}^1\lambda_n^\omega, l_n^\omega).$$

(ii) Für alle $L \in I_n^0$ ist $f_\omega'''(L) < 0$, $f_\omega^{(4)}(L) < 0$.

Beweis:

Für $n = 2$, also $L \in [l_1^\omega, l_2^\omega]$, folgt die Behauptung aus (3.2) und $\omega \in [0, 2\pi]$. Sei nun $n \geq 3$ und $L \in I_n^0$, also $\alpha \in (\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega) \subseteq (0, \pi)$ und $\delta \in (0, \alpha) \subseteq (0, \pi)$.

Aus (3.6), (3.9) und (3.10) folgen unmittelbar $f_\omega'''(L) < 0$ und $f_\omega^{(4)}(L) < 0$, also die Behauptung (ii). Die Funktion f_ω'' aus (3.8) ist stetig und wegen $f_\omega''' < 0$ streng monoton fallend auf I_n^0 . Mit $l_n^\omega = L_\omega(\alpha_n^\omega)$ erhält man durch jeweils einseitigen Grenzübergang

$$f_\omega''(l_{n-1}^\omega + 0) = \frac{-\sin \frac{\alpha_{n-1}^\omega}{2}}{2(n-1)(\cos \frac{\alpha_{n-1}^\omega}{2} - 1)} > 0$$

und

$$\lim_{L \rightarrow l_n^\omega - 0} f_\omega''(L) = -\infty.$$

Folglich existiert auf I_n^0 eindeutig eine Nullstelle ${}^1\lambda_n^\omega$ von f_ω'' mit $f_\omega'' > 0$ auf $(l_{n-1}^\omega, {}^1\lambda_n^\omega)$ und $f_\omega'' < 0$ auf $({}^1\lambda_n^\omega, l_n^\omega)$. Damit ist auch (i) gezeigt. ■

Zusammen mit Lemma 2.2 besagt dieses Lemma, dass die 'fonction penetrante' f_ω auf $[l_2^\omega, \omega]$ stückweise streng konvex-konkav ist mit Wendepunkten ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$ für $n \geq 3$. Einen Ausschnitt der stückweise streng konkaven ersten Ableitung von f_ω mit jeweils eindeutiger Maximalstelle ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$ für $n \geq 3$ zeigt Abb. 3.2. Den zu ${}^1\lambda_n^\omega$ korrespondierenden charakteristischen Winkel bezeichnen wir mit β_n^ω . Es gilt also

$${}^1\lambda_n^\omega = L_\omega(\beta_n^\omega) = 2(n-1) \sin \frac{\beta_n^\omega}{2} + 2 \sin \frac{\sigma_n^\omega}{2} \quad (3.11)$$

mit entsprechendem Defektwinkel $\sigma_n^\omega = \omega - (n-1)\beta_n^\omega \in (0, \frac{\omega}{n})$.

Es folgen nun eine Reihe asymptotischer Aussagen über die Lage der Wendepunkte und das Anstiegsverhalten von f_ω .

Lemma 3.2 Für hinreichend große n gilt

$$\frac{{}^1\lambda_n^\omega - l_{n-1}^\omega}{l_n^\omega - l_{n-1}^\omega} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Beweis

Es gilt zunächst $\beta_n^\omega \in (\frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n-1})$ und $\sigma_n^\omega \in (0, \beta_n^\omega)$ für den zum Wendepunkt ${}^1\lambda_n^\omega$ gehörenden charakteristischen Winkel und den zugehörigen Defektwinkel aus

(3.11). Wegen $f''_{\omega}(l^{\omega}_n) = 0$ ist $(n-1) \sin \frac{\sigma_n^{\omega}}{2} = \sin \frac{\beta_n^{\omega}}{2}$, also $\sigma_n^{\omega} = O(n^{-2})$. Hieraus erhält man

$$\frac{l^{\omega}_n - l^{\omega}_{n-1}}{l^{\omega}_n - l^{\omega}_{n-1}} = \frac{(n-1) \sin \frac{\beta_n^{\omega}}{2} + \sin \frac{\sigma_n^{\omega}}{2} - (n-1) \sin \frac{\omega}{2(n-1)}}{n \sin \frac{\omega}{2n} + (n-1) \sin \frac{\omega}{2(n-1)}}$$

und unter Beachtung von $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ die Relation

$$\frac{l^{\omega}_n - l^{\omega}_{n-1}}{l^{\omega}_n - l^{\omega}_{n-1}} = \frac{\omega^3 - (n-1)^3(\beta_n^{\omega})^3 + O(n^{-2})}{\omega^3 \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + O(n^{-2})}$$

Mit $\omega = (n-1)\beta_n^{\omega} + \sigma_n^{\omega}$, also $\omega^3 = (n-1)^3(\beta_n^{\omega})^3 + O(n^{-2})$, folgt hieraus die Behauptung. ■

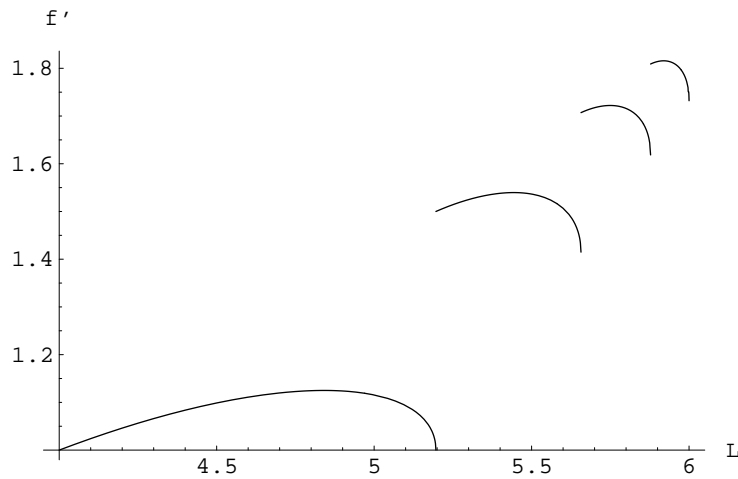


Abbildung 3.2: Ableitung der 'fonction penetrante' für $\omega = 2\pi$

Bei genauerer Betrachtung der Lagebeziehungen zwischen den einzelnen konkaven Teilstücken von f'_{ω} (vgl. Abb.3.2) ergibt sich eine weitere asymptotische Vermutung, die wir genauer untersuchen wollen.

Lemma 3.3 Sei $L \in I_n^0 = (l_{n-1}^{\omega}, l_n^{\omega})$ und $\omega \in [0, 2\pi]$. Dann gilt:

- (i) $f'_{\omega}(L) \leq f'_{\omega}(l_n^{\omega} + 0)$ für alle $n \geq 2$
- (ii) $f'_{\omega}(L) \leq f'_{\omega}(l_{n+1}^{\omega} - 0)$ für $n = 2, 3$
 $f'_{\omega}(l^{\omega}_n) > f'_{\omega}(l_{n+1}^{\omega} - 0)$ für alle $n \geq 7$

- (iii) $f'_\omega(l_{n-1}^\omega + 0) \leq f'_\omega(l_n^\omega - 0)$ für $n = 2, 3$
 $f'_\omega(l_{n-1}^\omega + 0) \geq f'_\omega(l_n^\omega - 0)$ für alle $n \geq 4$.

Beweis:

Wegen $\alpha_\omega(L) \in (\frac{\omega}{2n}, \pi)$ für $L \in I_n^0$ ergibt sich (i) sofort aus (3.1) und (3.4).

Der erste Teil der Aussage (ii) folgt für $n = 2$ unmittelbar aus (3.2) und aus $f'_\omega(l_2^\omega - 0) = 2 \cos \frac{\omega}{4} < 2 \cos \frac{\omega}{6} = f'_\omega(l_3^\omega - 0)$. Für $n \geq 3$ vergleichen wir den Maximalwert $f'_\omega({}^1\lambda_n^\omega)$ von f'_ω auf I_n^0 mit dem einseitigen Grenzwert $f'_\omega(l_{n+1}^\omega - 0)$. Dazu betrachten wir die durch

$$u_n(x) := 2 \cos \frac{x}{2(n+1)} - \cos \frac{\beta(x)}{2} - \cos \frac{x - (n-1)\beta(x)}{2} \quad (3.12)$$

mit $\beta(x) \in (\frac{x}{n}, \frac{x}{n-1})$ aus

$$\sin \frac{\beta(x)}{2} = (n-1) \sin \frac{x - (n-1)\beta(x)}{2} \quad (3.13)$$

implizit auf $[0, 2\pi]$ definierte Funktion u_n mit $u_n(0) = 0$. Die Bedingung (3.13) resultiert aus der Forderung $f''_\omega({}^1\lambda_n^\omega) = 0$ an die Maximalstelle von f'_ω auf I_n^0 . Es gilt dann

$$u'_n(x) = -\frac{1}{n+1} \sin \frac{x}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n-1)} \sin \frac{\beta(x)}{2}. \quad (3.14)$$

Für $n = 3$ und jedes $x \in (0, 2\pi]$ ist $\beta(x) \in (\frac{x}{3}, \pi]$. Hieraus folgt $u'_3(x) > 0$ und wegen $u_n(0) = 0$ auch $u_3(x) > 0$ für jedes $x \in (0, 2\pi]$. Damit gilt der erste Teil von (ii) auch für $n = 3$ und jedes $\omega \in (0, 2\pi]$. Für $n \geq 7$ ist $\frac{x}{2(n+1)} \leq \frac{\pi}{8}$, also

$$\sin \frac{x}{2(n+1)} \geq \frac{8x}{2\pi(n+1)} \sin \frac{\pi}{8}.$$

Wegen $\beta(x) < \frac{x}{n-1}$ folgt dann aus (3.14)

$$u'_n(x) < \frac{x}{4} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{16 \sin \frac{\pi}{8}}{\pi} \right) < 0$$

für alle $n \geq 7$ und $x \in (0, 2\pi]$. Mit $u_n(0) = 0$ ist damit der zweite Teil der Aussage (ii) gezeigt.

Die Aussage (iii) ist für $n = 2$ klar, da f'_ω nach (3.2) auf I_2^0 linear und monoton wachsend ist. Für $n = 3$ gilt

$$\cos \frac{\omega}{4} + 1 - 2 \cos \frac{\omega}{6} < \left(\frac{\omega}{4}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right) < 0, \quad (3.15)$$

also

$$f'_\omega(l_2^\omega + 0) - f'_\omega(l_3^\omega - 0) < 0$$

für jedes $\omega \in (0, 2\pi]$. Sei nun $n \geq 4$. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2(n-1)} + 1 - 2 \cos \frac{\omega}{2n} \geq \\ \left(\frac{\omega}{2(n-1)}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{n-1}{n}\right)^4 \left(\frac{\omega}{2(n-1)}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Die Nichtnegativität der rechten Seite dieser Ungleichung folgt für $\omega \in (0, 2\pi]$ aus $\frac{3}{4} \leq \frac{n-1}{n} < 1$. Damit ist die Aussage (iii) auch für $n \geq 4$ gezeigt. ■

Dieses Lemma impliziert eine „grobe“ Monotonieeigenschaft für die erste Ableitung der 'fonction penetrante'.

Folgerung 3.1 Für jedes $\omega \in [0, 2\pi]$ ist $l_3^\omega - l_2^\omega \geq \omega - l_3^\omega$. Es gilt

$$f'_\omega(L_1) \leq f'_\omega(L_2) \leq f'_\omega(L_3)$$

für alle $L_1 \in (l_1^\omega, l_2^\omega)$, $L_2 \in (l_2^\omega, l_3^\omega)$ und für fast alle $L_3 \in (l_3^\omega, \omega)$.

Beweis:

Sei $\omega \in [0, 2\pi]$. Die Ungleichung $l_3^\omega - l_2^\omega \geq \omega - l_3^\omega$ ist gleichbedeutend mit

$$v(\omega) := 4 \sin \frac{\omega}{4} + \omega - 12 \sin \frac{\omega}{6} \leq 0.$$

Wegen $v(0) = 0$ und $v'(\omega) = \cos \frac{\omega}{4} + 1 - 2 \cos \frac{\omega}{6}$ folgt diese unmittelbar aus (3.15).

Die Aussagen (i) und (ii) für $n = 2, 3$ aus Lemma 3.3 ziehen zusammen mit der stückweisen Konkavität von f'_ω auf I_n^0 , $n \geq 3$, die Relation

$$f'_\omega(L_1) \leq f'_\omega(L_2) \leq f'_\omega(L_3)$$

für alle $L_1 \in I_2^0, L_2 \in I_3^0, L_3 \in I_4^0$ nach sich. Da $f'_\omega(l_3^\omega + 0) \leq f'_\omega(l_n^\omega + 0)$ und $f'_\omega(l_4^\omega - 0) \leq f'_\omega(l_{n+1}^\omega - 0)$ für alle $n \geq 4$ gilt, bleibt diese Ungleichung auch für fast alle $L_3 > l_3^\omega$ gültig. ■

Die folgende asymptotische Aussage über den Sekantenanstieg von f_ω wirkt sich später auf das Verzweigungsverhalten der Lösungsstruktur beim isoperimetrisch–isodiametrischen Problem aus.

Lemma 3.4 Sei $\omega \in [0, 2\pi]$ und $n \geq 7$. Dann gilt

$$\frac{f_\omega(l_n^\omega) - f_\omega(l_{n-1}^\omega)}{l_n^\omega - l_{n-1}^\omega} \leq \frac{f_\omega(L) - f_\omega(l_{n-1}^\omega)}{L - l_{n-1}^\omega}$$

für alle $L \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$.

Beweis:

Da f_ω auf jedem Intervall $[l_{n-1}^\omega, {}^1\lambda_n^\omega]$ streng konvex und auf $[{}^1\lambda_n^\omega, l_n^\omega]$ streng konkav ist sowie $f'_\omega(l_{n-1}^\omega + 0)$ existiert, ist die behauptete Ungleichung äquivalent zu

$$\frac{f_\omega(l_n^\omega) - f_\omega(l_{n-1}^\omega)}{l_n^\omega - l_{n-1}^\omega} \leq f'_\omega(l_{n-1}^\omega + 0). \quad (3.16)$$

Wegen (3.4) und (2.23), (2.24) ist also für $n \geq 7$ und $\omega \in [0, 2\pi]$ die Ungleichung

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{n \sin \frac{\omega}{n} - (n-1) \sin \frac{\omega}{n-1}}{n \sin \frac{\omega}{2n} - (n-1) \sin \frac{\omega}{2(n-1)}} \leq \cos \frac{\omega}{2(n-1)} + 1 \quad (3.17)$$

zu beweisen. Unter Beachtung von $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ zeigen wir für $n \geq 7$ die stärkere Forderung

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{n \sin \frac{\omega}{n} - (n-1) \sin \frac{\omega}{n-1}}{n \sin \frac{\omega}{2n} - (n-1) \sin \frac{\omega}{2(n-1)}} \leq 1 - \frac{1}{16} \left(\frac{\omega}{n-1} \right)^2. \quad (3.18)$$

Wir führen dazu die Funktionen

$$d_n(\omega) := n \sin \frac{\omega}{n} - (n-1) \sin \frac{\omega}{n-1}$$

ein. Auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ erhält man dann für die in Betracht kommenden höheren Ableitungen dieser Funktion die Relationen

$$\begin{aligned} d_n^{(6)}(\omega) &= -\frac{1}{n^5} \sin \frac{\omega}{n} + \frac{1}{(n-1)^5} \sin \frac{\omega}{n-1} > 0 \\ d_n^{(8)}(\omega) &= -\frac{1}{n^7} \sin \frac{\omega}{n} - \frac{1}{(n-1)^7} \sin \frac{\omega}{n-1} < 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{d_n(\omega)}{d_n\left(\frac{\omega}{2}\right)} \leq \frac{\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^3}{3!} - \left(\frac{1}{(n-1)^4} - \frac{1}{n^4}\right) \frac{\omega^5}{5!} + \left(\frac{1}{(n-1)^6} - \frac{1}{n^6}\right) \frac{\omega^7}{7!}}{\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^3}{3!} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(n-1)^4} - \frac{1}{n^4}\right) \frac{\omega^5}{5!}},$$

also

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{d_n(\omega)}{d_n\left(\frac{\omega}{2}\right)} \leq \frac{1 - \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^2}{20} + \left(\frac{1}{(n-1)^4} + \frac{1}{(n-1)^2 n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \frac{\omega^4}{840}}{1 - \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^2}{80}} \quad (3.19)$$

für die linke Seite von (3.18). Eine äquivalente Umformung der rechten Seite von (3.19) führt mit

$$\kappa_n(\omega) := \frac{\frac{3}{5} \left(1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2}\right) \frac{2\omega^2}{105}}{1 - \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^2}{80}}$$

auf die Ungleichung

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{d_n(\omega)}{d_n\left(\frac{\omega}{2}\right)} \leq 1 - \kappa_n(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{16(n-1)^2}. \quad (3.20)$$

Falls $\kappa_n(\omega) \geq 1$ auf $[0, 2\pi]$ für $n \geq 7$ gilt, so ist (3.18) gezeigt. Dies sieht man nun folgendermaßen ein. Wegen

$$1 - \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) \frac{\omega^2}{80} > 0$$

ist $\kappa_n(\omega) \geq 1$ gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\frac{3}{5} \left(1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) - 1 \geq \omega^2 \left(\left(\frac{2}{105} - \frac{1}{80}\right) \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{105} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2} \right).$$

Aus $\frac{6}{7} \leq \frac{n-1}{n} < 1$ folgt nun einerseits

$$\frac{3}{5} \left(1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) - 1 \geq \frac{2}{49} \quad (3.21)$$

und für $\omega \in [0, 2\pi]$ andererseits

$$\omega^2 \left(\left(\frac{2}{105} - \frac{1}{80} \right) \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{105} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{2}{49}. \quad (3.22)$$

Damit ist die Ungleichung (3.18) und folglich die Behauptung gezeigt. ■

Die Aussage dieses Lemmas, dass der Graph der Funktion f_ω auf jedem Intervall $I_n = [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$, $n \geq 7$, stets oberhalb der gesamten Sekante verläuft, ist im folgenden Sinne noch zu verbessern. Und zwar erhält man für $n \geq 6$ eine Abschätzung wie in (3.21), dann jedoch mit der unteren Schranke $\frac{1}{60}$. Die Relation (3.22) ist aber mit dieser Schranke nur noch für $\omega \in [0, \hat{\omega}]$ mit $\hat{\omega} \approx 6.128 < 2\pi$ richtig. Durch obigen Beweis ist also die Aussage von Lemma 3.4 auch für $n \geq 6$, aber dann nur für $\omega \in [0, \hat{\omega}]$ gezeigt. Der für uns in Kapitel 5 interessante Fall $\omega = \frac{\pi}{3}$ ist hierdurch mit erfasst.

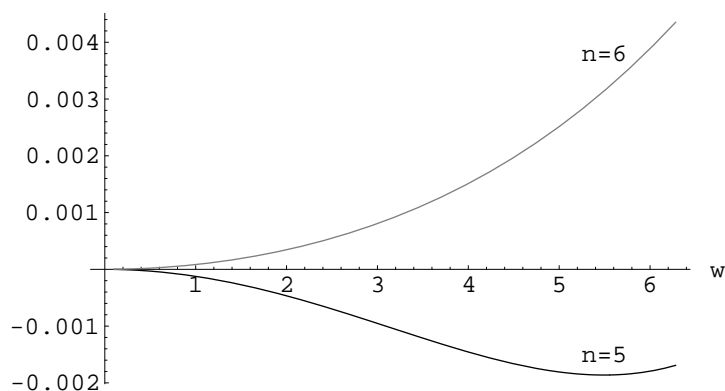


Abbildung 3.3: Sekantenmonotonie–Ungleichung (3.16)

Für $n \leq 5$ gilt obiges Lemma nicht. Diese Tatsache illustriert Abb.3.3, in welcher die Differenz zwischen rechter und linker Seite der Ungleichung (3.16) als Funktion von ω für $n = 5$ bzw. $n = 6$ dargestellt ist. Daraus ist nun andererseits ersichtlich, dass die Aussage von Lemma 3.4 auch im Fall $n \geq 6$ für jedes $\omega \in [0, 2\pi]$ richtig ist.

3.2 Glättung

Für eine konvexe Approximation der 'fonction penetrante' bieten sich die Punkte

$$(l_n^\omega, f_n^\omega) = \left(2n \cdot \sin \frac{\omega}{2n}, \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{\omega}{n} \right), \quad n \geq 2 \quad (3.23)$$

des Graphen von f_ω an. Sie sind in Abb.3.1 markiert und gehören zu regulären Sektorinpolyedern. Wir definieren zunächst für jedes $\omega \in [0, 2\pi]$ und $x \geq 2$ die Funktion

$$g_\omega(x) := \frac{x}{2} \sin \frac{\omega}{x}, \quad (3.24)$$

mit $g_\omega(n) = f_n^\omega$, $2g_\omega(2n) = l_n^\omega$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} 2g_\omega(2x) = \omega$.

Lemma 3.5 Die durch (3.24) auf dem Intervall $[2, \infty)$ definierte Funktion g_ω ist dort stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und streng konkav.

Beweis:

Wegen

$$g'_\omega(x) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\omega}{x} - \frac{\omega}{x} \cdot \cos \frac{\omega}{x} \right), \quad g''_\omega(x) = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{x^3} \cdot \sin \frac{\omega}{x}$$

ist $g''_\omega(x) < 0$ für $(x, \omega) \neq (2, 2\pi)$, also g_ω streng konkav. Aus der Monotonie und dem Grenzwertverhalten von g'_ω für $x \rightarrow \infty$ folgt $g'_\omega > 0$. ■

Die strenge Midpoint-Konkavität von g_ω gemäß

$$\frac{1}{2}(n+1) \sin \frac{\omega}{2(n+1)} + \frac{1}{2}(n-1) \sin \frac{\omega}{2(n-1)} < n \sin \frac{\omega}{2n},$$

beinhaltet die Monotonie

$$l_{n+1}^\omega - l_n^\omega < l_n^\omega - l_{n-1}^\omega \quad (3.25)$$

der Intervalllängen von I_n für alle $n \geq 3$.

Durch $\{(2g_\omega(2x), g_\omega(x))/x \geq 2\}$ ist die Parameterdarstellung einer Kurve gegeben, die durch die Punkte (3.23) des Graphen von f_ω verläuft. Es bietet sich nun folgende Glättung der 'fonction penetrante' an.

Definition 3.1 Die auf dem Intervall $[l_1^\omega, \omega]$ durch

$$\tilde{f}_\omega(L) := \begin{cases} f_\omega(L) & \text{für } L \in [l_1^\omega, l_2^\omega) \\ g_\omega\left(\frac{1}{2}g_\omega^{-1}\left(\frac{L}{2}\right)\right) & \text{für } L \in [l_2^\omega, \omega] \end{cases}$$

definierte Funktion heißt *geglättete 'fonction penetrante'*.

Für den Fall $\omega = 2\pi$ führte FOCKE [35] eine solche Glättung ein. Die Funktion \tilde{f}_ω ist auf $[l_2^\omega, \omega]$ implizit durch

$$\tilde{f}_\omega(L) = g_\omega(x(L)) \quad (3.26)$$

mit $x(L)$ aus

$$L = 2g_\omega(2x) \quad (3.27)$$

gegeben. Speziell gilt $x(l_n^\omega) = n$ für $n \geq 2$.

Lemma 3.6 Die Funktion \tilde{f}_ω ist stetig differenzierbar auf $(l_1^\omega, l_2^\omega) \cup (l_2^\omega, \omega)$, streng monoton wachsend und streng konvex auf $[l_1^\omega, \omega]$.

Beweis:

Aus Lemma 2.2 und Lemma 3.1 folgt die Behauptung für $L \in I_2$.

Für $L \in (l_2^\omega, \omega)$, $\omega > 0$, ist $x(L) > 2$ mit $x(L)$ aus (3.27). Die Monotonie von \tilde{f}_ω folgt aus

$$\tilde{f}'_\omega(L) = \frac{1}{4} \frac{g'_\omega(x(L))}{g'_\omega(2x(L))} > 0$$

unter Beachtung von (3.26) und Lemma 3.5.

Wir untersuchen nun das Vorzeichen von

$$\tilde{f}''_\omega(L) = \frac{1}{16} \frac{g''_\omega(x(L)) \cdot g'_\omega(2x(L)) - 2g'_\omega(x(L)) \cdot g''_\omega(2x(L))}{g'_\omega(2x(L))^3}.$$

Mit der Hilfsfunktion

$$q_\omega(x) := \frac{g'_\omega(x)}{g''_\omega(x)} = \frac{x^2}{\omega} \left(\cot \frac{\omega}{x} - \frac{x}{\omega} \right),$$

die auf $(2, \infty)$ definiert ist, ergibt sich die Darstellung

$$\tilde{f}''_\omega(L) = \frac{1}{16} \frac{q_\omega(2x(L)) - 2q_\omega(x(L))}{g'_\omega(x(L))^3 \cdot g''_\omega(x(L)) \cdot g''_\omega(2x(L))}. \quad (3.28)$$

Als weitere Hilfsfunktion betrachten wir

$$u(y) := 3y - 3 \tan y + y \tan^2 y$$

für $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wegen $u(0) = 0$ und

$$u'(y) = \frac{\sin y}{\cos^3 y} (2y - \sin 2y) > 0$$

ist $u(y) > 0$ für $y \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Dies ist auf dem offenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ äquivalent zu

$$2 \cot y > \frac{3}{2y} + \cot 2y. \quad (3.29)$$

Für $x > 2$ und $\omega \in (0, 2\pi]$ ist $y = \frac{\omega}{2x} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Aus der Ungleichung (3.29) ergibt sich damit

$$-\frac{4x}{\omega} + 2 \cot \frac{\omega}{2x} > -\frac{x}{\omega} + \cot \frac{\omega}{x}$$

und letztendlich

$$q_\omega(2x) > 2q_\omega(x).$$

Aus (3.28) und Lemma 3.5 folgt hieraus $\tilde{f}_\omega'' > 0$ auf (l_2^ω, ω) .

Nun ist noch die Konvexität von \tilde{f}_ω auf dem gesamten Intervall $[l_1^\omega, \omega]$ zu zeigen, also

$$\tilde{f}_\omega'(l_2^\omega - 0) < \tilde{f}_\omega'(l_2^\omega + 0) \quad (3.30)$$

nachzuweisen. Für $L \rightarrow l_2^\omega + 0$ gilt $x(L) \rightarrow 2$. Es ist also

$$\tilde{f}_\omega'(l_2^\omega + 0) = \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{4} - \frac{\omega}{4} \cos \frac{\omega}{4}}.$$

Wegen $\tilde{f}_\omega'(l_2^\omega - 0) = 2 \cos \frac{\omega}{4}$ und $g'_\omega(4) > 0$ ist (3.30) gleichbedeutend mit

$$3 \sin \frac{\omega}{2} < \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} + \omega$$

für $\omega \in [0, 2\pi]$. Diese Ungleichung folgt aus der strengen Monotonie der Funktion $v(x) := 2x + x \cos x - 3 \sin x$ auf $[0, \pi]$. Damit ist die strenge Konvexität von \tilde{f}_ω auf $[l_1^\omega, \omega]$ bewiesen. ■

Für den Nachweis, dass die Funktion \tilde{f}_ω konvexe untere Einhüllende der 'fonction penetrante' f_ω ist, betrachtete FOCKE [35] das verallgemeinerte Favard'sche Problem auch für mehrfach umschlungene Sektorinpolyeder. Sein Beweis läßt sich auf den allgemeinen Fall $\omega \in (0, 2\pi]$ übertragen.

Satz 3.1 Die geglättete 'fonction penetrante' ist eine konvexe untere Einhüllende der 'fonction penetrante' gemäß

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\omega(L) &\leq f_\omega(L) \quad \text{für alle } L \in [l_1^\omega, \omega] \\ \tilde{f}_\omega(l_n^\omega) &= f_\omega(l_n^\omega) \quad \text{für alle } n \geq 1.\end{aligned}$$

Beweis:

Die Gleichheit der Funktionswerte für $L = l_n^\omega$, $n \geq 1$, resultiert aus der Definition von \tilde{f}_ω sowie aus (3.23) und (3.24).

Auf $[l_1^\omega, l_2^\omega]$ stimmen \tilde{f}_ω und f_ω überein. Um die Funktionswerte von \tilde{f}_ω und f_ω auf (l_2^ω, ω) zu vergleichen, wird zunächst die Funktion \tilde{f}_ω für solche L mit rationalen Werten von $x(L)$ betrachtet. Sei also $x(L) = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $p > 2q > 0$. Aus (3.24) und (3.27) ergibt sich dann

$$L = 2\frac{p}{q} \sin \frac{q\omega}{2p}. \quad (3.31)$$

Die Lösung des verallgemeinerten Favard–Problems $(P^{q\omega, qL})$ für mehrfach umschlungene Sektorinpolyeder $P_{q\omega}$ eines Einheitskreissektors mit Sektorwinkel $q\omega$, Länge $\mathcal{L}_\omega(P_{q\omega}) = qL$ des Randpolygons $p_{q\omega}$ und L gemäß (3.31) ist dann nach Satz 2.2 eindeutig durch ein fastreguläres mehrfach umschlungenes Sektorinpolyeder gegeben. Nun ist aber (φ, q) mit $\varphi_i = \frac{q\omega}{p}$, $i = 1, \dots, n$, eine zulässige Lösung dieses Problems. Sie gehört zu einem regulären mehrfach umschlungenen Sektorinpolyeder und ist folglich optimal. Als Minimalwert erhält man

$$\begin{aligned}f_{q\omega}(L) &= p \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{q\omega}{p} \\ &= q \cdot \frac{1}{2} x(L) \cdot \sin \frac{\omega}{x(L)} = q \cdot \tilde{f}_\omega(L).\end{aligned} \quad (3.32)$$

Andererseits betrachten wir das eindeutig bestimmte fastreguläre Lösungspolyeder des verallgemeinerten Favard–Problems $(P^{\omega, L})$. Das aus diesem Polyeder q -fach zusammengesetzte mehrfach umschlungene Sektorinpolyeder führt ebenfalls auf eine zulässige Lösung der Aufgabe $(P^{q\omega, qL})$, und zwar mit Zielfunktionswert $q \cdot f_\omega(L)$. Aus (3.32) folgt damit

$$\tilde{f}_\omega(L) \leq f_\omega(L)$$

für solche L mit rationalen Werten von $x(L)$. Da \tilde{f}_ω und f_ω stetig sind und die Parameterwerte L aus (3.31) dicht in $[l_2^\omega, \omega]$ liegen, ist die Behauptung für alle $L \in [l_2^\omega, \omega]$ richtig. ■

3.3 Konvexitätsdefekte

Wir betrachten nun eine Klasse von Funktionen mit konvex–konkaver Struktur.

Definition 3.2 Eine Funktion $f \in C^2(0, 1)$ heißt streng konvex–konkav auf $[0, 1]$, falls sie einen eindeutigen Wendepunkt $\xi_1 \in (0, 1)$ mit $f''(x) > 0$ für $x < \xi_1$ und $f''(x) < 0$ für $x > \xi_1$ besitzt.

Nach Lemma 3.1 ist die 'fonction penetrante' f_ω auf jedem Intervall I_n , $n \geq 3$, eine streng konvex–konkave Funktion mit Wendepunkt ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$. Benutzt man die Skalierung

$$L(x) := l_{n-1}^\omega + x(l_n^\omega - l_{n-1}^\omega), \quad x \in [0, 1], \quad (3.33)$$

so ist die Funktion f mit $f(x) := f_\omega(L(x))$ auf $[0, 1]$ definiert und ${}^1\lambda_n^\omega = L(\xi_1)$. Weitere Beispiele für streng konvex–konkave Funktionen wurden in [84] untersucht. Wir führen nun geeignete Maße für den Konvexitätsdefekt solcher Funktionen ein.

Definition 3.3 Sei $\mu \in (0, 1)$. Die auf $[0, 1]$ definierte Funktion

$${}^\mu\varphi_f(x) := \begin{cases} (1 - \mu)f(0) + \mu f\left(\frac{1}{\mu}x\right) - f(x) & \text{für } x < \mu \\ \mu f(1) + (1 - \mu)f\left(\frac{x - \mu}{1 - \mu}\right) - f(x) & \text{für } x \geq \mu \end{cases}$$

heißt μ -point–Konvexitätsdefektfunktion von f .

Für $\mu = \frac{1}{2}$ wurde eine solche Konvexitätsdefektfunktion von FOCKE in [37] eingeführt. In diesem Fall nennen wir die Funktion $\frac{1}{2}\varphi_f$ Midpoint–Konvexitätsdefektfunktion.

Die Konvexität einer Funktion ist äquivalent zur Nichtnegativität jeder solchen Defektfunktion. Andernfalls treten Vorzeichenwechsel auf.

Lemma 3.7 Sei f eine auf $[0, 1]$ streng konvex–konkave Funktion. Dann besitzt jede Defektfunktion ${}^\mu\varphi_f$ eine eindeutige Nullstelle $\xi(\mu) \in (0, 1)$ mit ${}^\mu\varphi_f > 0$ auf $(0, \xi(\mu))$ und

- a) $\xi(\mu) \in (\mu\xi_1, \mu)$, falls ${}^\mu\varphi_f(\mu) \leq 0$ gilt,
- b) $\xi(\mu) \in (\mu, \xi_1 + \mu(1 - \xi_1))$ sonst.

Beweis:

Sei $x \in (0, \mu]$. Für $x \in (0, \mu\xi_1)$ gilt dann

$${}^\mu\varphi'_f(x) = f'\left(\frac{1}{\mu}x\right) - f'(x) > 0,$$

da f' auf $(0, \xi_1)$ streng monoton wachsend ist. Mit ${}^\mu\varphi_f(0) = 0$ folgt hieraus ${}^\mu\varphi_f(x) > 0$ auf $(0, \mu\xi_1)$. Für $x \in (\mu\xi_1, \xi_1)$ gilt $f''\left(\frac{1}{\mu}x\right) < 0$ und $f''(x) > 0$, also ${}^\mu\varphi''_f(x) < 0$. Damit ist ${}^\mu\varphi_f$ auf $(\mu\xi_1, \xi_1)$ streng konkav. Im Fall $\xi_1 \leq \mu$ ist ${}^\mu\varphi_f$ auf $[\xi_1, \mu]$ streng monoton fallend, da $f'\left(\frac{1}{\mu}x\right) < f'(x)$ wegen $f''(x) < 0$ auf $(\xi_1, 1)$ gilt. Ist ${}^\mu\varphi_f(\mu) \leq 0$, so folgt hieraus die Existenz einer eindeutigen Nullstelle $\xi(\mu) \in (\mu\xi_1, \mu)$ von ${}^\mu\varphi_f$. Andernfalls ist ${}^\mu\varphi_f > 0$ auf $(0, \mu]$.

Sei nun $x \in [\mu, 1)$. Die Zentralspiegelung $g(y) = -f(1 - y)$ von f ist ebenfalls eine auf $[0, 1]$ streng konvex-konkave Funktion mit dem eindeutigen Wendepunkt $\eta_1 = 1 - \xi_1$. Wegen

$${}^{1-\mu}\varphi_g(y) = -{}^\mu\varphi_f(1 - y)$$

ist dieser Fall für $y = 1 - x \in (0, 1 - \mu)$ auf den ersten Fall zurückführbar. Für ${}^\mu\varphi_f(\mu) > 0$ folgt hieraus die eindeutige Existenz einer Nullstelle $\xi(\mu) \in (\mu, \xi_1 + \mu(1 - \xi_1))$. ■

Ergänzend zum Beweis ist noch anzumerken, dass die Konvexitätsdefektfunktion ${}^\mu\varphi_f$ wegen ${}^\mu\varphi''_f(\xi_1) = \frac{1}{\mu}f''\left(\frac{1}{\mu}\xi_1\right) < 0$ auch in einer rechtsseitigen Umgebung von ξ_1 streng konkav ist. Im Fall $\mu = \frac{1}{m}$, $m \geq 2$, wählen wir für die Nullstelle der Konvexitätsdefektfunktion $\frac{1}{m}\varphi_f$ die Bezeichnung

$$\xi_m := \xi\left(\frac{1}{m}\right).$$

Den Konvexitätsdefekt der 'fonction penetrante' f_ω beschreiben wir jeweils auf einem Intervall I_n , $n \geq 3$, durch die Funktionen

$${}^mD_\omega^n(\Lambda) := m \cdot \frac{1}{m}\varphi_f(x(\Lambda)), \quad m \geq 2. \quad (3.34)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen f und f_ω entsprechend der Skalierung (3.33) mit

$$x(\Lambda) = \frac{\Lambda - l_{n-1}^\omega}{l_n^\omega - l_{n-1}^\omega}$$

ergibt sich die Darstellung

$${}^m D_\omega^n(\Lambda) = \begin{cases} (m-1)f_\omega(l_{n-1}^\omega) + f_\omega(m\Lambda - (m-1)l_{n-1}^\omega) - m f_\omega(\Lambda) \\ \text{für } \Lambda \in {}^m I_n^- \\ f_\omega(l_n^\omega) + (m-1)f_\omega\left(\frac{m\Lambda - l_n^\omega}{m-1}\right) - m f_\omega(\Lambda) \\ \text{für } \Lambda \in {}^m I_n^+ \end{cases} \quad (3.35)$$

mit entsprechenden Intervallen

$$\begin{aligned} {}^m I_n^- &:= (l_{n-1}^\omega, \frac{1}{m}l_n^\omega + (1 - \frac{1}{m})l_{n-1}^\omega] \\ {}^m I_n^+ &:= (\frac{1}{m}l_n^\omega + (1 - \frac{1}{m})l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nach Lemma 3.7 besitzt jede solche Funktion ${}^m D_\omega^n$ genau eine Nullstelle auf I_n^0 , $n \geq 2$, die wir mit

$${}^m \lambda_n^\omega := l_{n-1}^\omega + \xi_m \cdot (l_n^\omega - l_{n-1}^\omega). \quad (3.37)$$

bezeichnen. Mit Hilfe dieser Defektfunktionen und deren Nullstellen kann die Lösungsstruktur der Aufteilungsprobleme in Kapitel 4 und 5 vollständig beschrieben werden.

3.4 Grobkonvexität

Abschwächungen und Modifikationen des klassischen Konvexitätskonzepts gibt es heute zahlreiche. Das *Prinzip der verallgemeinerten Sekanten*, definiert durch eine geeignete Funktionenklasse \mathcal{F} , beruht auf einer Idee von BECKENBACH [6]. Eine Funktion g heißt danach *\mathcal{F} -konvex*, falls der Graph von g unterhalb einer entsprechenden verallgemeinerten Sekante aus \mathcal{F} liegt. Durch passende Zusatzvoraussetzungen an die Klasse \mathcal{F} erhält man für solche Funktionen Charakterisierungen 1. Ordnung mittels *verallgemeinerter Tangenten*. Zusammenstellungen von Klassifikationsprinzipien und Anwendungen modifizierter Konvexitätsbegriffe wie z. B. der Quasikonvexität, der Pseudokonvexität und der Polykonvexität findet man u. a. bei ROBERTS und VARBERG [108], HARTWIG [49], MORREY [99] sowie SCHAIBLE und ZIEMBA [112].

Zum Begriff der *Grobkonvexität* gelangt man, wenn man die für g charakteristische Konvexitätseigenschaft nur über Intervallen einer Mindestlänge $r > 0$ fordert. Dies bedeutet, dass gewisse Störungen der Konvexität in hinreichend kleinen

Intervallen zugelassen werden. Die Zahl r bezeichnet man dann als *Grobheitsgrad*. Verschiedene Konzepte zur Grobkonvexität haben PHU [103] und HARTWIG [51] analysiert und verglichen. KLÖTZLER [74] wurde zu seiner Begriffsbildung der Grobkonvexität durch seine Untersuchungen im Zusammenhang mit der 'fonction penetrante', deren Graph zu einer konvexen Funktion zu gehören scheint (siehe Abb.3.1), angeregt.

Wir betrachten hier reellwertige Funktionen f , die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind.

Definition 3.4 Die Funktion f heißt ρ -konvex (im Sinne von Klötzler) mit dem Grobheitsgrad $r_\rho > 0$, falls die Relation

$$f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$ und für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $|t_1 - t_2| \geq r_\rho$ gilt.

Entsprechend lässt sich die Grobkonvexität von Mengen einführen. Eigenschaften solcher Funktionen und Mengen wurden in [117] untersucht. HARTWIG bewies in [50], dass es eine geeignete Funktionenklasse \mathcal{F} gibt, mit der die ρ -konvexen Funktionen auch \mathcal{F} -konvex sind. Die analytischen Eigenschaften ρ -konvexer Funktionen ergeben sich dann aus diesem allgemeinen Kontext.

PHU [102, 104] führte einen Grobkonvexitätsbegriff ein, der auf „grober Sekantenmonotonie“ beruht.

Definition 3.5 Die Funktion f heißt γ -konvex (im Sinne von Phu) mit dem Grobheitsgrad $r_\gamma > 0$, falls

$$f(t_2) - f(t_1) \leq f(t_2 + r_\gamma) - f(t_1 + r_\gamma)$$

für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 + \gamma, t_2 + \gamma \in I$ gilt.

Jede Funktion von beschränkter Variation ist nach [102] als Differenz zweier γ -konvexer Funktionen darstellbar. Für eine absolutstetige Funktion f ist die γ -Konvexität äquivalent zur *groben Monotonie* der 1. Ableitung dieser Funktion gemäß

$$f'(t) \leq f'(t + r_\gamma) \tag{3.38}$$

für fast alle $t \in I$ mit $t + r_\gamma \in I$. In [51] und [103] wurden Relationen zwischen verschiedenen Grobkonvexitätskonzepten diskutiert. Demnach zieht die ρ -Konvexität die γ -Konvexität mit $r_\rho \leq r_\gamma$ nach sich. Wir untersuchen nun schließlich die 'fonction penetrante' f_ω auf Grobkonvexität.

Satz 3.2 Sei $\omega \in (0, 2\pi]$. Die Funktion f_ω ist γ -konvex auf $I = [l_1^\omega, \omega]$ mit dem Grobheitsgrad $r_\gamma \geq l_3^\omega - l_2^\omega$.

Beweis:

Nach Folgerung 3.1 gilt

$$f'_\omega(L_1) \leq f'_\omega(L_2) \leq f'_\omega(L_3) \quad (3.39)$$

für fast alle $L_1 \in I_2^0$, $L_2 \in I_3^0$, $L_3 \in (l_3^\omega, \omega)$. Sei nun $r_\gamma \geq l_3^\omega - l_2^\omega$. Nach Folgerung 3.1 gilt $l_3^\omega - l_2^\omega \geq \omega - l_3^\omega$. Damit ist $t + r_\gamma \in I_2 \cup I_3$ für $t \in I_2^0$, so dass (3.38) aus (3.39) und der Monotonie von f'_ω auf I_2^0 (vgl. (3.2)) folgt. Für $t \in (l_2^\omega, l_2^\omega + \omega - l_3^\omega) \subset I_3^0$ ist $t + r_\gamma \in (l_3^0, \omega)$, also (3.38) gleichbedeutend mit (3.39). Für $t \in (l_3^\omega, \omega)$ ist $t + r_\gamma \notin I$. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Aus der γ -Konvexität folgt i.A. nicht die ρ -Konvexität.

Kapitel 4

Aufteilungsprobleme

Auf der Suche nach Lösungen des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems ($\underline{P}_{F,\{L,D\}}$) gelangt man zu einem Umfangsaufteilungsproblem, dessen spezielle Struktur es ermöglicht, die globale Minimallösung in Abhängigkeit vom Gesamtumfang zu beschreiben. Hierfür sind Konvexitätsverhalten und analytische Eigenschaften der 'fonction penetrante' verantwortlich.

Im folgenden Kapitel studieren wir eine allgemeine Klasse nichtkonvexer Ressourcenzuteilungs- (allocation problems) oder auch Aufteilungsprobleme (partitioning problems) unter solchen Voraussetzungen, welche eine Anwendung auf die Umfangsaufteilung von m -Tupeln fastregulärer Sektorinpolyeder bei zu minimierendem Gesamtflächeninhalt gestatten. Dabei orientieren wir uns an den Eigenschaften der 'fonction penetrante'. Unter entsprechenden Zusatzvoraussetzungen an die Zielfunktion lässt sich die globale Minimallösung des Aufteilungsproblems in Abhängigkeit vom Verkettungsparameter bestimmen. Als Besonderheit erweist sich eine Verzweigung zwischen symmetrischen und nichtsymmetrischen Lösungsstrukturen, die durch entsprechende Umschlagsparameter vermittelt wird. Grundlage für die Untersuchungen sind die Arbeiten [80] und [81].

4.1 Grundaufgabe

Sei f eine auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte, hinreichend glatte reelle Bewertungsfunktion, $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, ${}^m\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ein *Aufteilungsvektor* und $c \in [0, 1]$ ein *Kopplungsparameter*. Wir betrachten dann das folgende nichtlineare Aufteilungsproblem:

$$\begin{aligned} ({}^m\text{Q}^c) : \quad & {}^mF({}^m\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m f(x_i) \rightarrow \text{Min!} \\ & \sum_{i=1}^m x_i = m \cdot c \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Gesamtbewertung mF invariant in Bezug auf Permutationen der Variablen. Jede zulässige Lösung ${}^m\mathbf{x}$ der Aufgabe $({}^m\text{Q}^c)$ nennen wir *Aufteilung* des Gesamtressourcenaufkommens $m \cdot c$. Mit ${}^m\mathbf{x}^*$ bezeichnen wir eine globale Minimalstelle dieser Aufgabe. Die *symmetrische Aufteilung* (bzw. *symmetrische Lösung*)

$${}^m\mathbf{x}^\sigma := (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^m$$

ist stets eine stationäre Lösung des Problems. Falls die Funktion f konvex ist, dann ist ${}^m\mathbf{x}^\sigma$ globales Minimum.

Bei ökonomischen Fragestellungen dieser Art geht es darum, eine wertvolle Ressource auf konkurrierenden Bedarf aufzuteilen. Man bezeichnet solche Probleme dann auch als Ressourcen-Zuteilungsprobleme. Als Besonderheiten treten Zusatzrestriktionen, quasikonvexe Funktionen f und Diskretheitsforderungen an die Variablen wie etwa in [59] auf. Beispiele für Aufteilungsprobleme, die aus geometrischen Ungleichungen resultieren, werden z.B. in [93] im Zusammenhang mit der Untersuchung Schur-konvexer Funktionen angeführt.

Ein klassisches Beispiel für ein Problem vom Typ $({}^m\text{Q}^c)$, welches häufig im Zusammenhang mit Phänomenen der Symmetriebrechung zitiert wird, bezieht sich auf ein physikalisches Experiment von BOYS [17] mit Seifenblasen. In Anlehnung an dieses Experiment wird von WENTE [126] (vgl. auch [25]) das folgende Gedankenexperiment untersucht. Man führe durch ein Röhrchen mit m gleichartigen kreisförmigen Öffnungen eine kleine Menge Flüssigkeit. Unter gravitationsfreien Bedingungen bilden sich an den Öffnungen kugelkappenförmige Tropfen. Die Konfiguration, die der Gleichgewichtssituation entspricht, ist Lösung eines Volumenaufteilungsproblems, bei dem die Gesamtoberfläche unter Vorgabe des Gesamtvolumens zu minimieren ist. Die Funktion f ist hier streng konvex-konkav.

Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Oberfläche einer Kugelkappe und deren Volumen. In Abhängigkeit vom Gesamtvolumen tritt eine Verzweigung zwischen symmetrischer und nichtsymmetrischer Lösungsstruktur auf. Es gibt Konfigurationen mit m gleichen als auch solche mit unterschiedlich großen Tropfen. Diese Aufgabe wurde als Aufteilungsproblem in [84] und [127] diskutiert.

Im Zusammenhang mit einem Umfangsaufteilungsproblem für m -Tupel von Sektorinpolyedern studieren wir hier das Lösungsverhalten des Problems $({}^mQ^c)$ mit gewissen streng konvex-konkaven Bewertungsfunktionen f . Bezeichnet dabei ξ_1 den eindeutig bestimmten Wendepunkt von f auf $[0, 1]$ mit $f''(x) > 0$ für $x < \xi_1$ und $f''(x) < 0$ für $x > \xi_1$ (vgl. Abschnitt 3.3.), so bleibt offensichtlich die symmetrische Lösung für $c < \xi_1$ lokales Minimum von mF . Gesucht ist das globale Minimum dieser Aufgabe und dessen Struktur in Abhängigkeit vom Kopplungsparameter c .

Wir führen nun einige nützliche Bezeichnungen für das Problem $({}^mQ^c)$, $m \geq 3$, ein. Eine Indexmenge

$$I_k := \{i_1, \dots, i_k\}$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ und $k \in \{2, \dots, m-1\}$ nennen wir *Auswahl der Länge k* aus $\{1, \dots, m\}$. Der Teilvektor

$${}^m\mathbf{x}_{I_k} := (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$$

der zulässigen Lösung ${}^m\mathbf{x}$ heißt *partielle Lösung bez. ${}^m\mathbf{x}$ zur Auswahl I_k* . Diese partielle Lösung ist zulässige Lösung des Teilproblems $({}^kQ^{c_{I_k}})$ mit dem Problemparameter

$$c_{I_k} := \frac{1}{k} \sum_{i \in I_k} x_i.$$

Schließlich bezeichnen wir mit

$${}^m\mathbf{e}_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

den i -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^m . Es ist dann

$${}^mF({}^m\mathbf{x}) = {}^kF({}^m\mathbf{x}_{I_k}) + \sum_{i \notin I_k} f(x_i).$$

Die hierarchische Struktur der Aufgabe $({}^mQ^c)$ spiegelt sich nun in folgender notwendigen Optimalitätsbedingung wider.

Lemma 4.1 Seien ${}^m\mathbf{x}^*$ eine Optimallösung des Problems $({}^mQ^c)$ mit $m \geq 3$, I_k mit $k \in \{2, \dots, m-1\}$ eine beliebige Auswahl der Länge k aus $\{1, \dots, m\}$ und $c_{I_k} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I_k} x_i^*$. Dann ist ${}^m\mathbf{x}_{I_k}^*$ Optimallösung des Teilproblems $({}^kQ^{c_{I_k}})$.

Beweis

Zu einer beliebigen zulässigen Lösung ${}^k\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ des Teilproblems $({}^kQ^{c_{I_k}})$ ist ${}^m\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $y_i = x_i^*$ für $i \notin I_k$ und ${}^m\mathbf{y}_{I_k} = {}^k\mathbf{x}$ eine zulässige Lösung des Problems $({}^mQ^c)$. Aus ${}^mF({}^m\mathbf{x}^*) \leq {}^mF({}^m\mathbf{y})$ folgt ${}^kF({}^m\mathbf{x}_{I_k}^*) \leq {}^kF({}^m\mathbf{y}_{I_k})$, also die Behauptung. ■

Damit ist eine induktive Vorgehensweise zur Untersuchung der Aufteilungsprobleme $({}^mQ^c)$ gerechtfertigt.

4.2 Paar-Aufteilungsproblem

Das Problem $({}^mQ^c)$ kann für $m = 2$ in der Form

$$(Q_c) : \quad F_c(x) := f(x) + f(2c - x) \rightarrow \text{Min!}_{x \in I}$$

mit $I := [0, 1] \cap [2c - 1, 2c]$ formuliert werden. Die Funktion F_c ist bez. $x = c$ symmetrisch, $f \in \mathcal{C}^2[0, 1]$ wird als streng konvex–konkav vorausgesetzt. Dann ist $x = c$ für $c < \xi_1$ ein strenges lokales Minimum und für $c > \xi_1$ ein strenges lokales Maximum von F_c auf I . Wegen der Symmetrie von F_c genügt es, weitere stationäre Punkte nur auf dem offenen Teilintervall $I_-^0 := (\text{Max}\{0, 2c - 1\}, c) \subset I^0 := (0, 1) \cap (2c - 1, 2c)$ zu suchen.

Für Parameterwerte $c > \xi_1$ kann die Funktion F_c auf dem Intervall $[0, \xi_1]$ als Differenz zweier konvexer Funktionen dargestellt werden. Solche Funktionen bilden einen Vektorraum, der im Raum der stetigen Funktionen dicht liegt (vgl. etwa [94]). Nun ist aber jede Funktion mit Lipschitz–stetiger erster Ableitung als Differenz zweier konvexer Funktionen darstellbar (siehe z.B. [1]). Wir schränken deshalb die Klasse der zu betrachtenden konvex–konkaven Funktionen f durch Zusatzvoraussetzungen ein. Dadurch lässt sich die Anzahl der stationären Punkte von F_c begrenzen.

Lemma 4.2 Seien f eine streng konvex–konkave Funktion auf $[0, 1]$ mit Wendepunkt ξ_1 und $x \in I^0$ ein stationärer Punkt von F_c . Dann gilt:

(i) $x < \text{Min}\{\xi_1, 2c - \xi_1\}$ für $x \in I_-^0$

(ii) $x = c$ für $c \leq \frac{\xi_1}{2}$

Ist zusätzlich $f \in \mathbb{C}^4(0, 1)$ mit $f^{(3)}, f^{(4)} < 0$ auf I^0 erfüllt, so gilt:

(iii) $x = c$ ist für $c < \xi_1$ einzige lokale Minimalstelle von F_c auf I^0

(iv) $x = c$ ist für $c \geq \xi_1$ einzige lokale Maximalstelle von F_c auf I^0 .

Beweis

Für eine stationäre Lösung $x \in I^0$ ist $F'_c(x) = 0$. Da ξ_1 eindeutige Maximalstelle von f' auf I_0 ist, folgt $x < \xi_1$ und $2c - x > \xi_1$ aus $f'(x) = f'(2c - x)$ für $x \in I^0$. Im Fall $c \leq \frac{\xi_1}{2}$ gilt stets $2c - x \leq \xi_1$. Folglich ist $F'_c(x) = 0$ nur für $x = c$ erfüllt. Damit sind (i) und (ii) gezeigt.

Sei nun zusätzlich $f \in \mathbb{C}^4(0, 1)$ mit $f^{(3)}, f^{(4)} < 0$. Dann gibt es kein $x \in I^0$, welches der notwendigen Minimalitätsbedingung

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(2c - x) &= 0 \\ f''(x) - f''(2c - x) &\geq 0 \end{aligned}$$

genügt. Es gilt also die Implikation

$$f'(x) = f'(2c - x) \implies f''(x) + f''(2c - x) < 0 \quad (4.1)$$

für alle $x \in I^0$ mit $x < \text{Min}\{\xi_1, 2c - \xi_1\}$. Um dies zu zeigen, folgen wir dem entsprechenden Beweis von FOCKE in [36]. Für eine streng konvex-konkave Funktion f ist (4.1) äquivalent zu

$$f'(x) = f'(2c - x) \implies 0 < f''(x) < |f''(2c - x)|$$

bzw. zu

$$f'(x) - f'(\xi_1) = f'(2c - x) - f'(\xi_1) \implies 0 < f''^2(x) < f''^2(2c - x). \quad (4.2)$$

Falls mit geeignetem Multiplikator λ die Ungleichung

$$\lambda(f'(x) - f'(\xi_1)) + f''^2(x) < \lambda(f'(2c - x) - f'(\xi_1)) + f''^2(2c - x) \quad (4.3)$$

für ein $x \in I^0$ mit $x < \text{Min}\{\xi_1, 2c - \xi_1\}$ erfüllt ist, dann gilt für diese x die Implikation (4.2). Wir beweisen dazu die schärfere Ungleichung

$$\lambda(f'(x) - f'(\xi_1)) + f''^2(x) < 0 < \lambda(f'(2c - x) - f'(\xi_1)) + f''^2(2c - x). \quad (4.4)$$

Für den speziellen Wert $\lambda = -2f^{(3)}(\xi_1)$ betrachten wir auf $[0, 1]$ die Funktion

$$q(x) := \lambda(f'(x) - f'(\xi_1)) + f''^2(x) .$$

Für $q'(x) = (\lambda + 2f^{(3)}(x))f''(x)$ ergibt sich aus dem Mittelwertsatz mit Bezugspunkt $x = \xi_1$ die Darstellung

$$q'(x) = 2(x - \xi_1)^2 f^{(4)}(\tilde{x}) \cdot f^{(3)}(\hat{x})$$

mit gewissen $\tilde{x}, \hat{x} \in (x, \xi_1)$. Nach Voraussetzung ist dann $q'(x) > 0$ für alle $x \in I^0$. Aus $q(\xi_1) = 0$ folgt die Ungleichung (4.4). Es gibt also kein lokales Minimum von F_c auf I_-^0 . Für $c < \xi_1$ ist $x = c$ einziges lokales Minimum von F_c auf I^0 .

Im Fall $c > \xi_1$ ist $x = c$ wegen $f'' < 0$ auf $(\xi_1, 1)$ ein strenges lokales Maximum von F_c auf I^0 . Da F_c kein lokales Minimum auf I_-^0 besitzt, ist dies die einzige Maximalstelle von F_c auf I^0 . Für $c = \xi_1$ folgt diese Aussage aus $f''(\xi_1) = 0$ und $f^{(4)}(\xi_1) < 0$. Damit sind auch (iii) und (iv) gezeigt. ■

Aus diesem Lemma ergeben sich nun unter den Voraussetzungen aus (iii) und (iv) an f die folgenden Aussagen über eine Lösung x^* des Problems (Q_c) :

$$x^* \begin{cases} = c & \text{für } 0 \leq c \leq \frac{\xi_1}{2} \\ \in \{c, \text{Max}\{0, 2c - 1\}\} & \text{für } \frac{\xi_1}{2} < c < \xi_1 \\ = \text{Max}\{0, 2c - 1\} & \text{für } c \geq \xi_1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Dies bedeutet, dass für Parameterwerte $c \in (\frac{\xi_1}{2}, \xi_1)$ die globale Minimallösung noch aus dem Vergleich von stationärer und Randlösung zu bestimmen ist. Die Umschlagsstelle zwischen beiden Lösungstypen lässt sich mit Hilfe der Midpoint-Konvexitätsdefektfunktion $\frac{1}{2}\varphi_f$ von f aus Kapitel 3 ermitteln.

Satz 4.1 Sei die Funktion $f \in \mathbb{C}^4(0, 1)$ streng konvex-konkav mit $f^{(3)}, f^{(4)} < 0$. Dann gilt für die Nullstelle ξ_2 der Konvexitätsdefektfunktion $\frac{1}{2}\varphi_f$ die Relation $\xi_2 \in (\frac{\xi_1}{2}, \xi_1)$. Die globale Minimallösung ${}^2\mathbf{x}^*$ des Problems $({}^2Q^c)$ ist gegeben durch

$${}^2\mathbf{x}^* = \begin{cases} (c, c) & \text{für } 0 \leq c \leq \xi_2 \\ (0, 2c) & \text{für } \xi_2 \leq c \leq \frac{1}{2} \\ (2c - 1, 1) & \text{für } \text{Max}\{\xi_2, \frac{1}{2}\} \leq c \leq 1 \end{cases} .$$

Beweis

Zunächst ist $\xi_2 \in (\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_1+1}{2})$ nach Lemma 3.7. Angenommen, es wäre $\xi_2 \geq \xi_1$. Sei dann $c \in [\xi_1, \xi_2]$. Nach Lemma 4.2 (iv) muss F_c streng monoton wachsend auf dem Intervall $[\text{Max}\{0, 2c - 1\}, c]$ sein. Andererseits betrachten wir die durch

Definition 3.3 mit $\mu = \frac{1}{2}$ eingeführte Midpoint-Konvexitätsdefektfunktion $\frac{1}{2}\varphi_f(c)$ von f . Wegen $c \leq \xi_2$ ist dann $\frac{1}{2}\varphi_f(c) \geq 0$, also $F_c(c) = 2f(c) \leq f(0) + f(2c) = F_c(0)$ im Fall $c \leq \frac{1}{2}$ bzw. $F_c(c) = 2f(c) < f(1) + f(2c-1) = F_c(2c-1)$ im Fall $c \geq \frac{1}{2}$. Mit diesem Widerspruch ist $\xi_2 < \xi_1$ gezeigt.

Die Lösungsstruktur ergibt sich nun folgendermaßen. Für $c \leq \frac{\xi_1}{2}$ folgt ${}^2\mathbf{x}^* = (c, c) = {}^2\mathbf{x}^\sigma$ aus (4.5). Ist $\frac{\xi_1}{2} < c \leq \xi_2$, so liegt wegen $\frac{1}{2}\varphi_f(c) \geq 0$ ebenfalls die symmetrische Struktur vor. Sei nun $c \geq \xi_2$, also $\frac{1}{2}\varphi_f(c) \leq 0$. Dann ist ${}^2\mathbf{x}^* = (0, 2c)$ für $c \leq \frac{1}{2}$ und ${}^2\mathbf{x}^* = (2c-1, 1)$ für $c > \frac{1}{2}$. ■

Die symmetrische Lösung ${}^2\mathbf{x}^\sigma$ nennen wir auch *Zwillingslösung* des Paar-Aufteilungsproblems (${}^2Q^c$). Am Verzweigungspunkt $c = \xi_2$ „springt“ die Lösungsstruktur von dieser Zwillingslösung zur nichtsymmetrischen Randlösung. Für $\xi_2 < c < \xi_1$ repräsentiert die symmetrische Lösung ${}^2\mathbf{x}^\sigma$ eine von der globalen Lösung verschiedene lokale Minimallösung.

4.3 Aufteilungsproblem für m -Tupel

Die Lösungsstruktur des Paar-Aufteilungsproblems ermöglicht es, weitere notwendige Bedingungen für die Lösung des allgemeinen Aufteilungsproblems anzugeben.

Lemma 4.3 Sei ${}^m\mathbf{x}^*$ Optimallösung des Problems (${}^mQ^c$). Dann gilt:

- (1*) Ist $x_i^*, x_j^* \in (0, 1)$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$, so ist $x_i^* = x_j^* \in (0, \xi_2]$.
- (2*) Ist $x_i^* = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, so ist $x_j \notin (0, 2\xi_2)$ für alle $j \neq i$.
- (3*) Ist $c < \frac{1}{m}$ und ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$, dann ist $x_i^* = mc$ für genau ein $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (4*) Ist $c \geq \frac{1}{m}$ und ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$, dann ist $x_i^* = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$.

Beweis

Die partielle Lösung ${}^m\mathbf{x}_{I_2}^*$ mit $I_2 = \{i, j\}, i \neq j$, muss nach Lemma 4.1 Optimallösung des Problems (${}^2Q^{c_{I_2}}$) mit $c_{I_2} = \frac{1}{2}(x_i^* + x_j^*)$ sein. Aus Satz 4.1 ergeben sich damit die Aussagen (1*) und (2*).

Im Fall ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$ existiert eine Auswahl $I_2 = \{r, s\}$ aus $\{1, \dots, m\}$ mit $x_r^* \neq x_s^*$. Aus (1*) folgt $x_r = 0$ oder $x_s = 0$. Wegen (1*) und (2*) gibt es also kein Paar (x_i^*, x_j^*) mit $x_i^*, x_j^* \in (0, 1)$. Ist nun $c < \frac{1}{m}$, dann gilt $x_i^* < 1$ für alle i , also $x_i^* = mc$ für genau ein i . Im Fall $c \geq \frac{1}{m}$ führt die Annahme, dass $x_i^* < 1$ für alle

i gilt, auf einen Widerspruch zu (1*), (2*) und ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$. Damit sind auch die Aussagen (3*) und (4*) gezeigt. ■

Wegen der Symmetrie von mF beschränken wir uns auf zulässige Lösungen ${}^m\mathbf{x}$ des Problems (${}^mQ^c$) mit $x_1 \leq \dots \leq x_m$. Die Eingrenzung der Kandidaten für eine Optimallösung dieses Aufteilungsproblems erfolgt induktiv und letztendlich mit Hilfe der Konvexitätsdefektfunktionen.

Theorem 4.1 Sei $f \in C^4[0, 1]$ eine streng konvex-konkave Funktion mit Wendepunkt ξ_1 und $f^{(3)}, f^{(4)} < 0$ auf $(0, 1)$. Dann sind die globalen Minimalstellen des Problems (${}^mQ^c$) in Abhängigkeit vom Problemparameter c folgendermaßen bestimmt:

1. ${}^m\mathbf{x}^* = {}^m\mathbf{x}^\sigma$ für $c \in [0, \xi_m]$
2. ${}^m\mathbf{x}^* = (mc - j) \cdot {}^m\mathbf{e}_{m-j} + \sum_{i=m-j+1}^m {}^m\mathbf{e}_i$

$$\text{für } c \in \frac{1}{m}[(m-j)\xi_{m-j} + j, j+1]$$

$$\text{und } j \in \{0, \dots, m-1\}$$

3. ${}^m\mathbf{x}^* = \frac{mc-(j+1)}{m-(j+1)} \sum_{i=1}^{m-(j+1)} {}^m\mathbf{e}_i + \sum_{i=m-j}^m {}^m\mathbf{e}_i$

$$\text{für } c \in \frac{1}{m}[\text{Max}\{(m-j)\xi_{m-j} + j, j+1\}, (m-(j+1)\xi_{m-(j+1)}) + j+1]$$

$$\text{und } j \in \{0, \dots, m-2\}.$$

Die Nullstellen $\xi_k, k = 2, \dots, m$, der Konvexitätsdefektfunktionen $\frac{1}{k}\varphi_f$ genügen den rekursiven Bedingungen

$$\xi_k \in \left[\frac{k-1}{k} \cdot \xi_{k-1}, \xi_{k-1}\right).$$

Beweis

Für $m = 2$ folgt die Behauptung aus Satz 4.1. Sei nun $m > 2$ und die Behauptung für eine globale Minimalstelle ${}^{i-1}\mathbf{x}^*$ des Problems (${}^{i-1}Q^c$), $2 \leq i \leq m-1$, richtig. Außerdem gelte

$$\frac{i-1}{i} \xi_{i-1} \leq \xi_i < \xi_{i-1} \quad \text{für } i = 2, \dots, m-1. \quad (4.6)$$

Zur Diskussion der Struktur von ${}^m\mathbf{x}^*$ betrachten wir für den Parameter c die drei disjunkten Intervalle $[0, \xi_{m-1}]$, $(\xi_{m-1}, \frac{1}{m}]$ und $(\text{Max}\{\xi_{m-1}, \frac{1}{m}\}, 1]$. Dabei ist insbesondere auf dem ersten Intervall der Verzweigungsparameter zwischen symmetrischer und nichtsymmetrischer Lösungsstruktur induktiv zu bestimmen.

Fall 1: $c \in [0, \xi_{m-1}]$.

Für die Auswahl $I_{m-1}^1 := \{1, \dots, m-1\}$ muss wegen $c_{I_{m-1}^1} \leq c$ und Lemma 4.1 sowie nach Induktionsvoraussetzung die Struktur ${}^m \mathbf{x}_{I_{m-1}^1}^* = {}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma$ Optimallösung des Problems $({}^{m-1}Q^{c_{I_{m-1}^1}})$ sein. Es gilt also

$$x_1^* = \dots = x_{m-1}^* \leq x_m^*. \quad (4.7)$$

Fall 1.1: $c \in [0, \frac{m-1}{m} \xi_{m-1}]$.

Sei nun $I_{m-1} \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine beliebige Auswahl der Länge $m-1$. Dann folgt ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \mathbf{x}^\sigma$ aus

$$c_{I_{m-1}} = \frac{1}{m-1} \sum_{i \in I_{m-1}} x_i \leq \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m x_i = \frac{mc}{m-1} \leq \xi_{m-1}$$

und der Induktionsvoraussetzung.

Fall 1.2: $c \in [\frac{m-1}{m} \xi_{m-1}, \xi_{m-1}]$.

Wir betrachten folgende Teilfälle.

Fall 1.2.1: $c < \frac{1}{m}$.

Aus (4.7) und Lemma 4.3 (3*) folgt zunächst

$${}^m \mathbf{x}^* \in \{{}^m \mathbf{x}^\sigma, {}^m \hat{\mathbf{x}}\} \quad \text{mit} \quad {}^m \hat{\mathbf{x}} := mc \cdot {}^m \mathbf{e}_m. \quad (4.8)$$

Wir untersuchen zuerst die Lösungsstrukturen in den Randpunkten des Parameterintervalls.

a) $c = \frac{m-1}{m} \xi_{m-1}$.

Angenommen, es wäre ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \hat{\mathbf{x}}$. Dann muss die partielle Lösung ${}^m \hat{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}$ mit $I_{m-1}^2 := \{2, \dots, m\}$, also $c_{I_{m-1}^2} = \xi_{m-1}$, Optimallösung des Teilproblems $({}^{m-1}Q^{c_{I_{m-1}^2}})$ sein. Nach Induktionsvoraussetzung ist die symmetrische Lösung ${}^{m-1} \mathbf{x}^{\sigma_2} = \xi_{m-1} \cdot \sum {}^{m-1} \mathbf{e}_i$ ebenfalls Optimallösung dieses Problems. Für die im Problem $({}^m Q^c)$ zulässige Lösung

$${}^m \bar{\mathbf{x}} := \xi_{m-1} \cdot \sum_{i=2}^m {}^m \mathbf{e}_i$$

gilt dann ${}^m \bar{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2} = {}^{m-1} \mathbf{x}^{\sigma_2}$, also ${}^{m-1} F({}^m \bar{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}) = {}^{m-1} F({}^m \hat{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2})$ und folglich ${}^m F({}^m \mathbf{x}^*) = {}^m F({}^m \hat{\mathbf{x}}) = {}^m F({}^m \bar{\mathbf{x}})$. Wegen (4.8) kann aber ${}^m \bar{\mathbf{x}}$ nicht optimal sein. Deshalb ist ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \mathbf{x}^\sigma$.

b) $c = \xi_{m-1}$.

Angenommen, es wäre ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \mathbf{x}^\sigma$. Dann wäre $c_{I_{m-1}} = \xi_{m-1}$ für jede Auswahl $I_{m-1} \subseteq \{1, \dots, m\}$ der Länge $m-1$. Nach Induktionsvoraussetzung sind ${}^m \mathbf{x}_{I_{m-1}}^\sigma$ und ${}^{m-1} \hat{\mathbf{x}} := (m-1)\xi_{m-1} \cdot {}^{m-1} \mathbf{e}_{m-1}$ Optimallösungen des Problems $({}^{m-1} \mathbf{Q}^{c_{I_{m-1}}})$. Die im Problem $({}^m \mathbf{Q}^c)$ zulässige Lösung

$${}^m \tilde{\mathbf{x}} := \xi_{m-1} \cdot {}^m \mathbf{e}_1 + (m-1)\xi_{m-1} \cdot {}^m \mathbf{e}_m$$

mit ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2} = {}^{m-1} \hat{\mathbf{x}}$ muss dann wegen ${}^m F({}^m \mathbf{x}^*) = {}^m F({}^m \mathbf{x}^\sigma) = {}^m F({}^m \tilde{\mathbf{x}})$ auch optimal sein. Wir betrachten nun zur Auswahl $I_2 = \{1, m\}$ die partielle Lösung ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_2}$ von ${}^m \tilde{\mathbf{x}}$ mit $c_{I_2} = \frac{m}{2}\xi_{m-1}$. Wegen (4.6) und $\xi_{m-1} < \frac{1}{m}$ ist $c_{I_2} \in (\xi_2, \frac{1}{2})$. Nach Satz 4.1 ist aber ${}^2 \mathbf{x}^* = 2c_{I_2} \cdot {}^2 \mathbf{e}_2$ eindeutige Optimallösung vom Problem $({}^2 \mathbf{Q}^{c_{I_2}})$. Damit sind nach Lemma 4.1 weder ${}^m \tilde{\mathbf{x}}$ noch ${}^m \mathbf{x}^\sigma$ Lösungen von $({}^m \mathbf{Q}^c)$. Es muss also ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \hat{\mathbf{x}}$ gelten.

Fall 1.2.2: $c \geq \frac{1}{m}$.

Dieser Fall tritt nur für $\xi_{m-1} \geq \frac{1}{m}$ ein. Aus (4.7) und Lemma 4.3 (4*) folgt zunächst

$${}^m \mathbf{x}^* \in \{{}^m \mathbf{x}^\sigma, {}^m \tilde{\mathbf{x}}\} \quad \text{mit} \quad {}^m \tilde{\mathbf{x}} := \frac{mc-1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} {}^m \mathbf{e}_i + {}^m \mathbf{e}_m. \quad (4.9)$$

Zur Auswahl $I_{m-1}^2 = \{2, \dots, m\}$ gehört die partielle Lösung ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}$ bzgl. ${}^m \tilde{\mathbf{x}}$. Die nichtsymmetrische Lösung ${}^m \tilde{\mathbf{x}}$ kann nach Lemma 4.1 höchstens dann optimal sein, falls ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}$ Optimallösung des Teilproblems $({}^{m-1} \mathbf{Q}^{c_{I_{m-1}^2}})$ mit $c_{I_{m-1}^2} = \frac{(m-2)mc+1}{(m-1)^2} \geq \frac{1}{m-1}$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung muss dann

$$c_{I_{m-1}^2} \in \frac{1}{m-1} [(m-1)\xi_{m-1}, (m-2)\xi_{m-2} + 1]$$

gelten. Aus (4.6) und $c \leq \xi_{m-1}$ folgt

$$(m-1)c_{I_{m-1}^2} = \sum_{i=2}^m \tilde{x}_i = (m-2)\frac{mc-1}{m-1} + 1 < (m-2)\xi_{m-2} + 1.$$

Es verbleibt die Relation $c_{I_{m-1}^2} \geq \xi_{m-1}$, also die Abschätzung

$$c \geq \frac{(m-1)^2 \xi_{m-1} - 1}{m(m-2)} \quad (4.10)$$

für den Parameter c zu prüfen. Diese Bedingung untersuchen wir nun für die beiden Randpunkte des betrachteten Parameterintervalls.

$$a) c = \frac{m-1}{m} \xi_{m-1}.$$

Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle:

$$a1) c > \frac{1}{m}.$$

Hier ist wegen

$$(m-1)(m-2)\xi_{m-1} \leq (m-1)(m-2)\xi_{m-1} + (m-1)\xi_{m-1} - 1$$

die Bedingung (4.10) nicht erfüllt.

$$a2) c = \frac{1}{m}.$$

Angenommen, ${}^m \tilde{\mathbf{x}} = {}^m \mathbf{e}_m$ wäre Optimallösung des Problems (${}^m Q^c$). Wir betrachten die Auswahl $I_{m-1}^2 = \{2, \dots, m\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist zum Parameterwert $c_{I_{m-1}^2} = \xi_{m-1} = \frac{1}{m-1}$ neben der nichtsymmetrischen partiellen Lösung ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}$ auch die symmetrische Lösung ${}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma = \xi_{m-1} \cdot \sum {}^{m-1} \mathbf{e}_i$ Optimallösung des Teilproblems (${}^{m-1} Q^{c_{I_{m-1}^2}}$). Andererseits ist ${}^m \tilde{\mathbf{x}} = \xi_{m-1} \cdot \sum_{i=2}^m {}^m \mathbf{e}_i$ zulässige Lösung des Problems (${}^m Q^c$) mit ${}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2} = {}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma$. Aus ${}^{m-1} F({}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2}) = {}^{m-1} F({}^m \tilde{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^2})$ folgt ${}^m F({}^m \mathbf{x}^*) = {}^m F({}^m \tilde{\mathbf{x}}) = {}^m F({}^m \tilde{\mathbf{x}})$. Dies ist aber wegen (4.9) ausgeschlossen. Folglich gilt ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \mathbf{x}^\sigma$.

$$b) c = \xi_{m-1}.$$

Für diesen Parameterwert ist (4.10) erfüllt. Um die Optimalität von ${}^m \tilde{\mathbf{x}}$ zu prüfen, unterscheiden wir noch folgende zwei Teilfälle.

$$b1) \xi_{m-1} \geq \frac{1}{m-1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt hier das Teilproblem (${}^{m-1} Q^c$) die beiden globalen Minimallösungen ${}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma = \xi_{m-1} \cdot \sum {}^{m-1} \mathbf{e}_i$ und

$${}^{m-1} \tilde{\mathbf{x}} := \frac{(m-1)\xi_{m-1}-1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^{m-2} {}^{m-1} \mathbf{e}_i + {}^{m-1} \mathbf{e}_{m-1}.$$

Für die in (${}^m Q^c$) zulässige Lösung

$${}^m \check{\mathbf{x}} := \frac{(m-1)\xi_{m-1}-1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^{m-2} {}^m \mathbf{e}_i + \xi_{m-1} \cdot {}^m \mathbf{e}_{m-1} + {}^m \mathbf{e}_m$$

gilt dann ${}^m F({}^m \mathbf{x}^\sigma) = {}^m F({}^m \check{\mathbf{x}})$. Wir betrachten nun die partielle Lösung ${}^m \check{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^1}$ bez. ${}^m \check{\mathbf{x}}$ zur Auswahl $I_{m-1}^1 = \{1, \dots, m-1\}$. Wegen $c_{I_{m-1}^1} = \frac{m\xi_{m-1}-1}{m-1} < \xi_{m-1}$ ist nach Induktionsvoraussetzung ${}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma$ mit ${}^{m-1} \mathbf{x}^\sigma = {}^m \check{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^1}$, und nicht ${}^m \check{\mathbf{x}}_{I_{m-1}^1}$ Optimallösung des Problems (${}^{m-1} Q^{c_{I_{m-1}^1}}$). Aus Lemma 4.3 folgt ${}^m \mathbf{x}^* = {}^m \check{\mathbf{x}}$.

b2) $\xi_{m-1} < \frac{1}{m-1}$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind in diesem Fall ${}^{m-1}\mathbf{x}^\sigma = \xi_{m-1} \cdot \sum {}^{m-1}\mathbf{e}_i$ und ${}^{m-1}\hat{\mathbf{x}} = (m-1)\xi_{m-1} \cdot {}^{m-1}\mathbf{e}_{m-1}$ Optimallösungen des Teilproblems $({}^{m-1}\mathcal{Q}^c)$. Für die im Problem $({}^m\mathcal{Q}^c)$ zulässige Lösung

$${}^m\tilde{\mathbf{x}} := \xi_{m-1} \cdot {}^m\mathbf{e}_{m-1} + (m-1)\xi_{m-1} \cdot {}^m\mathbf{e}_m$$

gilt deshalb ${}^mF({}^m\tilde{\mathbf{x}}) = {}^mF({}^m\mathbf{x}^\sigma)$. Die zur Auswahl $I_2 = \{m-1, m\}$ gehörende partielle Lösung ${}^m\tilde{\mathbf{x}}_{I_2}$ ist zulässige Lösung des Teilproblems $({}^2\mathcal{Q}^{c_{I_2}})$ mit $c_{I_2} = \frac{m}{2}\xi_{m-1}$. Wegen Satz 4.1 ist ${}^m\tilde{\mathbf{x}}_{I_2}$ keine Optimallösung dieses Teilproblems. Damit können nach Lemma 4.1 weder ${}^m\tilde{\mathbf{x}}$ noch ${}^m\mathbf{x}^\sigma$ Optimallösungen des Problems $({}^m\mathcal{Q}^c)$ sein. Es gilt also ${}^m\mathbf{x}^* = {}^m\tilde{\mathbf{x}}$.

Wir untersuchen nun noch die Lösungsstruktur für die verbleibenden Parameterwerte $c \in (\frac{m-1}{m}\xi_{m-1}, \xi_{m-1})$. Dazu betrachten wir die Konvexitätsdefektfunktion $\frac{1}{m}\varphi_f$ von f mit der nach Lemma 3.7 eindeutig existierenden Nullstelle $\xi_m \in (0, 1)$. Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt

$$m \cdot \frac{1}{m}\varphi_f(c) = \begin{cases} {}^mF({}^m\hat{\mathbf{x}}) - {}^mF({}^m\mathbf{x}^\sigma) & \text{für } c < \frac{1}{m} \\ {}^mF({}^m\tilde{\mathbf{x}}) - {}^mF({}^m\mathbf{x}^\sigma) & \text{für } c \geq \frac{1}{m} \end{cases},$$

also ${}^m\mathbf{x}^* = {}^m\mathbf{x}^\sigma$ für $c \leq \xi_m$. Aus den Untersuchungen für die Randpunkte $c = \frac{m-1}{m}\xi_{m-1}$ und $c = \xi_{m-1}$ des Parameterintervalls erhält man schließlich

$$\frac{1}{m}\varphi_f\left(\frac{m-1}{m}\xi_{m-1}\right) > 0, \quad \frac{1}{m}\varphi_f(\xi_{m-1}) < 0, \quad (4.11)$$

und folglich

$$\xi_m \in \left(\frac{m-1}{m}\xi_{m-1}, \xi_{m-1}\right).$$

Damit sind die rekursiven Einschließungsaussagen (4.6) auch für $i = m$ gezeigt.

Fall 2: $c \in (\xi_{m-1}, \frac{1}{m}]$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist ${}^{m-1}\mathbf{x}^\sigma = {}^m\mathbf{x}_{I_{m-1}}^\sigma$ keine Optimallösung des Problems $({}^{m-1}\mathcal{Q}^c)$, also ist ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$. Aus Lemma 4.3 (3*) folgt unmittelbar ${}^m\mathbf{x}^* = {}^m\hat{\mathbf{x}}$.

Fall 3: $c \in (\text{Max}\{\xi_{m-1}, \frac{1}{m}\}, 1]$.

Wie im Fall 2 gilt zunächst ${}^m\mathbf{x}^* \neq {}^m\mathbf{x}^\sigma$. Nach Lemma 4.3 (4*) ist $x_m^* = 1$. Die Struktur von ${}^m\mathbf{x}^*$ ergibt sich damit aus der Induktionsvoraussetzung, angewandt auf das Teilproblem $({}^{m-1}\mathcal{Q}^{c_{I_{m-1}}^{1_{m-1}}})$ mit $c_{I_{m-1}}^{1_{m-1}} = \frac{mc-1}{m-1}$.

Für die Lösungsstruktur erhält man zusammenfassend die Darstellung

$${}^m \mathbf{x}^* = \begin{cases} {}^m \mathbf{x}^\sigma & \text{für } c \in [0, \xi_m] \\ mc \cdot {}^m \mathbf{e}_m & \text{für } c \in [\xi_m, \frac{1}{m}] \\ \frac{mc-1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} {}^m \mathbf{e}_i + {}^m \mathbf{e}_m & \text{für } c \in [\text{Max}\{\xi_m, \frac{1}{m}\}, \xi_{m-1}] \\ {}^m \mathbf{x}^* & \text{für } c \in [\xi_{m-1}, 1]. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet ${}^m \mathbf{x}^*$ diejenige Struktur, für die ${}^m x_m^* = 1$ gilt und die partielle Lösung ${}^m \mathbf{x}_{I_{m-1}}^*$ zur Auswahl $I_{m-1}^1 = \{1, \dots, m-1\}$ Optimallösung des Teilproblems $({}^{m-1}Q_{I_{m-1}^1}^{c_{I_{m-1}^1}})$ mit Problemparameter

$$c_{I_{m-1}^1}^1 = \frac{mc-1}{m-1} \in \frac{1}{m-1} [\text{Max}\{m\xi_{m-1} - 1, 0\}, m-1],$$

ist. Die Struktur von ${}^m \mathbf{x}_{I_{m-1}}^*$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Insbesondere erhält man im Fall $c_{I_{m-1}^1}^1 \leq \xi_{m-1}$ für $c \leq \frac{1}{m}((m-1)\xi_{m-1} + 1)$ die Lösungsstruktur für $j = 0$ aus Punkt 3 der Behauptung. ■

Dieser Satz beschreibt das Verzweigungsverhalten der Lösungsstruktur des Aufteilungsproblems $({}^m Q^c)$ in Abhängigkeit vom Kopplungsparameter $c \in [0, 1]$. Es gibt drei verschiedene Grundstrukturen. Parameterintervalle zur zweiten Struktur können jedoch auch leer sein. Die Nullstellen der Konvexitätsdefektfunktionen erzeugen kritische Parameterwerte. An den entsprechenden Verzweigungspunkten treten zwei verschiedene Lösungsstrukturen gleichzeitig auf. Für dieses Umspringen auf eine andere Lösungsstruktur ist die Forderung $f^{(3)}, f^{(4)} < 0$ verantwortlich. In [84] wurden solche Aufteilungsprobleme auch unter anderen Voraussetzungen an die streng konvex-konkave Funktion f untersucht. Das Verzweigungsverhalten ändert sich dort in dem Sinne, dass der Übergang von der symmetrischen zur nichtsymmetrischen Lösungsstruktur „glatt“ verläuft.

Kapitel 5

Isoperimetrisch–Isodiametrisches Problem

HEMMI und KUBOTA publizierten in ihren Arbeiten [53] bis [57] erstmalig eine Lösung des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems ($\underline{P}_{F,\{L,D\}}$) für den Fall $L \in (3D, \pi D)$. Sie wiesen dabei zunächst nach, dass der Rand einer optimalen Figur die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlängen D enthalten muss [55]. Diese Figur lässt sich deshalb in drei Sektorinpolyeder mit vorgegebenem Gesamtumfang zerlegen. Mit Hilfe des Verallgemeinerten Favard–Problems ersetzen wir die Aufgabe durch ein nichtlineares Umfangsaufteilungsproblem für fastreguläre Sektorinpolyeder (siehe auch [82, 83, 84]). Als partielles Bewertungskriterium fungiert hier die 'fonction penetrante'. Auf die Lösungsstruktur der Aufteilungsprobleme (${}^m Q^c$) kann aber nicht unmittelbar zurückgegriffen werden, da die 'fonction penetrante' keine streng konvex–konkave Funktion auf dem gesamten Intervall $(3D, \pi D)$ ist. Erst nach der Untersuchung von Eigenschaften des zugehörigen Paar–Problems (${}^2 P_{\pi/3}^\Lambda$) wird dieser Zugang möglich. Hierfür sind die Ergebnisse von FOCKE aus [36, 38] wegweisend.

Die nach einer gemeinsamen Vorarbeit mit KUBOTA [53] lange unbemerkt gebliebenen Ergebnisse von HEMMI [56, 57] in der Form von scharfen Ungleichungen zwischen den charakteristischen Parametern F , L und D können auf diesem Wege bestätigt und numerisch ausgewertet werden. Optimalfiguren des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems bezeichnen wir als *Hemmi–Polyeder*.

5.1 Satz von Hemmi-Kubota

Das Problem der Suche nach flächenkleinsten ebenen konvexen Figuren vorgegebenen Umfangs und Durchmessers erwies sich als sehr widerspenstig. Der japanische Geometer TADAHIKO KUBOTA veröffentlichte 1923 und 1924 in [87] und [88] die Ungleichungen

$$F \geq \frac{1}{4}(L - 2D)\sqrt{L(4D - L)} \quad (5.1)$$

und

$$F \geq \frac{1}{4}(L - 2D)\sqrt{3}D \quad (5.2)$$

für $L \in [2D, \pi D]$. Die erste Ungleichung ist scharf für $L \in [2D, 3D]$, die zweite nur für $L = 3D$. Flächenkleinste konvexe Figuren sind für $L \in [2D, 3D]$ gleichschenklige Dreiecke mit zwei Seiten der Länge D bzw. das gleichseitige Dreieck der Seitenlänge D . Für $L \in (3D, \pi D)$ ist die zweite Ungleichung schärfer als die erste. Im Fall des größtmöglichen Umfangs $L = \pi D$ kommen nur Gleichdick in Betracht. Nach dem Satz von Blaschke–Lebesgue ist das Reuleaux–Dreieck die flächenkleinste unter diesen Figuren. Sowohl der geometrische Zugang von BLASCHKE [11] und LEBESGUE [89] als auch der analytische Beweis von FUJIWARA [40] zur Minimaleigenschaft des Reuleaux–Dreiecks ließen sich nicht auf die Behandlung des isoperimetrisch-isodiametrischen Problems für $L \in (3D, \pi D)$ übertragen. Einerseits fehlte es an einer generellen geometrischen Methode, den Flächeninhalt konvexer Figuren unter Beibehaltung der Breite zu verkleinern (vgl. [53]), andererseits führte der analytische Zugang auf Probleme, die aus der klassischen Variationsrechnung herausführten (vgl. [40]).

BESICOVITCH [8] behandelte 1952 einige Varianten isoperimetrischer Probleme, bei denen die konvexe Figur in einer vorgegebenen konvexen kompakten Menge enthalten sein muss. Hierdurch angeregt, untersuchte TAYLOR [120] die Struktur flächenminimaler, im Reuleaux–Dreieck enthaltener konvexer Figuren vorgegebenen Umfangs. In den Jahren 1952/53 erschienen drei Arbeiten, die auf den Ideen der Lebesgue’schen Beweismethode aufbauten und entsprechende Verfahren zur Verkleinerung des Flächeninhalts bereitstellten. Von HEMMI und KUBOTA [53], OHMANN [101], sowie von SHOLANDER [115] wurden Asymmetrisierungsprozesse konvexer Figuren eingeführt, die schließlich die Lösung des bis dahin unge lösten L – Δ – und D – Δ –Problems ermöglichten. Die entsprechenden Ergebnisse sind auch im Übersichtsartikel von SANTALO [110] zitiert. Das L – D –Problem wurde in diesem Beitrag und in späteren Veröffentlichungen zu geometrischen

Ungleichungen wie z.B. in [22], [24] und [98] als ungelöstes Problem erwähnt. WEISS diskutierte 1984 in [125] die Frage nach Figuren extremalen Durchmessers bei vorgegebenem Flächeninhalt und Umfang. Erst in einem 1992 erschienenen Artikel von HANSEN [48] wird die Lösung dieses Problems durch HEMMI und KUBOTA zitiert. Die von HEMMI gefundenen optimalen Figuren bezeichnete HANSEN in einer entsprechenden Abbildungsunterschrift als *Hemmi-Polygone*. In einem Kommentar zu dieser Arbeit wies Killingbergtrø [65] auf die Strukturvielfalt dieser Figuren hin.

Um eine Methode zur Verkleinerung des Flächeninhalts konvexer Figuren unter Beibehaltung der Breite zu entwickeln, wurde fast gleichzeitig in den Arbeiten [53], [101] und [115] der Begriff des Reuleaux–Dreiecks verallgemeinert. Ein allgemeines Reuleaux–Dreieck R_C [101] (auch *Triarc* [115] bzw. *asymmetrisches Oval* [53] genannt) entsteht aus einer zentralsymmetrischen konvexen Figur C durch Aneinanderheften von drei Randstücken dieser Figur. Es ist dadurch charakterisiert, dass sich ihm ein konvexes Sechseck mit paarweise parallelen Seiten so umschreiben lässt, dass drei paarweise nicht benachbarte Ecken dieses Sechsecks mit drei Ecken von R_C zusammenfallen. Für die Breitenfunktion des allgemeinen Reuleaux–Dreiecks gilt

$$w_{R_C}(\varphi) = \frac{1}{2} w_C(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, \pi]$$

für alle $\varphi \in [0, \pi]$. Beim Reuleaux–Dreieck ist die zentralsymmetrische Figur C ein Kreis. Die drei oben hervorgehobenen Ecken von R_C bilden in diesem Fall ein gleichseitiges Dreieck. Bezüglich des *Eichbereichs* C lässt sich der Begriff der *Relativbreite* einer konvexen Figur durch die Funktion

$$w_{B/C}(\varphi) := 2 \frac{w_B(\varphi)}{w_C(\varphi)}$$

für $\varphi \in [0, \pi]$ einführen. Ein *allgemeines Reuleaux–Dreieck* ist also eine konvexe Figur konstanter Relativbreite. Diese Bezeichnung wird vor allem durch die folgende Minimaleigenschaft gerechtfertigt.

Theorem 5.1 (Verallgemeinerter Satz von Blaschke–Lebesgue) *Ein allgemeines Reuleaux–Dreieck besitzt unter allen ebenen konvexen Figuren gegebener Relativbreite den minimalen Flächeninhalt.*

Von OHMANN [101], SHOLANDER [115] sowie HEMMI und KUBOTA [53] wurde diese Aussage durch Orientierung an der Lebesgue’schen Idee zur Herleitung der

Minimaleigenschaft des Reuleaux–Dreiecks bewiesen. Sie führten dazu geeignete *Basishexagone* ein. HEMMI [54] dagegen lehnte sich an den analytischen Beweis des Satzes von Blaschke–Lebesgue durch FUJIWARA [40] an, indem er konvexe Figuren konstanter Relativbreite durch ihre Stützfunktion beschrieb.

Während OHMANN das L – D –Problem nicht berührte, zeigte SHOLANDER bereits, dass die flächenkleinste konvexe Figur ein allgemeines Reuleaux–Dreieck sein muss. Er formulierte als Vermutung, dass sie ein Inpolyeder des Reuleaux–Dreiecks sein muss und mutmaßte, dass es keine geschlossene Ungleichung zur Beschreibung scharfer unterer Schranken für den Flächeninhalt F in Abhängigkeit von L und D geben kann.

HEMMI und KUBOTA bemühten sich intensiv um die Lösung des L – D –Problems. In [57] wies HEMMI auf Analogien ihrer Untersuchungen zu denen von OHMANN und SHOLANDER, die kurz vor dem Druck ihrer eigenen Resultate erschienen waren, hin. In dieser Zeit verstarb TADAHIKO KUBOTA, so dass sich HEMMI nun allein weiter um die Lösung dieses Problems bemühte.

Er konnte in seiner Arbeit [54] zunächst die im Vergleich zu (5.2) schärfere Ungleichung

$$F \geq \frac{1}{2}([\frac{\pi}{\alpha}] \sin \alpha + \sin [\frac{\pi}{\alpha}]\alpha - \sqrt{3})D^2 \quad (5.3)$$

mit $\alpha = \alpha(L) \in [0, \frac{\pi}{3}]$ gemäß

$$\frac{L}{2D} = [\frac{\pi}{\alpha}] \sin \frac{\alpha}{2} + \cos [\frac{\pi}{\alpha}]\frac{\alpha}{2} \quad (5.4)$$

herleiten, wobei $[\cdot]$ die Gauß'sche Notation für den ganzen Anteil einer Zahl bezeichnet. Dabei stützte er sich auf die Ergebnisse von FAVARD [28]. Die Ungleichung (5.3) ist genau dann scharf, wenn $L = 6nD \sin \frac{\pi}{6n}$, $n \geq 1$, gilt. Für jeweils $L \in [6nD \sin \frac{\pi}{6n}, \pi D]$, $n \geq 1$, gab er mit der Ungleichung

$$F \geq \left(\frac{L}{2D} \cos \frac{\pi}{6n} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2 \quad (5.5)$$

noch eine weitere untere Schranke für F an. Dazu benutzte er zu $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3}]$ die Abschätzung $\sin [\frac{\pi}{\alpha}]\alpha \geq 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos [\frac{\pi}{\alpha}]\frac{\alpha}{2}$. Diese untere Schranke wird von $3n$ –seitigen regulären Hemmi–Polyedern mit Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ angenommen. Die Ungleichungen (5.5) sind für $n \geq 2$ schärfer als die Ungleichung (5.2). Letztere ergibt sich für $n = 1$ aus der Abschätzung (5.5).

Aufbauend auf den gemeinsam mit KUBOTA in [53] erzielten Resultaten, gelang es HEMMI 1953 in seiner Arbeit [55], Sholanders Vermutung mit geometrischen Mitteln zu beweisen. Er beschrieb dort lokale Variationen konvexer Figuren, die

unter Beibehaltung von Umfang und Durchmesser zur Verkleinerung des Flächeninhalts führten. Figuren, für die dies möglich war, nannte er *L–D–deformierbar*. Seine Untersuchungen ergaben folgende notwendige Eigenschaft einer Lösung des isoperimetrisch–isodiametrischen Problems.

Theorem 5.2 (Hemmi–Kubota) *Flächenkleinste konvexe Figuren gegebenen Umfangs L und Durchmessers D mit $L \in (3D, \pi D)$ sind Inpolyeder eines Reuleaux–Dreiecks der Breite D und Umpolyeder eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlängen D .*

Damit war geklärt, dass sich der Rand einer Optimalfigur aus drei Polygonzügen, welche zwischen jeweils zwei Ecken des Reuleaux–Dreiecks verlaufen, zusammensetzen muss. Nun war noch deren Struktur zu bestimmen. Zunächst bezog sich HEMMI auf die Ergebnisse von FAVARD [28] und beschränkte sich deshalb auf fastreguläre Polygonzüge. Er löste das hieraus resultierende Optimierungsproblem und publizierte noch im Jahre 1953 [56] scharfe untere Schranken für den Flächeninhalt konvexer Figuren in Abhängigkeit vom Umfang L und vom Durchmesser D . Zusammenfassend stellte er in [57] seinen Lösungsweg und die Ergebnisse zum L – D –Problem dar.

Wir leiten im Folgenden den von HEMMI angegebenen Komplex von Ungleichungen aus einem Umfangsaufteilungsproblem her. Dabei stützen wir uns auf den Satz von Hemmi–Kubota.

5.2 Umfangsaufteilung

Nach Theorem 5.2 gehen wir davon aus, dass eine flächenkleinste Figur mit Durchmesser D und Umfang L drei Ecken besitzt, die ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlängen D bilden. Damit ist diese Figur im entsprechenden Reuleaux–Dreieck enthalten.

Wir setzen $D = 1$ (o.B.d.A.). Die Optimalfigur B^* lässt sich dann in drei Sektorbereiche B_ω^i , $i = 1, 2, 3$, von Einheitskreissektoren S_ω mit Sektorwinkel $\omega = \frac{\pi}{3}$ und Teilumfängen $\mathcal{L}_\omega(B_\omega^i) = L_i$ mit $L_1 + L_2 + L_3 = L$ zerlegen. Da jeder Sektorbereich B_ω^i flächenminimal bez. des entsprechenden Teilumfangs L_i sein muss, ergibt sich dessen Struktur aus der Lösung des verallgemeinerten Favard–Problems in Kapitel 3. Jeder Teilbereich B_ω^i ist also nach Theorem 2.1 ein fastreguläres Sektorinpolyeder P_ω^i , welches wegen Satz 2.2 durch L_i bis auf Permutationen der Seiten des Randpolygonzuges p_ω^i eindeutig bestimmt ist. Sein Flächeninhalt ist durch den Wert $f_\omega(L_i)$ der 'fonction penetrante' gegeben. Für den

Gesamtflächeninhalt der Optimalfigur erhält man somit die Darstellung

$$\mathcal{F}(B^*) = \sum_{i=1}^3 f_{\frac{\pi}{3}}(L_i^*) - \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (5.6)$$

Gesucht ist noch die optimale Aufteilung ${}^3\mathbb{L}^* = (L_1^*, L_2^*, L_3^*)$ des Gesamtumfangs L . Sie ergibt sich für $m = 3$ und $\omega = \frac{\pi}{3}$ aus der Lösung des allgemeinen Umfangsaufteilungsproblems

$$\begin{aligned} ({}^m\text{P}_\omega^\Lambda) : \quad & m f_\omega({}^m\mathbb{L}) := \sum_{i=1}^m f_\omega(L_i) \rightarrow \text{Min!}, \quad \mathbb{L} \in \mathbb{R}^m \\ & \sum_{i=1}^m L_i = m \cdot \Lambda \\ & \underline{L}_\omega \leq L_i \leq \omega, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

mit $L = m \cdot \Lambda$ und $\Lambda \in [\underline{L}_\omega, \omega)$. Die symmetrische Lösung ${}^m\mathbb{L}^\sigma = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^m {}^m\mathbf{e}_i$ ist offensichtlich eine stationäre Lösung dieser Aufgabe.

Das globale Minimum lässt sich zunächst nicht aus der Lösung des im 4. Kapitel behandelten allgemeinen Aufteilungsproblems (${}^m\text{Q}^c$) ablesen. Dies liegt daran, dass die Funktion f_ω nur stückweise streng konvex-konkav auf $[\underline{L}, \omega]$ ist. Sie setzt sich nach (2.35) und Lemma 3.1 aus abzählbar vielen konvex-konkaven Teilstücken auf den Intervallen $I_n = [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$, $n \geq 2$, zusammen. Wir untersuchen deshalb das Paar-Aufteilungsproblem (${}^2\text{P}_\omega^\Lambda$) etwas näher. Dazu orientieren wir uns am Focke'schen Zugang [36] für $\omega = 2\pi$ (vgl. auch [18]) und zeigen, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt, so dass die optimalen Teilumfänge L_i^* alle zum selben Intervall I_n gehören.

Paar-Aufteilungsproblem:

Sei $m = 2$. Zu vorgegebenem Parameter $\Lambda \in (\underline{L}_\omega, \omega)$ wählen wir $n \geq 2$ gemäß $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Wir diskutieren zunächst stationäre Lösungen des Problems (${}^2\text{P}_\omega^\Lambda$) auf dem offenen Intervall $I_n^0 \times I_n^0$ mit $I_n^0 = (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$ und anschließend globale Minimallösungen auf der Komplementärmenge.

Fall 1: ${}^2\mathbb{L} \in I_n^0 \times I_n^0$.

In diesem Fall entspricht die Zwillinglösung ${}^2\mathbb{L}^\sigma = (\Lambda, \Lambda)$ mit $\Lambda \in I_n^0$ einem Paar gleicher, fastregulärer n -seitiger Sektorinpolyeder mit charakteristischem Winkel $\alpha_\omega(\Lambda) > \alpha_n^\omega = \frac{\omega}{n}$ aus (2.28) und Defektwinkel $\delta_\omega(\Lambda) = \omega - (n-1)\alpha_\omega(\Lambda) > 0$. Wir untersuchen zunächst die Rolle der Wendepunkte ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$ der 'fonction penetrante'.

Lemma 5.1 Sei $m = 2$, $\omega \in [0, 2\pi]$, $n \geq 2$ und $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$. Dann besitzt das Problem $({}^2P_\omega^\Lambda)$ höchstens die Zwillingslösung ${}^2\mathbb{L}^\sigma$ als lokale Minimallösung auf $I_n^0 \times I_n^0$. Sie ist insbesondere

a) für $\Lambda \in I_2^0$ oder $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, {}^1\lambda_n^\omega)$, $n \geq 3$, lokale Minimalstelle

b) für $\Lambda \in [{}^1\lambda_n^\omega, l_n^\omega)$, $n \geq 3$, lokale Maximalstelle

der Funktion ${}^2f_\omega$ auf $I_n^0 \times I_n^0$.

Beweis

Nach Lemma 3.1 ist die 'fonction penetrante' f_ω auf I_2 streng konvex und auf jedem Intervall I_n , $n \geq 3$, streng konvex-konkav mit jeweiligem Wendepunkt ${}^1\lambda_n^\omega \in I_n^0$. Also ist für $n = 2$ die Zwillingslösung einzige lokale Minimalstelle des Problems $({}^2P_\omega^\Lambda)$ auf dem zulässigen Teilbereich $I_2^0 \times I_2^0$. Für $n \geq 3$ ist $({}^2P_\omega^\Lambda)$ auf $I_n^0 \times I_n^0$ ein Paar-Aufteilungsproblem vom Typ $({}^2Q^c)$ aus Kapitel 4. Wegen $f_\omega^{(3)}, f_\omega^{(4)} < 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 4.2 über die Skalierung (3.33). ■

Quantitativ lässt sich die lokale Minimaleigenschaft der Zwillingslösung in Abhängigkeit vom charakteristischen Winkel folgendermaßen charakterisieren.

Folgerung 5.1 Die Zwillingslösung ${}^2\mathbb{L}^\sigma$ ist für $n \geq 3$ und $\Lambda \in I_n^0$ lokale Minimallösung von $({}^2P_\omega^\Lambda)$ auf $I_n^0 \times I_n^0$ genau dann, wenn

$$(n-1) \sin \frac{\delta_\omega(\Lambda)}{2} < \sin \frac{\alpha_\omega(\Lambda)}{2}$$

mit dem zum Parameter Λ gehörenden charakteristischen Winkel $\alpha_\omega(\Lambda)$ und entsprechendem Defektwinkel $\delta_\omega(\Lambda)$ gilt.

Beweis Nach Lemma 5.1 ist die Zwillingslösung ${}^2\mathbb{L}^\sigma = (\Lambda, \Lambda)$ genau dann lokale Minimallösung von $({}^2P_\omega^\Lambda)$ auf $I_n^0 \times I_n^0$, wenn $\Lambda < {}^1\lambda_n^\omega$ bzw. $f_\omega''(\Lambda) > 0$ gilt. Dies ist wegen (3.6) und (3.8) äquivalent zu $(n-1) \sin \frac{\delta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} < 0$ mit $\alpha = \alpha_\omega(\Lambda)$ gemäß $L_\omega(\alpha) = \Lambda$ und $\delta = \delta_\omega(\Lambda) = \omega - (n-1)\alpha_\omega(\Lambda)$. ■

Damit dominieren für wachsende n nichtsymmetrische Lösungsstrukturen auf $I_n^0 \times I_n^0$.

Fall 2: ${}^2\mathbb{L} \notin I_n^0 \times I_n^0$.

In diesem Fall ist die Zwillingslösung ${}^2\mathbb{L}^\sigma$ nur für $\Lambda = l_n^\omega$ zulässig. Sie gehört dann zu einem Paar regulärer n -seitiger Sektorinpolyeder.

Ein Paar (P_ω^1, P_ω^2) von Inpolyedern des Sektors S_ω setzen wir nun zu einem mehrfach umschlungenen Inpolyeder $P_{2\omega}$ des Sektors $S_{2\omega}$ zusammen. Das Paar–Aufteilungsproblem $({}^2P_\omega^\Lambda)$ lässt sich so in das verallgemeinerte Favard–Problem $(P_{2\omega}^{2\Lambda})$ einbetten. Die im Fall 1 zulässigen Lösungen werden mit einer geeigneten Zusatzrestriktion ausgeblendet. Dieser Weg wird dann erfolgreich sein, wenn die Optimallösung des Problems $(P_{2\omega}^{2\Lambda})$ als zulässige Lösung des Ausgangsproblems $({}^2P_\omega^\Lambda)$ erkannt wird, d.h. wenn ein mehrfach umschlungenes flächenminimales Inpolyeder des Sektors $S_{2\omega}$ in ein Paar fastregulärer Inpolyeder des Sektors S_ω zerfällt.

Unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Zielfunktion ${}^2f_\omega$ des Problems $({}^2P_\omega^\Lambda)$ genügt es, zulässige Lösungen ${}^2\mathbb{L}$ mit $L_1 \leq L_2$ zu betrachten. Wegen $\Lambda \in (l_{n-1}, l_n]$ führt das im betrachteten Fall 2 auf die Alternative $L_1 \leq l_{n-1}^\omega$ oder $L_2 \geq l_n^\omega$. Aus $L_1 + L_2 = 2\Lambda$ ergeben sich dann die Implikationen

$$\Lambda \in {}^2I_n^+, L_1 \leq l_{n-1}^\omega \implies L_2 \geq l_n^\omega \tag{5.7}$$

$$\Lambda \in {}^2I_n^-, L_2 \geq l_n^\omega \implies L_1 \leq l_{n-1}^\omega, \tag{5.8}$$

wobei ${}^2I_n^- = (l_{n-1}^\omega, \frac{1}{2}(l_{n-1}^\omega + l_n^\omega)]$ und ${}^2I_n^+ = (\frac{1}{2}(l_{n-1}^\omega + l_n^\omega), l_n^\omega]$ die in (3.36) eingeführten Intervalle für $m = 2$ sind. Wir untersuchen nun die entsprechenden Teilfälle.

Fall 2.1: $\Lambda \in {}^2I_n^+, L_2 \geq l_n^\omega$.

Das modifizierte Problem

$$\begin{aligned} ({}^+P_{2\omega}^{2\Lambda}) : \quad & F_{2\omega}(\varphi; k) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sin \varphi_j \rightarrow \text{Min!} \\ & L_{2\omega}(\varphi; k) := 2 \sum_{j=1}^k \sin \frac{\varphi_j}{2} = 2\Lambda \\ & \sum_{j=1}^k \varphi_j = 2\omega \\ & 0 < \varphi_j < \pi \quad \forall j \\ & \varphi_j \leq \alpha_n^\omega \quad \text{für } j = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \tag{+}$$

entsteht durch Hinzufügen einer Restriktion (+) zur Aufgabe $(P_{2\omega}^{2\Lambda})$. Offensichtlich verletzt die Zwillingungslösung aus Fall 1 die Zusatzrestriktion (+).

Lemma 5.2 Eine zulässige Lösung des Problems $({}^2P_\omega^\Lambda)$ ist genau dann zulässige Lösung des Problems $({}^+P_{2\omega}^{2\Lambda})$, wenn $L_2 \geq l_n^\omega$ gilt.

Beweis

Sei ${}^2\mathbb{L} = (L_1, L_2)$ zulässig in $({}^2P_\omega^\Lambda)$. Zu jedem L_i , $i = 1, 2$, gibt es dann ein eindeutig bestimmtes fastreguläres n_i -seitiges Sektorinpolyeder von S_ω . Das Tupel $(\varphi; k)$ setze sich zusammen aus den zugehörigen Zentriwinkeln $\varphi_1 = \cdots = \varphi_{n_1-1} = \alpha_\omega(L_1)$, $\varphi_{n_1} = \delta_\omega(L_1)$, $\varphi_{n_1+1} = \cdots = \varphi_{k-1} = \alpha_\omega(L_2)$, $\varphi_k = \delta_\omega(L_2)$ und ihrer Anzahl $k = n_1 + n_2$.

Für $L_2 < l_n^\omega$ muss $L_1 > l_{n-1}^\omega$ wegen (5.7) gelten. Aus $L_1 \leq L_2$ folgt $L_i \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega)$. Nach Lemma 2.1 ist also $n_i = n$, $\alpha_\omega(L_i) \in (\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega)$ und $0 < \delta_\omega(L_i) < \alpha_\omega(L_i)$ für $i = 1, 2$. Da es jeweils $n-1$ charakteristische Winkel $\alpha_\omega(L_i)$ gibt und $n \geq 2$ gilt, ist die Zusatzrestriktion verletzt.

Für $L_2 = l_n^\omega$ folgt $L_1 > l_{n-1}^\omega$ aus $\Lambda \in {}^2I_n^+$ und $L_1 + L_2 = 2\Lambda$. Wegen $L_1 \leq L_2$ ist $L_1 \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Nach Lemma 2.1 gilt hier $n_1 = n_2 = n$, $\alpha_\omega(L_1) \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega)$, $0 < \delta_\omega(L_1) \leq \alpha_n^\omega$ und $\alpha_\omega(L_2) = \alpha_n^\omega$. Damit ist die Restriktion (+) erfüllt.

Für $L_2 > l_n^\omega$ ist die Nebenbedingung (+) wegen $n_1 = n+1$, $\alpha_\omega(L_2) \in [\alpha_{n+1}^\omega, \alpha_n^\omega)$ und $\delta_\omega(L_2) \leq \alpha_\omega(L_2)$ erfüllt. ■

Damit ist auch die Existenz von Lösungen des Problems $({}^+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ gesichert. Sei nun $(\varphi; k)$ eine Optimallösung dieser Aufgabe. Dann gibt es bei geeigneter Nummerierung der φ_j eine natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq n+1$, mit

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \alpha_n^\omega & \text{für } j &= 1, \dots, q \\ \varphi_j &< \alpha_n^\omega & \text{für } j &= q+1, \dots, n+1 \\ \varphi_j &\in (0, \pi) & \text{für } j &= n+2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das zugehörige Sektorinpolyeder sei mit $P_{2\omega}$ bezeichnet. Es lässt sich für $q \geq 1$ in die Sektorinpolyeder P_ρ mit $\rho = q \cdot \alpha_n^\omega$ und P_ξ mit $\xi = 2\omega - \rho$ zerlegen. Für das reguläre Sektorinpolyeder P_ρ ist $\mathcal{L}_\rho(P_\rho) = l_q^\rho = 2q \cdot \sin \frac{\alpha_n^\omega}{2}$. Die Zentriwinkel von P_ξ sind freie Variable bez. der Zusatzrestriktion (+) und deshalb Optimallösung des verallgemeinerten Favard-Problems $(P_\xi^{L_\xi})$ mit $L_\xi = 2\Lambda - l_q^\rho$. Folglich ist P_ξ ein wohlbestimmtes fastreguläres Sektorinpolyeder. Für $L_\xi = l_1^\xi$ ist es einseitig und sonst $(p+1)$ -seitig, wobei sich dann die natürliche Zahl $p \geq 1$ aus $L_\xi \in (l_p^\xi, l_{p+1}^\xi]$ ergibt. Zusammen erhalten wir aus (5.9) und Lemma 2.1 die Zerlegungen

$$2\omega = q \cdot \alpha_n^\omega + \delta + p \cdot \alpha \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L}_{2\omega}(P_{2\omega}) = l_p^\rho + L_\xi(\alpha) \quad (5.11)$$

für gewisse $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 0$, $0 \leq q \leq n+1$. Dabei ist $\delta = \alpha = \xi$ für $p = 0$. Für $p \geq 1$ erhält man aus (2.28) den charakteristischen Winkel $\alpha = \alpha_\xi(L_\xi) \in$

$[\alpha_{p+1}^\xi, \alpha_p^\xi]$ und den Defektwinkel $0 < \delta = \xi - p \cdot \alpha \leq \alpha \leq \xi$. Die Zerlegung des Winkels 2ω aus (5.10) führt für das optimale Tupel $(\varphi; k)$ auf die Darstellung

$$\varphi = (\underbrace{\alpha_n^\omega, \dots, \alpha_n^\omega}_q, \delta, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_p), \quad k = q + 1 + p. \quad (5.12)$$

Wir diskutieren nun das Verhalten des Umfangs solcher zweifach umschlungenen Sektorinpolyeder $P_{2\omega}$, d.h. die Abhängigkeit der Funktion $L_{2\omega}(\varphi; k)$ mit $(\varphi; k)$ aus (5.12) vom Winkel α .

Lemma 5.3 *Das Paar $(\varphi; k)$ sei durch (5.12) gegeben. Dann gilt:*

$$\alpha \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \alpha_n^\omega \iff L_{2\omega}(\varphi; k) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 2l_n^\omega.$$

Beweis

Für $p = 0$ ist $\alpha = \delta = \xi = (2n - q)\alpha_n^\omega \geq \alpha_n^\omega$ wegen $2\omega = 2n \cdot \alpha_n^\omega$, $n \geq 2$ und $q \leq n + 1$. Die Behauptung folgt dann aus

$$L_\xi(\alpha) = l_1^\xi = 2 \sin \frac{(2n - q) \cdot \alpha_n^\omega}{2} \leq 2(2n - q) \cdot \sin \frac{\alpha_n^\omega}{2}$$

und (5.11). Dabei gilt das strenge Ungleichheitszeichen für $2n - q \geq 2$.

Sei nun $p \geq 1$. Für $\alpha = \alpha_n^\omega$ muss $\delta = \alpha_n^\omega$ wegen $\delta \leq \alpha$ und (5.10) gelten. Dies zieht $k = 2n$ und $L_{2\omega}(\varphi; k) = 2l_n^\omega$ nach sich. Wegen (5.11) ist außerdem $L_{2\omega}(\varphi; k) = l_q^\rho + L_\xi(\alpha_n^\omega)$. Da die Funktion L_ξ streng monoton fallend in α ist (siehe (3.6)), folgt hieraus die Behauptung. ■

Aus der Diskussion der isoperimetrischen Nebenbedingung lässt sich nun die Minimallösung des Problems $(^+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ bestimmen.

Satz 5.1 *Sei $\Lambda \in {}^2I_n^+$ und $L_2 \geq l_n^\omega$. Dann besitzt eine Optimallösung $(\varphi; k)$ des Problems $(^+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ bei geeigneter Numerierung der φ_i die Struktur (5.12) mit $k = 2n, q = n, p = n - 1, \alpha \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega]$ und $F_{2\omega}(\varphi; k) = f_\omega(l_n^\omega) + f_\omega(2\Lambda - l_n^\omega)$.*

Beweis

Eine Optimallösung $(\varphi; k)$ von $(^+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ muss bei geeigneter Numerierung der φ_i eine Darstellung der Gestalt (5.12) mit $L_{2\omega}(\varphi; k) = 2\Lambda$ besitzen. Wegen $\Lambda \in {}^2I_n^+$ ist $L_{2\omega}(\varphi; k) \leq 2l_n^\omega$. Aus Lemma 5.3 folgt $\alpha \geq \alpha_n^\omega$. Ist $\Lambda = l_n^\omega$, so muss $\alpha = \alpha_n^\omega, \delta = \alpha_n^\omega$ und $k = 2n$ gelten. Für $\Lambda < l_n^\omega$ ist $\alpha > \alpha_n^\omega$, also $q \geq n$ wegen (+).

Wir betrachten nun die Zerlegung $\varphi = (\psi^1, \psi^2)$ mit

$$\psi^1 = (\underbrace{\alpha_n^\omega, \dots, \alpha_n^\omega}_n), \quad \psi^2 = (\underbrace{\alpha_n^\omega, \dots, \alpha_n^\omega}_{q-n}, \delta, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_p).$$

Wegen $\omega = n \cdot \alpha_n^\omega = (q - n) \cdot \alpha_n^\omega + \delta + p \cdot \alpha$ ergeben sich mit

$$F_{2\omega}(\varphi; k) = F_\omega(\psi^1; n) + F_\omega(\psi^2; k - n)$$

$$L_{2\omega}(\varphi; k) = L_\omega(\psi^1; n) + L_\omega(\psi^2; k - n)$$

entsprechende Zerlegungen für die Ziel- bzw. Restriktionsfunktion des Problems $(+P_{2\omega}^{2\Lambda})$. Offensichtlich ist $F_\omega(\psi^1; n) = f_\omega(l_n^\omega) = f_n^\omega$ und $L_\omega(\psi^1; n) = l_n^\omega$. Mit $\tilde{L} := 2\Lambda - l_n^\omega$ ist dann $(\psi^2; k - n)$ eine zulässige Lösung des Grundproblems $(P_\omega^{\tilde{L}})$. Wegen $\Lambda \in {}^2I_n^+$ gilt $\tilde{L} \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Nach Satz 2.2 ist $(\tilde{\psi}; n)$ mit

$$\tilde{\psi} = (\tilde{\delta}, \underbrace{\tilde{\alpha}, \dots, \tilde{\alpha}}_{n-1})$$

und $\tilde{\alpha} = \alpha_\omega(\tilde{L}) \in [\alpha_n^\omega, \alpha_{n-1}^\omega], 0 < \tilde{\delta} = \omega - (n - 1)\tilde{\alpha} \leq \alpha_n^\omega$ eine bis auf die Numerierungsreihenfolge der $\tilde{\psi}_i$ eindeutige Optimallösung von $(P_\omega^{\tilde{L}})$. Damit ist das Tupel $(\tilde{\varphi}; 2n)$ mit $\tilde{\varphi} = (\psi^1, \tilde{\psi})$ von der Struktur (5.12) und zulässig in $(+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ mit der Eigenschaft $F_{2\omega}(\tilde{\varphi}; 2n) \leq F_{2\omega}(\varphi; k)$. Es muss also $\varphi = \tilde{\varphi}$ bei geeigneter Numerierung der φ_j gelten. Folglich ist $k = 2n, q = n, p = n - 1, \alpha = \tilde{\alpha}$ sowie $F_{2\omega}(\varphi; k) = f_n^\omega + f_\omega(\tilde{L})$. ■

Das zur Optimallösung $(\varphi; 2n)$ des modifizierten Problems $(+P_{2\omega}^{2\Lambda})$ korrespondierende Sektorinpolyeder $P_{2\omega}$ zerfällt also in ein reguläres n -seitiges und ein fast-reguläres n -seitiges Inpolyeder des Sektors S_ω . Mit $L_2 = l_n^\omega$ und $L_1 = 2\Lambda - l_n^\omega \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ ist ${}^2\mathbb{L} = (L_1, L_2)$ eine globale Minimalstelle der Funktion ${}^2f_\omega$ über dem durch Fall 2.1 eingeschränkten Teilbereich des Problems $({}^2P_\omega^\Lambda)$.

Fall 2.2: $\Lambda \in {}^2I_n^-, L_1 \leq l_{n-1}^\omega$.

Dieser Fall wird ähnlich wie Fall 2.1 behandelt. Zunächst modifizieren wir das Problem $(P_{2\omega}^{2\Lambda})$ durch Hinzufügen einer Restriktion $(-)$. Wir betrachten hier das Problem

$$\begin{aligned}
 (-P_{2\omega}^{2\Lambda}) : \quad & F_{2\omega}(\varphi; k) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sin \varphi_j \rightarrow \text{Min!} \\
 & L_{2\omega}(\varphi; k) := 2 \sum_{j=1}^k \sin \frac{\varphi_j}{2} = 2\Lambda \\
 & \sum_{j=1}^k \varphi_j = 2\omega \\
 & 0 < \varphi_j < \pi \quad \forall j \\
 & \varphi_j \leq \bar{\alpha}_n \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (-)
 \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{\alpha}_n$ durch $L_\omega(\bar{\alpha}_n) = 2\Lambda - l_{n-1}^\omega$ eindeutig bestimmt. Setzen wir $\bar{l}_n := 2\Lambda - l_{n-1}^\omega$, so gilt

$$l_{n-1}^\omega < \Lambda < \bar{l}_n \leq l_n^\omega \quad (5.13)$$

wegen $\Lambda \in {}^2I_n^-$, also

$$\alpha_{n-1}^\omega > \alpha_\omega(\Lambda) > \bar{\alpha}_n \geq \alpha_n^\omega \quad (5.14)$$

und folglich

$$\bar{\delta}_n := \omega - (n-1)\bar{\alpha}_n \leq \bar{\alpha}_n. \quad (5.15)$$

Die Wirkung der Zusatzrestriktion $(-)$ beschreibt das folgende Lemma.

Lemma 5.4 *Eine zulässige Lösung des Problems $({}^2P_\omega^\Lambda)$ ist genau dann zulässige Lösung des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$, wenn $L_1 \leq l_{n-1}^\omega$ gilt.*

Beweis

Sei ${}^2L = (L_1, L_2)$ zulässig in $({}^2P_\omega^\Lambda)$. Im Fall $L_1 > l_{n-1}^\omega$ ist $L_1 \leq L_2 \leq 2\Lambda - L_1 < \bar{l}_n \leq l_n^\omega$, also $n_i = n, \alpha_\omega(L_i) > \bar{\alpha}_n$ und $\delta_\omega(L_i) = \omega - (n-1)\alpha_\omega(L_i) < \bar{\delta}_n$ für $i = 1, 2$. Folglich ist die Restriktion $(-)$ verletzt. Ist andererseits $L_1 \leq l_{n-1}^\omega$, dann gilt $L_2 \geq \bar{l}_n > l_{n-1}^\omega$. Hieraus folgt $n_2 \geq n$ und $\delta_\omega(L_2) \leq \alpha_\omega(L_2) \leq \bar{\alpha}_n$. Damit ist die Bedingung $(-)$ in diesem Fall erfüllt. ■

Sei nun $(\varphi; k)$ eine Optimallösung des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$ und $q \geq 0$ die Anzahl der Winkel φ_j mit $\varphi_j = \bar{\alpha}_n$. Für das zweifach umschlungene Sektorinpolyeder $P_{2\omega}$, bestimmt durch die Zentriwinkel $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, ist $\mathcal{L}_{2\omega}(P_{2\omega}) = L_{2\omega}(\varphi; k)$. Es zerfällt für $q \geq 1$ in ein reguläres q -seitiges Sektorinpolyeder P_ρ mit $\rho = q \cdot \bar{\alpha}_n$ und ein $(k-q)$ -seitiges Sektorinpolyeder P_ξ mit $\xi = 2\omega - \rho$ und $\bar{L}_\xi := 2\Lambda - l_q^\rho$. Für $\bar{L}_\xi = l_1^\xi$ ist $k-q = 1$, sonst ist $k-q = p+1$, wobei sich $p \geq 1$ aus $\bar{L}_\xi \in (l_p^\xi, l_{p+1}^\xi]$ bestimmt. Es ergibt sich die Zerlegung

$$2\omega = q \cdot \bar{\alpha}_n + \delta + p \cdot \alpha \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_{2\omega}(P_{2\omega}) = l_p^\rho + L_\xi(\alpha) \quad (5.17)$$

mit $p \geq 0$ und $0 \leq q \leq n$. Für $p = 0$ ist $\delta = \alpha = \xi$. Sonst ist $0 < \delta \leq \alpha \leq \xi$. Die Optimallösung $(\varphi; k)$ besitzt also die Darstellung

$$\varphi = (\underbrace{\bar{\alpha}_n, \dots, \bar{\alpha}_n}_q, \delta, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_p), \quad k = q + 1 + p. \quad (5.18)$$

Den Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Umfang des Sektorinpolyeders $P_{2\omega}$ beschreibt folgendes Lemma.

Lemma 5.5 *Das Paar $(\varphi; k)$ sei durch (5.18) gegeben. Dann gilt:*

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ > \end{array} \right\} \bar{\alpha}_n \iff L_{2\omega}(\varphi; k) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ < \end{array} \right\} L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n).$$

Beweis

Im Fall $p = 0$ ist $\delta = \alpha = \xi = 2\omega - q \cdot \bar{\alpha}_n$. Sei $r \geq 0$ so gewählt, dass $\xi = r \cdot \bar{\alpha}_n + \bar{\delta}_\xi$ mit $0 < \bar{\delta}_\xi \leq \bar{\alpha}_n$ gilt. Aus $2\omega = (r + q) \cdot \bar{\alpha}_n + \bar{\delta}_\xi$ ergibt sich die Darstellung

$$L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n) = 2(r + q) \sin \frac{\bar{\alpha}_n}{2} + 2 \sin \frac{\bar{\delta}_\xi}{2}.$$

Für $\alpha > \bar{\alpha}_n$ ist $r \geq 1$. Aus (5.17) und

$$L_\xi(\alpha) = l_1^\xi = 2 \sin \frac{r \cdot \bar{\alpha}_n + \bar{\delta}_\xi}{2} < 2r \sin \frac{\bar{\alpha}_n}{2} + 2 \sin \frac{\bar{\delta}_\xi}{2}$$

folgt dann $L_{2\omega}(\varphi; k) < L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n)$.

Für $\alpha \leq \bar{\alpha}_n$ ist $r = 0$, also $L_{2\omega}(\varphi; k) = L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n)$.

Sei nun $p \geq 1$. Für $\alpha = \bar{\alpha}_n$ ergibt sich aus (5.17) und den Kompositionsregeln für die Längenfunktion $L_{2\omega}$ (siehe Abschnitt 2.3) die Zerlegung

$$L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n) = L_\rho(\bar{\alpha}_n) + L_\xi(\bar{\alpha}_n) = L_{2\omega}(\varphi; k).$$

Dabei ist $L_\rho(\bar{\alpha}_n) = l_q^\rho$, $\rho = q \cdot \bar{\alpha}_n$, $\rho + \xi = 2\omega$. Die Behauptung folgt dann aus dem Monotonieverhalten der Funktion L_ξ (vgl. (2.33)). ■

Die Diskussion der isoperimetrischen Nebenbedingung des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$ ergibt ein zu Satz 5.1 analoges Resultat.

Satz 5.2 *Sei $\Lambda \in {}^2I_n^-$ und $L_1 \leq l_{n-1}^\omega$. Dann besitzt eine Optimallösung $(\varphi; k)$ des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$ bei geeigneter Numerierung der φ_i die Struktur (5.18) mit $k = 2n - 1$, $q = n - 1 = p$, $\alpha = \alpha_{n-1}^\omega$ und $F_{2\omega}(\varphi; k) = f_\omega(l_{n-1}^\omega) + f_\omega(\bar{l}_n)$.*

Beweis

Sei $(\varphi; k)$ eine Optimallösung des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ mit $\varphi_j, j = 1, \dots, k$, und k aus (5.18). Nach (2.22), (5.15) und (5.16) gilt

$$\begin{aligned} 2\omega &= q \cdot \bar{\alpha}_n + \delta + p \cdot \alpha \\ &= (n-1)\bar{\alpha}_n + \bar{\delta}_n + (n-1)\alpha_{n-1}^\omega. \end{aligned}$$

Da $(\varphi; k)$ zulässig ist, erhalten wir mit $L_\omega(\bar{\alpha}_n) = \bar{l}_n = 2\Lambda - l_{n-1}^\omega, l_{n-1}^\omega = L_\omega(\alpha_{n-1}^\omega)$ aus den Kompositionsregeln für die Längenfunktion von Sektorinpolygonen die Zerlegungen

$$\begin{aligned} L_{2\omega}(\varphi; k) = 2\Lambda &= L_\omega(\bar{\alpha}_n) + L_\omega(\alpha_{n-1}^\omega) \\ &= L_{(n-1)\bar{\alpha}_n}(\bar{\alpha}_n) + L_{\omega+\bar{\delta}_n}(\alpha_{n-1}^\omega). \end{aligned}$$

Das Monotonieverhalten der Funktion $L_{\omega+\bar{\delta}_n}$ führt mit (5.14) auf die Relation

$$L_{2\omega}(\varphi; k) < L_{(n-1)\bar{\alpha}_n}(\bar{\alpha}_n) + L_{\omega+\bar{\delta}_n}(\bar{\alpha}_n) = L_{2\omega}(\bar{\alpha}_n).$$

Nach Lemma 5.5 ist also $\alpha > \bar{\alpha}_n$. In der Darstellung (5.18) für $(\varphi; k)$ gilt daher wegen der Zusatznebenbedingung $(-)$ die Ungleichung $q \geq n-1$.

Wir betrachten nun außerdem das Paar $(\bar{\varphi}; \bar{k})$ der Gestalt

$$\bar{\varphi} = (\underbrace{\bar{\alpha}_n, \dots, \bar{\alpha}_n}_{n-1}, \bar{\delta}_n, \underbrace{\alpha_{n-1}^\omega, \dots, \alpha_{n-1}^\omega}_{n-1}), \quad \bar{k} = (n-1) + 1 + (n-1)$$

mit $\bar{\delta}_n$ aus (5.15). Wegen $\sum_j \bar{\varphi}_j = 2\omega$, $L_{2\omega}(\bar{\varphi}; \bar{k}) = L_\omega(\bar{\alpha}_n) + L_\omega(\alpha_{n-1}^\omega) = 2\Lambda$ und $\bar{\delta}_n \leq \bar{\alpha}_n$ ist $(\bar{\varphi}; \bar{k})$ eine zulässige Lösung des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$.

Um die Zielfunktionswerte von $(\varphi; k)$ und $(\bar{\varphi}; \bar{k})$ zu vergleichen, führen wir die Zerlegung $\varphi = (\psi^1, \psi^2)$ mit

$$\psi^1 = (\underbrace{\bar{\alpha}_n, \dots, \bar{\alpha}_n}_{n-1}), \quad \psi^2 = (\underbrace{\bar{\alpha}_n, \dots, \bar{\alpha}_n}_{q-n+1}, \delta, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_p)$$

ein. Zielfunktion und isoperimetrische Nebenbedingung lassen sich den Kompositionsregeln entsprechend zerlegen in

$$F_{2\omega}(\varphi; k) = F_\sigma(\psi^1; n-1) + F_\zeta(\psi; k-n+1)$$

$$L_{2\omega}(\varphi; k) = L_\sigma(\psi^1; n-1) + L_\zeta(\psi; k-n+1)$$

mit $\sigma := (n-1)\bar{\alpha}_n$ und $\zeta := 2\omega - \sigma$. Wegen (5.15) ist $\zeta = \omega + \bar{\delta}_n$. Aus der Struktur von ψ^1 ergibt sich

$$\begin{aligned} L_\sigma(\psi^1; n-1) &= L_\sigma(\bar{\alpha}_n) = l_{n-1}^\sigma \\ F_\sigma(\psi^1; n-1) &= f_\sigma(l_{n-1}^\sigma) = f_{n-1}^\sigma. \end{aligned}$$

Sei nun $\bar{L} := 2\Lambda - l_{n-1}^\sigma$. Wegen $0 < \bar{\delta}_n < \alpha_{n-1}^\omega, \omega = (n-1)\alpha_{n-1}^\omega$ gilt

$$\alpha_n^\zeta = \frac{\zeta}{n} = \frac{(n-1)\alpha_{n-1}^\omega + \bar{\delta}_n}{n} < \alpha_{n-1}^\omega < \alpha_{n-1}^\omega + \frac{\bar{\delta}_n}{n-1} = \frac{\zeta}{n-1} = \alpha_{n-1}^\zeta$$

und folglich $\bar{L} = L_\zeta(\alpha_{n-1}^\omega) \in (l_{n-1}^\zeta, l_n^\zeta)$. Somit ist $(\psi^2; k-n+1)$ eine zulässige Lösung des Verallgemeinerten Favard-Problems $(P_{\bar{L}}^\zeta)$. Nach Satz 2.2 ist $(\bar{\psi}; n)$ mit

$$\bar{\psi} = (\bar{\delta}, \underbrace{\alpha_{n-1}^\omega, \dots, \alpha_{n-1}^\omega}_{n-1})$$

eine bis auf Permutationen der Winkel $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n$ eindeutige Optimallösung dieses Problems. Wegen $\bar{\varphi} = (\psi^1, \bar{\psi})$ ist damit $F_{2\omega}(\bar{\varphi}; 2n-1) \leq F_{2\omega}(\varphi; k)$. Für die Optimallösung (φ, k) von $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$ gilt also $\varphi = \bar{\varphi}, k = 2n-1$ bei geeigneter Nummerierung der $\varphi_j, j = 1, \dots, 2n-1$. Aus den Kompositionsregeln für $F_{2\omega}$ ergibt sich schließlich $F_{2\omega}(\bar{\varphi}; 2n-1) = f_{n-1}^\omega + f_\omega(\bar{l}_n)$. ■

Das zur Optimallösung $(\bar{\varphi}; 2n-1)$ des Problems $(-P_{2\omega}^{2\Lambda})$ gehörende optimale Sektorinpolyeder $P_{2\omega}$ zerfällt also in ein reguläres n -seitiges und ein fastreguläres $(n-1)$ -seitiges Sektorinpolyeder von S_ω mit $L_1 = l_{n-1}^\omega, L_2 = 2\Lambda - l_{n-1}^\omega \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Damit ist das Paar $(l_{n-1}^\omega, 2\Lambda - l_{n-1}^\omega)$ eine globale Minimallösung der Funktion ${}^2f_\omega$ über dem durch Fall 2.2 eingeschränkten Teilbereich des Paar-Aufteilungsproblems $({}^2P_\omega^\Lambda)$.

Die Ergebnisse aus Lemma 5.1, Satz 5.1 und Satz 5.2 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Satz 5.3 Sei $m = 2, \Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ für ein $n \geq 2$ und ${}^2\mathbb{L}^* = (L_1^*, L_2^*)$ eine Optimallösung des Paar-Aufteilungsproblems $({}^2P_\omega^\Lambda)$. Dann gilt $L_1^*, L_2^* \in [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$.

Die Optimallösung des Paar-Aufteilungsproblems ist also auf einem Teilintervall, auf welchem die Funktion f_ω streng konvex-konkav ist, zu suchen.

Allgemeines Umfangsaufteilungsproblem:

Wir wenden uns nun dem Problem $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$ zu. Für $\omega = 2\pi$ und $m \geq 2$ wurde die Struktur flächenminimaler m -Tupel von Kreisinpolyedern in [92] untersucht. Grundlegend hierfür waren die Ergebnisse für $m = 2$ aus [36].

Sei nun allgemein $\omega \in (0, 2\pi]$, $m \geq 2$ und $\Lambda \in [\underline{L}_\omega, \omega)$. Eine optimale Lösung des Umfangsaufteilungsproblems $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$ besitzt nach Lemma 4.1 die gleiche hierarchische Struktur wie eine Lösung des allgemeinen Aufteilungsproblems $({}^m\text{Q}^c)$. Die für Paare von Sektorinpolyedern bewiesenen Sätze ermöglichen die Formulierung folgender notwendiger Optimalitätsbedingung für Lösungen des Umfangsaufteilungsproblems $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$.

Satz 5.4 Sei $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$. Für jede Optimallösung ${}^m\mathbb{L} = (L_1, \dots, L_m)$ des Problems $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$ gilt dann $L_i \in [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Beweis

Sei ${}^m\mathbb{L}$ Optimallösung von $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$. Dann ist die partielle Lösung ${}^m\mathbb{L}_{\{i,j\}} = (L_i, L_j)$ mit $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$, Optimallösung des Problems $({}^2\text{P}_\omega^{\Lambda_{ij}})$ mit

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}(L_i + L_j) \in (l_{n_{ij}-1}^\omega, l_{n_{ij}}^\omega]$$

für ein $n_{ij} \geq 2$. Die partielle Lösung ${}^m\mathbb{L}_{\{j,k\}} = (L_j, L_k), k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$, ist Optimallösung des Problems $({}^2\text{P}_\omega^{\Lambda_{jk}})$ mit Parameter

$$\Lambda_{jk} = \frac{1}{2}(L_j + L_k) \in (l_{n_{jk}-1}^\omega, l_{n_{jk}}^\omega]$$

für ein $n_{jk} \geq 2$. Aus Satz 5.3 folgt dann speziell

$$L_j \in [l_{n_{ij}-1}^\omega, l_{n_{ij}}^\omega] \cap [l_{n_{jk}-1}^\omega, l_{n_{jk}}^\omega].$$

Die paarweise verschiedenen Indizes $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ waren beliebig gewählt. Wegen $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ muss also $n_{ij} = n_{jk} = n$, und folglich $L_i \in [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ für alle $i = 1, \dots, m$ gelten. ■

Mit diesem Resultat lässt sich nun die Lösung des Umfangsaufteilungsproblems $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$ aus der Lösung des allgemeinen Aufteilungsproblems $({}^m\text{Q}^c)$ gemäß Theorem 4.1 herleiten.

Theorem 5.3 Sei $\omega \in (0, 2\pi]$ und $\Lambda \in (\underline{L}_\omega, \omega)$. Dann ist die Struktur einer Optimallösung ${}^m\mathbb{L}^* = (L_1^*, \dots, L_m^*)$ des Umfangsaufteilungsproblems $({}^m\text{P}_\omega^\Lambda)$ mit $L_1^* \leq \dots \leq L_m^*$ folgendermaßen in Abhängigkeit des Parameters Λ gegeben:

Für $n = 2$, also $\Lambda \in [l_1^\omega, l_2^\omega]$, gilt

$$(S0): m_{\mathbb{L}^*} = m_{\mathbb{L}^\sigma}$$

$$\text{für } \Lambda \in (l_1^\omega, l_2^\omega].$$

Für $n \geq 3$ und $\Lambda \in (l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$ existiert eine Folge $\{^k \lambda_n^\omega\}_{k=2}^m$ von Verzweigungsparametern mit

$$^k \lambda_n^\omega \in \left(\frac{1}{k}(l_{n-1}^\omega + (k-1) \cdot ^{k-1} \lambda_n^\omega), ^{k-1} \lambda_n^\omega \right),$$

so dass gilt:

$$(S1): m_{\mathbb{L}^*} = m_{\mathbb{L}^\sigma} = \underbrace{(\Lambda, \dots, \Lambda)}_m$$

$$\text{für } \Lambda \in (l_{n-1}^\omega, ^m \lambda_n^\omega]$$

$$(S2): m_{\mathbb{L}^*} = \underbrace{(l_{n-1}^\omega, \dots, l_{n-1}^\omega)}_{m-(j+1)}, m\Lambda - j \cdot l_n^\omega - (m - (j+1))l_{n-1}^\omega, \underbrace{(l_n^\omega, \dots, l_n^\omega)}_j$$

$$\text{für } \Lambda \in \frac{1}{m}[(m-j)^{m-j} \lambda_n^\omega + j \cdot l_n^\omega, (m - (j+1))l_{n-1}^\omega + (j+1)l_n^\omega]$$

$$\text{und } j \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$(S3): m_{\mathbb{L}^*} = \underbrace{\left(\frac{m\Lambda - (j+1)l_n^\omega}{m - (j+1)}, \dots, \frac{m\Lambda - (j+1)l_n^\omega}{m - (j+1)} \right)}_{m-(j+1)}, \underbrace{(l_n^\omega, \dots, l_n^\omega)}_{j+1}$$

$$\text{für } \Lambda \in \frac{1}{m}[\text{Max}\{(m-j)^{m-j} \lambda_n^\omega + j \cdot l_n^\omega, (m - (j+1))l_{n-1}^\omega + (j+1)l_n^\omega\}],$$

$$(m - (j+1))^{m-(j+1)} \lambda_n^\omega + (j+1)l_n^\omega]$$

$$\text{und } j \in \{0, \dots, m-2\}.$$

Beweis

Nach Satz 5.4 gilt $m_{\mathbb{L}^*} \in [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]^m$. Die Funktion f_ω ist nach Lemma 3.1 auf I_2 streng konvex und auf $I_n, n \geq 3$, streng konvex-konkav mit Wendepunkt $^1 \lambda_n^\omega$ sowie $f_\omega^{(3)}, f_\omega^{(4)} < 0$. Mit der Skalierung (3.33) geht das Problem $({}^m \text{P}_\omega^\Lambda)$ in das Aufteilungsproblem $({}^m \text{Q}^c)$ über.

Für $n = 2$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Konvexität von f_ω auf I_2 . Für $n \geq 3$ sind die Voraussetzungen von Theorem 4.1 mit $\xi_1 = L(^1 \lambda_n^\omega)$ erfüllt. Die Nullstellen $^k \lambda_n^\omega$ der Konvexitätsdefektfunktionen $^k D_n^\omega, k = 2, \dots, m$, von f_ω auf I_n (vgl. (3.37) und (3.34)) genügen dann den rekursiven Bedingungen aus

der Behauptung. In Abhängigkeit vom Parameter $\Lambda \in I_n, n \geq 3$, ergibt sich die Lösungsstruktur von ${}^m\mathbb{L}^*$ aus Theorem 4.1 mittels (3.33). ■

Die symmetrische Lösung ist für $\Lambda \in ({}^m\lambda_n^\omega, {}^1\lambda_n^\omega]$ lokale, aber nicht globale Minimallösung. Für $\Lambda \in ({}^1\lambda_n^\omega, l_n^\omega]$ ist sie lokale Maximallösung. Fällt Λ auf einen Randpunkt der in Theorem 5.3 aufgezeigten Parameterintervalle, so gibt es jeweils zwei unterschiedliche Lösungsstrukturen. Ausgenommen hiervon sind der reguläre Fall $\Lambda = l_n^\omega$, in dem es genau eine optimale Lösung gibt, und die dritte Struktur mit $j = m - 2$, die mit der zweiten Struktur für $j = m - 1$ übereinstimmt. Parameterintervalle der Struktur (S1) und (S3) sind stets nichtleer, ebenso diejenigen der Struktur (S2) für $j = m - 1$ wegen ${}^1\lambda_n^\omega < l_n^\omega$. Für $j \in \{0, \dots, m - 2\}$ können aber die Parameterintervalle der Struktur (S2) für gewisse $n \geq 3$ leer sein. Die folgende asymptotische Aussage untersucht diese Möglichkeit und stützt sich dabei auf Eigenschaften der 'fonction penetrante' f_ω .

Lemma 5.6 Sei $\omega \in (0, 2\pi]$ und $m \geq 2$. Dann gilt für alle $n \geq 7$

$$\frac{m-j}{m} \cdot {}^{m-j}\lambda_n^\omega + \frac{j}{m} \cdot l_n^\omega \leq \frac{m-(j+1)}{m} \cdot l_{n-1}^\omega + \frac{j+1}{m} \cdot l_n^\omega$$

für jedes $j \in \{0, \dots, m - 2\}$.

Beweis

Die behauptete Ungleichung ist äquivalent zu

$${}^{m-j}\lambda_n^\omega \leq \left(1 - \frac{1}{m-j}\right) \cdot l_{n-1}^\omega + \frac{1}{m-j} \cdot l_n^\omega \quad (5.19)$$

für $j \in \{0, \dots, m - 2\}$ und $n \geq 7$. Hierbei bezeichnet ${}^{m-j}\lambda_n^\omega$ die eindeutig bestimmte Nullstelle der Defektfunktion ${}^{m-j}D_n^\omega$ aus (3.35). Unter Beachtung der Beziehungen (3.34), (3.33) und (3.37) lässt sich die Gültigkeit der Ungleichung (5.19) mittels Lemma 3.7 für $\mu = \frac{1}{m-j}$ folgendermaßen nachweisen. Aus Lemma 3.4 ergibt sich zunächst mit der Skalierung $L = L(\mu) = l_{n-1}^\omega + \mu(l_n^\omega - l_{n-1}^\omega)$ für jedes $n \geq 7$ die Ungleichung

$$f_\omega(L(\mu)) \geq \frac{1}{m-j} f_\omega(L(1)) + \left(1 - \frac{1}{m-j}\right) f_\omega(L(0)). \quad (5.20)$$

Hieraus folgt ${}^{m-j}D_n^\omega(L(\mu)) \leq 0$. Nach Lemma 3.7 gilt also die Relation ${}^{m-j}\lambda_n^\omega \leq L(\mu)$. Damit ist (5.19) gezeigt. ■

Nach den Bemerkungen zu Lemma 3.4 bleibt die Aussage von Lemma 5.6 auch für $n = 6$ richtig. Der Beweis ist aber nur für $\omega \in [0, \hat{\omega}]$ mit $\hat{\omega} \approx 6.128 < 2\pi$ erbracht.

n	j	$m-j\lambda_n^\omega$	$(1 - \frac{1}{m-j})l_{n-1}^\omega + \frac{1}{m-j}l_n^\omega$
3	0	1.04019	1.03748
	1	1.04045	1.03858
4	0	1.04291	1.04266
	1	1.04311	1.04305
5	0	1.04454	1.04457
	1	1.04466	1.04475

Tabelle 5.1: Ungleichung (5.19) für $\omega = \frac{\pi}{3}$ und $m = 3$

Für uns ist der Fall $\omega = \frac{\pi}{3}$ von besonderem Interesse. Mit Hilfe der Ungleichung (5.19) läßt sich prüfen, wann die zweite Lösungsstruktur für $n \in \{3, 4, 5\}$ auftritt. Die relevanten Größen dieser Ungleichung sind in Tab. 5.1 zusammengestellt. Ein Vergleich der Werte in der 3. und 4. Spalte dieser Tabelle zeigt, dass die Struktur (S2) für $n = 3, 4$ und $j \in \{0, 1\}$ nicht, für $n \geq 5$ aber stets auftritt. Die Aussage von Lemma 5.6 ist damit für $\omega = \frac{\pi}{3}$ bereits ab $n = 5$ erfüllt.

5.3 Numerik und Beispiele

Um die Verzweigungspunkte für die Lösungsstruktur von Hemmi–Polyedern zu bestimmen, sind die Nullstellen $^k\lambda_n^\omega$ der zur 'fonction penetrante' f_ω gehörenden Konvexitätsdefektfunktionen $^kD_n^\omega$ auf jedem Intervall $I_n^\omega = [l_{n-1}^\omega, l_n^\omega]$, $n \geq 3$, für $k = 2, \dots, m$ zu berechnen. Im Fall $\omega = 2\pi$ und $m = 2$ (Paar–Problem für zwei Kreise) hat FOCKE in [38] eine Newton–Iteration für die charakteristischen Winkel der entsprechenden fastregulären Kreispolyeder vorgeschlagen. Hierauf aufbauend wurden in zwei Diplomarbeiten Computerprogramme zur Berechnung obiger Nullstellen bereitgestellt. Mit dem in [18] implementierten Lösungsalgorithmus können im Fall $m = 2$, $\omega \in (0, 2\pi]$ (Paar–Problem für zwei Sektorinpolyeder), die Parameterwerte $^2\lambda_n^\omega$, $n = 2, \dots, 20$, berechnet werden. Das Programm aus [19] gestattet darüber hinaus die Berechnung der Verzweigungsparameter für $m = 2, \dots, 5$, $\omega \in (0, 2\pi]$ und $n = 2, \dots, 30$ (siehe Tab. 5.2).

Der zugehörige Algorithmus basiert auf folgenden Überlegungen. Zunächst werden die Wendepunkte $^1\lambda_n^\omega \in I_n$, $n \geq 3$, der 'fonction penetrante' f_ω mit Hilfe eines α –Newton–Verfahrens bestimmt. Die Iteration über die Zentriwinkel α lie-

	n	${}^1\lambda_n^\omega$	${}^2\lambda_n^\omega$	${}^2\lambda_n^\omega$
$\omega = 2\pi$	3	4.841229182759	4.781149802531	4.705506391993
	4	5.443310539518	5.418303371589	5.364902005334
	5	5.749730218646	5.744385342917	5.720909572668
	6	5.919419588012	5.917855737553	5.907410698360
	7	6.021097449620	6.020537706569	6.015247749897
	8	6.086130367576	6.085898726378	6.082953567423
	9	6.129975380286	6.129868389892	6.128105892739
	10	6.160823528643	6.160769675756	6.159653317247
	20	6.254829229337	6.254828582375	6.254769871863
	30	6.270946658417	6.270946606643	6.270935708359
$\omega = \frac{\pi}{3}$	3	1.040688511114	1.040450413358	1.040192062429
	4	1.043274926103	1.043114785701	1.042914996012
	5	1.044695461180	1.044661940328	1.044538632024
	6	1.045493875409	1.045485013601	1.045432384556
	7	1.045972672932	1.045969679516	1.045943653450
	8	1.046278280656	1.046277086069	1.046262813669
	9	1.046483837905	1.046483299367	1.046474844637
	10	1.046628166088	1.046627899580	1.046622582538
	20	1.047066104194	1.047066101194	1.047065827582
	30	1.047140858911	1.047140858072	1.047108079060

Tabelle 5.2: Verzweigungsparameter

fert die Nullstelle $\beta_n^\omega \in (\frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n-1})$ der Funktion $f_\omega''(L_\omega(\alpha))$, also nach (3.11) den gesuchten Wert ${}^1\lambda_n^\omega = L_\omega(\beta_n^\omega)$.

Nach Lemma 3.7 können für die Nullstelle ${}^k\lambda_n^\omega$ der Konvexitätsdefektfunktion ${}^kD_\omega^n$ aus (3.35) die folgenden beiden Fälle auftreten:

- (1) ${}^kD_\omega^n(\frac{k-1}{k}l_{n-1}^\omega + \frac{1}{k}l_n^\omega) \leq 0 \implies {}^k\lambda_n^\omega \in (\frac{k-1}{k}l_{n-1}^\omega + \frac{1}{k}{}^1\lambda_n^\omega, \frac{k-1}{k}l_{n-1}^\omega + \frac{1}{k}l_n^\omega]$
- (2) ${}^kD_\omega^n(\frac{k-1}{k}l_{n-1}^\omega + \frac{1}{k}l_n^\omega) > 0 \implies {}^k\lambda_n^\omega \in (\frac{k-1}{k}l_{n-1}^\omega + \frac{1}{k}l_n^\omega, \frac{k-1}{k}{}^1\lambda_n^\omega + \frac{1}{k}l_n^\omega]$.

Aus dem Beweis dieses Lemmas geht hervor, dass die Funktion ${}^kD_\omega^n$ stets streng konkav und streng monoton fallend auf dem für ${}^k\lambda_n^\omega$ jeweils in Betracht kommenden Intervall aus Fall (1) bzw. (2) ist. Bei geeigneter Wahl des Startpunktes ist die

Konvergenz des Λ -Newton-Verfahrens zur Lösung von ${}^k D_\omega^n(\Lambda) = 0$ also gesichert. Da die in dieser Gleichung auftretende 'fonction penetrante' f_ω nur implizit durch (2.37) und (2.38) gegeben ist, wird stattdessen im Fall (1) ein Algorithmus zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned}(k-1)F_\omega(\alpha_{n-1}^\omega) + F_\omega(\beta) - kF_\omega(\alpha) &= 0 \\ (k-1)l_{n-1}^\omega + L_\omega(\beta) - kL_\omega(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

bzw. im Fall (2) zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned}F_\omega(\alpha_n^\omega) + (k-1)F_\omega(\beta) - kF_\omega(\alpha) &= 0 \\ l_n^\omega + (k-1)L_\omega(\beta) - kL_\omega(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

bez. der beiden Zentriwinkel $\alpha, \beta \in (\frac{\omega}{n-1}, \frac{\omega}{n})$ implementiert. Die Funktionen F_ω und L_ω sind durch (2.26) und (2.35) gegeben. Bei der Wahl des Startpunktes werden die rekursiven Relationen zwischen den Verzweigungsparametern aus Theorem 5.3 berücksichtigt. Nach der asymptotischen Aussage von Lemma 5.6 und den anschließenden Bemerkungen tritt ab $n \geq 6$ nur noch Fall (1) auf.

Die folgenden Beispiele veranschaulichen für $m = 3$ die im Theorem 5.3 dargestellte Lösungsverzweigung.

Verzweigungspunkt	Λ -Intervall	Struktur
${}^3\lambda_4^{2\pi} \approx 5.36490$	$(5.19615, 5.36490]$	(S1)
$\frac{2}{3} {}^2\lambda_4^{2\pi} + \frac{1}{3} l_4^{2\pi} \approx 5.49782$	$[5.36490, 5.49782]$	(S3), $j = 0$
$\frac{1}{3} l_3^{2\pi} + \frac{2}{3} l_4^{2\pi} \approx 5.50329$	$[5.49782, 5.50329]$	(S2), $j = 1$
$\frac{11}{3} \lambda_4^{2\pi} + \frac{2}{3} l_4^{2\pi} \approx 5.58567$	$[5.50329, 5.58567]$	(S3), $j = 1$
$l_4^{2\pi} \approx 5.65685$	$[5.58567, 5.65685]$	(S2), $j = 2$

Tabelle 5.3: Lösungsstrukturen im Fall $\omega = 2\pi, n = 4$

Zunächst betrachten wir den Fall $\omega = 2\pi$, also drei Kreise $S_{2\omega}$. Der Gesamtumfang der drei zugehörigen Kreisinpolyeder sei durch $L = 3\Lambda$ mit $\Lambda \in (l_3^{2\pi}, l_4^{2\pi}]$ vorgegeben, wobei $l_3^{2\pi} \approx 5.19615$ und $l_4^{2\pi} \approx 5.65685$ ist. Es ist also $n = 4$. Die möglichen optimalen Strukturen ${}^3\mathbb{L}^*$ sind entsprechend Theorem 5.3 in Tab. 5.3 zusammengestellt. Die numerisch bestimmten Werte für die Verzweigungsparameter können Tab. 5.2 entnommen werden.

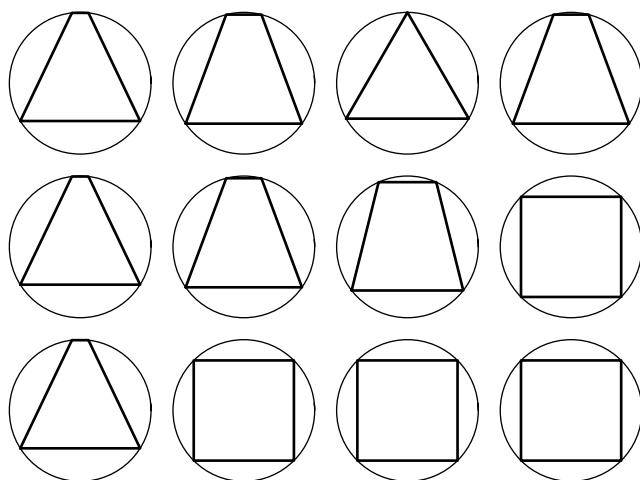


Abbildung 5.1: Tripel von Kreisinpolyedern

Das Parameterintervall der zweiten Lösungsstruktur ist im betrachteten Fall für $j = 0$ leer, da

$$\frac{2}{3} \cdot l_3^{2\pi} + \frac{1}{3} \cdot l_4^{2\pi} \approx 5.34972 < 5.36490 \approx {}^3\lambda_4^{2\pi}$$

gilt. In den Fällen (S3) mit $j = 1$ und (S2) mit $j = 2$ stimmen die Strukturen überein. Die flächenminimalen Tripel fastregulärer Kreisinpolyeder sind in Abb. 5.1 dargestellt.

Für unser Anliegen ist der Fall $\omega = \frac{\pi}{3}$ von besonderem Interesse. Aus den Bemerkungen zu Lemma 5.6 ergibt sich, dass ab $n \geq 5$ alle Lösungsstrukturen (S1) bis (S3) aus Theorem 5.3 auftreten. Für $n = 3, 4, 5$, also Parameterwerte $\Lambda \in (4 \sin \frac{\pi}{12}, 10 \sin \frac{\pi}{30}]$, sind die Strukturen einer optimalen Aufteilung ${}^3\mathbb{L}^* = (L_1^*, L_2^*, L_3^*)$ des Umfangs $L = 3\Lambda$ in Tab. 5.4 zusammengestellt. Entsprechende flächenminimale Tripel von Sektorinpolyedern zeigt Abb. 5.2 für Parameterwerte $\Lambda \in (l_2^{\frac{\pi}{3}}, l_3^{\frac{\pi}{3}}] = (1.03528, 1.04189]$, also $n = 3$. Zu einem Tripel gehören dabei jeweils drei untereinander stehend abgebildete Sektorinpolyeder.

Wir betrachten nun konvexe Figuren mit Durchmesser $D = 1$ und Umfang $L \in (3, \pi)$, die sich aus flächenminimalen Tripeln von Inpolyedern des Einheitskreissektors $\mathcal{S}_{\frac{\pi}{3}}$ zusammensetzen lassen.

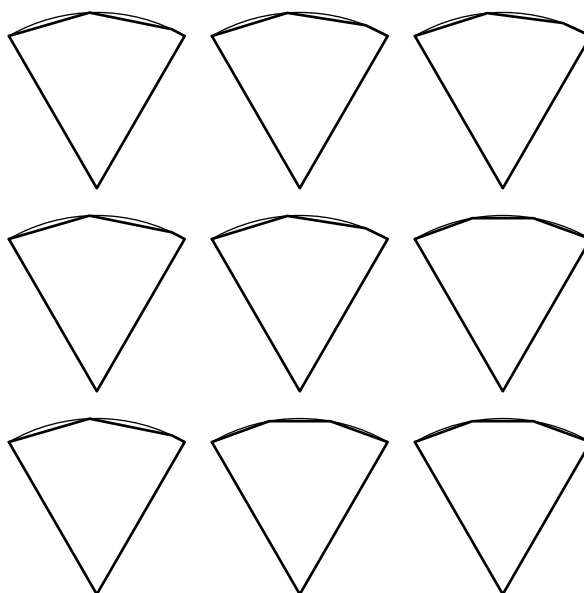


Abbildung 5.2: Tripel von Sektorinpolyedern

Definition 5.1 Ein ebenes konvexes Polyeder P heißt *Hemmi-Polyeder*, falls gilt:

1. Das Polyeder P ist Inpolyeder eines Reuleaux-Dreiecks und Umpolyeder eines gleichseitigen Dreiecks vom selben Durchmesser.
2. Die Randpolygonzüge von P , die zwischen jeweils zwei Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks verlaufen, unterscheiden sich in ihrer Seitenanzahl um höchstens 1.
3. Die Seiten eines solchen Randpolygonzuges aus 2. sind alle gleich lang bis auf eine höchstens kürzere Seite.

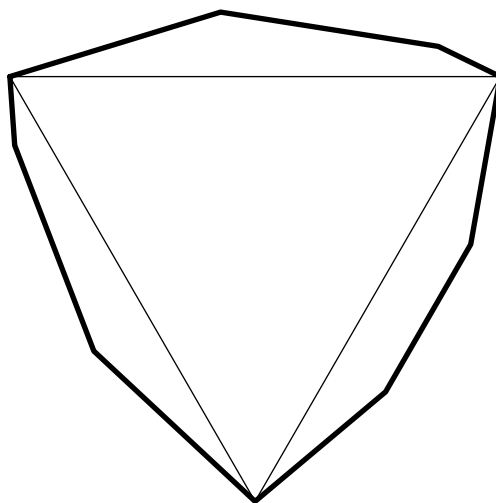
Ein solches Hemmi-Polyeder mit Umfang $L = 3.12058$ und Flächeninhalt $F = 0.663024$ ist in Abb. 5.3 dargestellt. Es resultiert aus der Lösungsstruktur vom zweiten Typ mit $j = 0$. Zu diesem Umfang existiert noch ein weiteres, strukturell von diesem verschiedenes Hemmi-Polyeder gleichen Flächeninhalts, welches sich entsprechend der symmetrischen Umfangsaufteilung aus drei gleichen Sektorinpolyedern zusammensetzt. Ebenfalls zur zweiten Lösungsstruktur, nun aber mit $j = 1$, gehört ein Hemmi-Polyeder vom Umfang $L = 3.12387$ und Flächeninhalt $F = 0.665962$. Alle möglichen Anordnungen derjenigen Seiten dieser

n	Verzweigungspunkt	Λ -Intervall	Struktur
3	${}^3\lambda_{\frac{\pi}{3}} \approx 1.04019$	(1.03528, 1.04019]	(S1)
	$\frac{2}{3} {}^2\lambda_{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} l_{\frac{\pi}{3}} \approx 1.04093$	[1.04019, 1.04093]	(S3), $j = 0$
	$\frac{1}{3} {}^1\lambda_{\frac{\pi}{3}} + \frac{2}{3} l_{\frac{\pi}{3}} \approx 1.04189$	[1.04093, 1.04149]	(S3), $j = 1$
	$l_{\frac{\pi}{3}} \approx 1.04189$	[1.04149, 1.04189]	(S2), $j = 2$
4	${}^3\lambda_{\frac{\pi}{4}} \approx 1.04291$	(1.04189, 1.04291]	(S1)
	$\frac{2}{3} {}^2\lambda_{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3} l_{\frac{\pi}{4}} \approx 1.04348$	[1.04291, 1.04348]	(S3), $j = 0$
	$\frac{1}{3} {}^1\lambda_{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{3} l_{\frac{\pi}{4}} \approx 1.04189$	[1.04348, 1.04390]	(S3), $j = 1$
	$l_{\frac{\pi}{4}} \approx 1.04421$	[1.04390, 1.04421]	(S2), $j = 2$
5	${}^3\lambda_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04454$	(1.04421, 1.04454]	(S1)
	$\frac{2}{3} l_{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3} l_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04457$	[1.04454, 1.04457]	(S2), $j = 0$
	$\frac{2}{3} {}^2\lambda_{\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{3} l_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04487$	[1.04457, 1.04487]	(S3), $j = 0$
	$\frac{1}{3} l_{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{3} l_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04493$	[1.04487, 1.04493]	(S2), $j = 1$
	$\frac{1}{3} {}^1\lambda_{\frac{\pi}{5}} + \frac{2}{3} l_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04509$	[1.04493, 1.04509]	(S3), $j = 1$
	$l_{\frac{\pi}{5}} \approx 1.04528$	[1.04509, 1.04528]	(S2), $j = 2$

 Tabelle 5.4: Lösungsstrukturen im Fall $\omega = \frac{\pi}{3}$, $n = 3, 4, 5$

Figuren, die zu einem Polygonzug zwischen zwei Ecken des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gehören, ergeben weitere Hemmi–Polyeder gleichen Umfangs und Flächeninhalts. Das reguläre 9–seitige Hemmi–Polyeder ist die einzige flächenminimale konvexe Figur unter denjenigen vom Umfang $L = 3.12567$ und Durchmesser $D = 1$. Es besitzt den Flächeninhalt $F = 3 \cdot f_{\frac{\pi}{3}}(1.04189) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.673065$ und setzt sich aus drei regulären 3–seitigen Sektorinpolyedern zusammen (vgl. Abb. 5.4 am Ende dieses Kapitels).

Für ungerades $m > 3$ lassen sich die durch Theorem 5.3 bestimmten m -Tupel fastregulärer Sektorinpolyeder zu flächenkleinsten konvexen Inpolyedern regulärer m -seitiger Reuleaux–Polygone zusammensetzen.

Abbildung 5.3: Hemmi–Polyeder mit $L=3.12058$

5.4 Isoperimetrisch–Isodiametrische Ungleichungen

Wir betrachten nun das Problem $(\underline{P}_{F,\{L,D\}})$ mit $D > 0$ und $L \in [2D, \pi D]$. Allgemein bekannt sind folgende Lösungen:

Flächenkleinste ebene konvexe Figuren vom Durchmesser D und Umfang $L \in [2D, 3D]$ bzw. $L = \pi D$ sind gleichschenklige Dreiecke bzw. das Reuleaux–Dreieck.

Zusammen mit dem Satz von Hemmi-Kubota erhalten wir nun aus Theorem 5.3 eine Bestätigung der von HEMMI in [56, 57] aufgezeigten Lösung dieses Problems für die verbleibenden Umfangsparameter:

Flächenkleinste ebene konvexe Figuren vom Durchmesser D und Umfang $L \in (3D, \pi D)$ sind Hemmi–Polyeder.

Dabei setzt sich ein k -seitiges Hemmi–Polyeder mit $k = 3(n-1) + \sum_{i=1}^3 d_i$, $n \geq 2$, $d_i \in \{0, 1\}$, $\sum_{i=1}^3 d_i \geq 1$, aus drei fastregulären, jeweils $(n-1+d_i)$ -seitigen Inpolyedern eines Kreissektors mit Radius D und Sektorwinkel $\frac{\pi}{3}$ zusammen. Die Strukturen dieser Tripel von Sektorinpolyedern ergeben sich in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{L}{D}$ aus Theorem 5.3, wobei sich die Verzweigungsparameter numerisch aus den Nullstellen der Konvexitätsdefektfunktionen berechnen lassen. Damit ist

das isoperimetrisch–isodiametrische Problem qualitativ und quantitativ vollständig gelöst.

Die Lösung dieser geometrischen Extremalaufgabe ermöglicht die Angabe scharfer unterer Schranken für den Flächeninhalt F einer ebenen konvexen Figur in Abhängigkeit von $D > 0$ und $L \in [2D, \pi D]$. Die sich verzweigende Struktur von Hemmi–Polyedern führt auf einen ganzen Komplex von Ungleichungen, den wir nun zusammenstellen. Dazu zerlegen wir das Parameterintervall $[2D, \pi D]$ für den Umfang L in die entsprechenden Teilintervalle.

Für $2D \leq L \leq 3D$ gilt die von KUBOTA [87] hergeleitete Ungleichung (5.1), also

$$F \geq \frac{1}{4}(L - 2D)\sqrt{L(4D - L)}.$$

Für $3D < L < \pi D$ kann der von HEMMI in [56, 57] angegebene Komplex von Ungleichungen bestätigt werden. Aus (5.6) ergibt sich zunächst formal mit der 'fonction penetrante' $f_{\frac{\pi}{3}}$ eine scharfe untere Schranke für F . Und zwar gilt für beliebiges $D > 0$

$$F \geq \sum_{i=1}^3 f_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{L_i^*}{D}\right) \cdot D^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}D^2. \quad (5.21)$$

Dabei bezeichnet das Tripel $(\frac{L_1^*}{D}, \frac{L_2^*}{D}, \frac{L_3^*}{D})$ eine optimale Lösung des Umfangsaufteilungsproblems $({}^3P_{\frac{\pi}{3}}^{\Lambda})$ mit $L_1^* + L_2^* + L_3^* = L$ und $\Lambda = \frac{L}{3D}$. Aus Theorem 5.3, Lemma 5.6 ergeben sich mit f_{ω} aus (2.37) und (2.38) sowie n aus der Bedingung $\Lambda \in (2(n-1)\sin\frac{\pi}{6(n-1)}, 2n\sin\frac{\pi}{6n}]$ die nachfolgenden Ungleichungen. Die unteren Schranken für F werden von Hemmi–Polyedern angenommen. Diese beschreiben wir durch die Angabe ihrer Seitenzahl und Seitenlängen.

Fall: $3D < L \leq 3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12}$, also $n = 2$.

Es gilt:

$$F \geq \left(\frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ gemäß

$$3\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{L}{2D}.$$

Das 6–seitige Hemmi–Polyeder mit 3 Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$ und 3 Seiten der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2})$ setzt sich aus drei gleichen fastregulären 2–seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

In die weiteren Fallunterscheidungen gehen die Nullstellen ${}^3\lambda_n^{\frac{\pi}{3}}$ bzw. ${}^2\lambda_n^{\frac{\pi}{3}}$ der Defektfunktionen ${}^3D_{\frac{\pi}{3}}^n$ bzw. ${}^2D_{\frac{\pi}{3}}^n$ aus (3.35) ein (vgl. Tab. 5.2).

Fall: $3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12} \leq L \leq 3D \cdot 8 \sin \frac{\pi}{24}$, also $n = 3, 4$.

Hier treten folgende drei Teilfälle auf:

(i) Für $2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} \leq \frac{L}{3D} \leq {}^3\lambda_n^{\frac{\pi}{3}}$ gilt:

$$F \geq \left(\frac{3}{2}(n-1) \sin \alpha + \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha \right) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)} \right)$ gemäß

$$3 \left((n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2} \right) \right) = \frac{L}{2D}.$$

Das $(3n)$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $3(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$ und 3 Seiten der Länge $2D \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2} \right)$ setzt sich aus drei gleichen fastregulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

(ii) Für ${}^3\lambda_n^{\frac{\pi}{3}} \leq \frac{L}{3D} \leq \frac{2}{3} \cdot {}^2\lambda_n^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left((n-1) \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha \right) + \frac{n}{2} \sin \frac{\pi}{3n} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)} \right)$ gemäß

$$2 \left((n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2} \right) \right) + n \sin \frac{\pi}{6n} = \frac{L}{2D}.$$

Das $3n$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $2(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$, 2 Seiten der Länge $2D \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2} \right)$ und n Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ setzt sich aus einem regulären n -seitigen und zwei fastregulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

(iii) Für $\frac{2}{3} \cdot {}^2\lambda_n^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n} \leq \frac{L}{3D} \leq 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left(\frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha \right) + n \sin \frac{\pi}{3n} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)} \right)$ gemäß

$$(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2} \right) + 2n \sin \frac{\pi}{6n} = \frac{L}{2D}.$$

Das $3n$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$, 1 Seite der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ und $2n$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ setzt sich aus einem fastregulären n -seitigen und zwei regulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

Fall: $3D \cdot 8 \sin \frac{\pi}{24} \leq L < \pi D$, also $n \geq 5$.

Hier treten folgende fünf Teilfälle auf:

(i) Für $2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} \leq \frac{L}{3D} \leq {}^3\lambda_n^{\frac{\pi}{3}}$ gilt:

$$F \geq \left(\frac{3}{2}(n-1) \sin \alpha + \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)})$ gemäß

$$3 \left((n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2}\right) \right) = \frac{L}{2D}.$$

Das $(3n)$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $3(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$ und 3 Seiten der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ setzt sich aus drei gleichen fastregulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

(ii) Für ${}^3\lambda_n^{\frac{\pi}{3}} \leq \frac{L}{3D} \leq \frac{2}{3} \cdot 2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left((n-1) \sin \frac{\pi}{3(n-1)} + \frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)})$ gemäß

$$2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + (n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2}\right) = \frac{L}{2D}.$$

Das $(3n-2)$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $2(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6(n-1)}$, $n-1$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$ und 1 Seite der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ setzt sich aus einem fastregulären n -seitigen und zwei regulären $(n-1)$ -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

(iii) Für $\frac{2}{3} \cdot 2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n} \leq \frac{L}{3D} \leq \frac{2}{3} \cdot {}^2\lambda_n^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left((n-1) \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha\right) + \frac{n}{2} \sin \frac{\pi}{3n} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)})$ gemäß

$$2 \left((n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2}\right) \right) + n \sin \frac{\pi}{6n} = \frac{L}{2D}.$$

Das $3n$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $2(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$, 2 Seiten der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ und n Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ setzt sich aus einem regulären n -seitigen und zwei fastregulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

(iv) Für $\frac{2}{3} \cdot 2 \lambda_n^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n} \leq \frac{L}{3D} \leq \frac{1}{3} \cdot 2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + \frac{2}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left(\frac{n-1}{2} \sin \frac{\pi}{3(n-1)} + \frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha) \right. \\ \left. + \frac{n}{2} \sin \frac{\pi}{3n} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)})$ gemäß

$$(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + (n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2}) + n \sin \frac{\pi}{6n} = \frac{L}{2D}.$$

Das $(3n-1)$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $n-1$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6(n-1)}$, n Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$, $(n-1)$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$ und 1 Seite der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ setzt sich aus jeweils einem regulären $(n-1)$ -seitigen und einem regulären n -seitigen sowie einem fastregulären n -seitigen Sektorinpolyeder zusammen.

(v) Für $\frac{1}{3} \cdot 2(n-1) \sin \frac{\pi}{6(n-1)} + \frac{2}{3} \cdot 2n \sin \frac{\pi}{6n} \leq \frac{L}{3D} \leq 2n \sin \frac{\pi}{6n}$ gilt:

$$F \geq \left(\frac{n-1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - (n-1)\alpha) + n \sin \frac{\pi}{3n} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) D^2$$

mit $\alpha \in [\frac{\pi}{3n}, \frac{\pi}{3(n-1)})$ gemäß

$$(n-1) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2}) + 2n \sin \frac{\pi}{6n} = \frac{L}{2D}.$$

Das $3n$ -seitige Hemmi-Polyeder mit $n-1$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\alpha}{2}$, 1 Seite der Länge $2D \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{(n-1)\alpha}{2})$ und $2n$ Seiten der Länge $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ setzt sich aus einem fastregulären n -seitigen und zwei regulären n -seitigen Sektorinpolyedern zusammen.

Für $L = \pi D$ gilt

$$F \geq \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})D^2.$$

Ersetzt man in (5.21) die 'fonction penetrante' f_ω durch ihre konvexe untere Einhüllende \tilde{f}_ω , so geht der Komplex von Ungleichungen aus dem Hauptfall $3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12} \leq L < \pi D$ in eine einzige, mit einer implizit gegebenen Größe behafteten Ungleichung über. Diese ist dann für nichtreguläre Parameterwerte von L , d.h. für alle $L \neq 2n \sin \frac{\pi}{6n}$, $n \geq 3$, allerdings nicht mehr scharf.

Theorem 5.4 Sei B eine konvexe Figur vom Durchmesser $D > 0$ und Umfang $L \in (3D, \pi D)$. Dann gelten für den Flächeninhalt F die folgenden Ungleichungen :

(i) Für $L \in [3D, 3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12}]$ ist

$$F \geq \frac{2+\sqrt{3}}{12} L^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2} D^2.$$

Die untere Schranke wird angenommen für 6–seitige Hemmi–Polyeder mit 3 Seiten der Länge

$$L_2 = \frac{2}{3} \frac{(2-\sqrt{3})L + \sqrt{9(1+(2-\sqrt{3})^2)D^2 - L^2}}{1+(2-\sqrt{3})^2}$$

und 3 Seiten der Länge $L_1 = \frac{L}{3} - L_2$.

(ii) Für $L \in (3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12}, \pi D)$ ist

$$F \geq \left(\frac{L}{4D} \sqrt{4 - \left(\frac{\frac{L}{3D}}{x(\frac{L}{D})} \right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) D^2$$

mit $x(\frac{L}{D}) > 2$ aus

$$\frac{L}{D} = 6x \cdot \sin \frac{\pi}{6x}.$$

Die untere Schranke ist scharf für $x = n$, $n \geq 3$, also für $3n$ –seitige reguläre Hemmi–Polyeder mit Seitenlängen $2D \sin \frac{\pi}{6n}$ und Umfang $L = 6nD \sin \frac{\pi}{6n}$.

Beweis

Für $L \in (3D, 3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12}]$, also $n = 2$, gilt (5.21) mit $L_1^* = L_2^* = L_3^* = \frac{L}{3}$ und $f_{\frac{\pi}{3}}(\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{4} \cot \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{6}$ nach (3.3). Mit $\cot \frac{\pi}{12} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{12}$ und $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{3}$ folgt hieraus die behauptete Ungleichung. Das 6–seitige Hemmi–Polyeder, für welches die untere Schranke angenommen wird, setzt sich aus drei gleichen 2–seitigen fastregulären Sektorinpolyedern zusammen. Die Länge $L_2 = 2D \sin x$ der jeweils größeren Seite lässt sich mit x aus

$$\frac{L}{3D} = 2 \sin x + 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$$

explizit in Abhängigkeit von L und D angeben. Und zwar ergibt sich mit $y = \sin x$ und $\Lambda = \frac{L}{3D}$ hieraus die Bestimmungsgleichung

$$\Lambda = (2 - \sqrt{3})y + \sqrt{1 - y^2}$$

bzw.

$$(1 + (2 - \sqrt{3})^2)y^2 - 2\Lambda(2 - \sqrt{3})y + \Lambda^2 - 1 = 0.$$

Unter Beachtung des Grenzfalles $x = \frac{\pi}{6}$ für $\Lambda = 1$ erhält man

$$y = \frac{(2 - \sqrt{3})\Lambda + \sqrt{1 + (2 - \sqrt{3})^2 - \Lambda^2}}{1 + (2 - \sqrt{3})^2}$$

und folglich

$$L_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})L + \sqrt{9D^2(1 + (2 - \sqrt{3})^2) - L^2}}{1 + (2 - \sqrt{3})^2}.$$

Damit ist die Behauptung (i) gezeigt.

Für $L \in (3D \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12}, \pi D)$, also $n \geq 3$, ersetzen wir im Problem (${}^3P_{\frac{\pi}{3}}^\Lambda$) die Funktion $f_{\frac{\pi}{3}}$ durch $\tilde{f}_{\frac{\pi}{3}}$ aus (3.26) und (3.27). Wegen der Konvexität von $f_{\frac{\pi}{3}}$ ist $L_1^* = L_2^* = L_3^* = \Lambda$ die Minimallösung des so modifizierten Problems. Wir erhalten damit die Ungleichung

$$F \geq 3D^2 \cdot \frac{1}{2}x\left(\frac{L}{D}\right) \sin \frac{\pi}{3x\left(\frac{L}{D}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{3}D^2 \quad (5.22)$$

mit $x\left(\frac{L}{D}\right) > 2$ aus

$$\frac{L}{D} = 6x \sin \frac{\pi}{6x}.$$

Ersetzt man noch

$$\sin \frac{\pi}{3x} = \frac{L}{3Dx} \sqrt{1 - \frac{L^2}{36D^2x^2}}$$

auf der rechten Seite von (5.22), so ist auch die Ungleichung (ii) bewiesen. ■

Ein Vergleich mit der Ungleichung (5.2) von KUBOTA ergibt sich im Fall (i) unmittelbar aus

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{12}L^2 - \frac{2}{3}D^2 > \frac{\sqrt{3}}{4}LD \quad \text{für } L > 3D$$

und im Fall (ii) aus

$$x\left(\frac{L}{D}\right) > \frac{L}{3D} \quad \text{für } x\left(\frac{L}{D}\right) > 2.$$

Der Grenzfall $L = \pi D$ tritt für $x \rightarrow +\infty$ ein. Dabei strebt die untere Schranke von F in (5.22) gegen den Flächeninhalt des Reuleaux–Dreiecks.

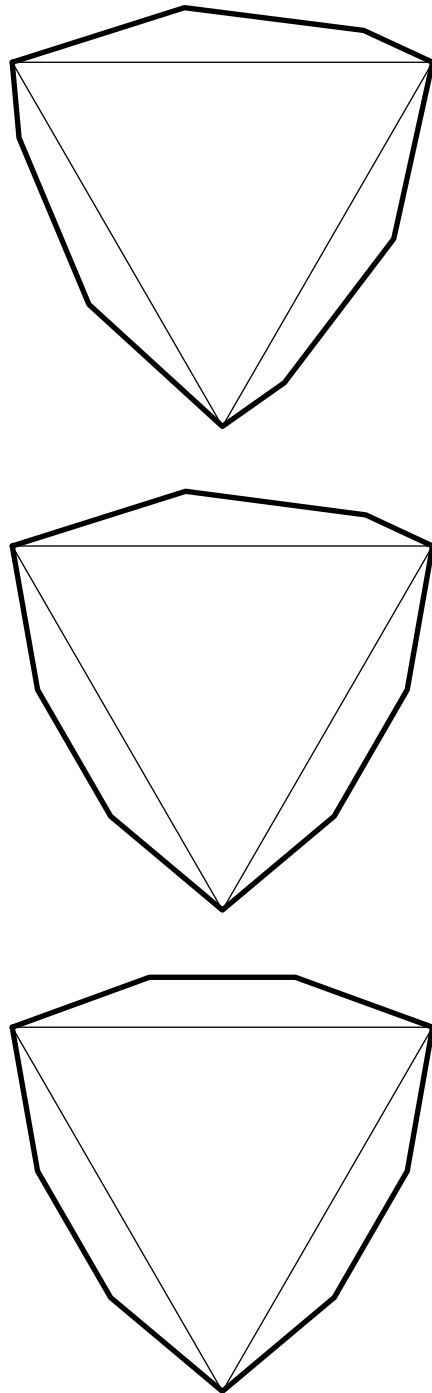


Abbildung 5.4: Hemmi-Polyeder mit $L=3.11359$, $L=3.12387$, $L=3.12567$

Anhang

A.1 Sobolev–Räume und Distributionen

Zur analytischen Behandlung geometrischer Extremalprobleme bettet man den Raum \mathcal{K}^n der konvexen Körper unter Verwendung der Stützfunktion isomorph und isometrisch in einen geeigneten Funktionenraum ein. Dort lässt sich die Aufgabe als Problem der Optimalen Steuerung formulieren. Verallgemeinerungen solcher *Einbettungen* wurden u.a. von RÅDSTRÖM und HÖRMANDER (siehe etwa [113]) untersucht. Wesentlich hierfür ist die Gültigkeit der Kürzungsregel im Raum \mathcal{K}^n .

Die Stützfunktion eines konvexen Körpers ist durch ihre Werte auf der Oberfläche S^{n-1} der Einheitskugel vollständig bestimmt. Sie ist dort stetig und stückweise differenzierbar mit summierbarer erster Ableitung. Um die Existenz von Lösungen für das dem geometrischen Extremalproblem entsprechende Variations- bzw. Steuerproblem zu sichern, ist die Vollständigkeit des betrachteten Raumes unabdingbar. Beschreibt man nun Extremalprobleme für konvexe Körper in einem klassischen Funktionenraum, so wird dabei von vorneherein die Menge der nichtrunden konvexen Körper ausgeblendet. Falls – wie beim isoperimetrisch-isodiametrischen Problem – mit nichtrunden Optimalbereichen zu rechnen ist, so erweist es sich als notwendig, dass Extremum in einer größeren Grundgesamtheit zu suchen. Fasst man dagegen den Krümmungsradius als *verallgemeinerte Funktion* auf, so kann diese Lücke geschlossen werden.

Eine verallgemeinerte Funktion oder auch *Distribution* ist ein lineares stetiges Funktional χ über einem geeigneten *Grundraum* \mathbb{K} , dessen Elemente „hinreichend gute“ Funktionen sind (vgl. [41, 121]). Geeignete Grundräume für Distributionen sind etwa der Raum C_0^∞ aller beliebig oft differenzierbaren *fi*niten Funktionen oder ein Sobolev–Raum $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ *fi*niter Funktionen, die außerhalb von Ω verschwinden und verallgemeinerte Ableitungen der Ordnung m , welche L_p –

summierbar sind, besitzen. Sobolev-Räume erhält man durch Vervollständigung klassischer Funktionenräume bez. Integralnormen. Hier wird nicht der Begriff der Funktion, sondern der Begriff der Ableitung einer Funktion verallgemeinert (vgl. [2, 9, 121]).

Seien $m \geq 0$ und $1 \leq p \leq \infty$ natürliche Zahlen sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge. Die *verallgemeinerte Ableitung* der Ordnung k , $0 \leq k \leq m$, einer reellen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist mittels partieller Integrationsregel durch

$$\int_{\Omega} f^{(k)}(x) \varphi(x) dx := (-1)^k \int_{\Omega} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx \quad (*)$$

erklärt. Es bezeichnet dann der mit der Norm

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} := \sum_{s=0}^m \|f^{(s)}\|_{L_p(\Omega)}$$

versehene Banachraum

$$W_p^m(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) / \forall k \leq m \exists f^{(k)} \in L_p : f^{(0)} = f \text{ mit } (*)\}$$

den *Sobolev-Raum* aller Funktionen mit L_p -summierbaren verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung m .

Verallgemeinerte Funktionen sind für unsere Zwecke reellwertige Distributionen.

Wir wählen als Grundraum den Sobolev-Raum $\overset{\circ}{W}_{\infty}^1(\Omega)$ der fi niten Funktionen mit L_{∞} -summierbaren verallgemeinerten ersten Ableitungen. Die Elemente ψ des Grundraumes heißen *Grundfunktionen*. Distributionen besitzen keine Werte in einzelnen Punkten sondern sind durch lokale Eigenschaften, also durch ihre Wirkung auf eine Grundfunktion in der Umgebung eines Punktes, charakterisiert.

Eine Distribution χ , die mittels einer lokal integrierbaren Funktion f durch

$$\langle \chi, \psi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx$$

erzeugt werden kann, heißt *regulär*. Sie wird dann mit der Funktion f identifiziert. Alle anderen Distributionen heißen *singulär*. So ist z.B. die δ -Distribution δ_{x_0} , die durch

$$\langle \delta_{x_0}, \psi \rangle := \psi(x_0)$$

definiert ist und auch *Dirac'sche δ -Funktion* genannt wird, eine singuläre Distribution. Den Raum aller Distributionen über dem Grundraum \mathbb{K} bezeichnen wir mit $D(\mathbb{K})$. Die von SOBOLEV [116] eingeführten Räume $W_p^m(\Omega)$ sind Banachräume regulärer Distributionen.

Eine Distribution χ ist *gleich Null* auf einer Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 , falls

$$\langle \chi, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{K} \text{ mit } \psi|_{U(x_0)} = 0$$

gilt. So ist z.B. $\delta_{x_0} \neq 0$ auf jeder Umgebung $U(x)$ eines Punktes $x \neq x_0$. Falls es für ein Gebiet $G \subseteq \Omega$ zu jedem $x \in G$ eine Umgebung $U(x)$ mit $\langle \chi, \psi \rangle = 0$ auf $U(x)$ gibt, so sagt man, die Distribution χ ist *gleich Null* im Gebiet G . Ist $\chi \neq 0$ für jede Umgebung eines Punktes x_0 , so heißt x_0 *wesentlicher Punkt* von χ . Die Menge aller wesentlichen Punkte heißt *Träger* der Distribution χ und wird mit $\text{supp}\chi$ bezeichnet. Im Fall $\text{supp}\chi \subseteq G$ sagt man, χ ist *auf G konzentriert*.

Die *Nichtnegativität* einer Distribution ist durch

$$\langle \chi, \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{K}_+$$

mit $\mathbb{K}_+ := \{\psi \in \mathbb{K} / \psi \geq 0\}$ sowie die *Gleichheit* zweier Distributionen χ_1 und χ_2 durch

$$\langle \chi_1, \psi \rangle = \langle \chi_2, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}$$

erklärt. In üblicher Weise werden durch

$$\langle \chi_1 + \chi_2, \psi \rangle = \langle \chi_1, \psi \rangle + \langle \chi_2, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}$$

die *Summe* von Distributionen, durch

$$\langle \alpha\chi, \psi \rangle = \alpha\langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \alpha\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{R},$$

die *Vielfachbildung* einer Distribution mit einer reellen Zahl α und durch

$$\langle a\chi, \psi \rangle = \langle \chi, a\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}, a \in \mathbb{K}$$

die *Multiplikation* einer Distribution mit einer Grundfunktion a eingeführt. Eine Folge $\{\chi_k\}$ von Distributionen heißt *konvergent* gegen die Distribution χ , falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \chi_k, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}$$

gilt. Schließlich benötigen wir noch die *Ableitung* einer Distribution χ . Diese wird durch das Funktional

$$\langle \chi', \psi \rangle := -\langle \chi, \psi' \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K}$$

also durch „partielle Integration“ eingeführt. Die Ableitung einer regulären Distribution lässt sich mit der verallgemeinerten Ableitung der zugeordneten summierbaren Funktion identifizieren. Es gelten die üblichen Differentiationsregeln. Als Beispiel betrachten wir die Ableitung der *Heavyside-Funktion*

$$\theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für sie gilt die Beziehung

$$\langle \theta', \psi \rangle = -\langle \theta, \psi' \rangle = -\int_0^{\infty} \psi'(x) dx = \psi(0) = \langle \delta_0, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{K},$$

also $\theta' = \delta_0$. Dabei bezeichnet δ_0 die im Punkt $x = 0$ konzentrierte δ -Distribution. Solche Distributionen treten bei der Beschreibung nichtrunder konvexer Figuren auf.

A.2 Pontrjagin'sches Maximumprinzip

Als notwendige Optimalitätsbedingung für Probleme der Optimalen Steuerung bildet das Pontrjagin'sche Maximumprinzip eine wesentliche Grundlage der Steuerungstheorie. Parallel und unabhängig voneinander wurde es von PONTRJAGIN und seinen Mitarbeitern BOLTJANSKI, GAMKRELIDSE, MIČENKO [106] sowie von HESTENES [58] zunächst für Probleme mit stückweise stetigen Steuerungen entwickelt. JOFFE und TICHOMIROV [61] ließen später bereits summierbare beschränkte Steuerungen neben sehr allgemeinen Zustandsbeschränkungen zu. Zahlreiche Anwendungen etwa aus den Ingenieurwissenschaften und der Geometrie [31, 71] machten es jedoch erforderlich, noch allgemeinere Steuerungen, die einen „kurzzeitigen kräftigen Impuls“ modellieren, zuzulassen. Steuerungsprobleme, in denen die δ -Distribution oder die Heaviside-Funktion als Koeffizienten auftreten, wurden von SAVALIŠČIN und SESEKIN [111] studiert. KLÖTZLER behandelte dagegen solche Probleme, in denen der Charakter der distributionellen Steuergröße nicht von vornherein festgelegt ist. Er bewies eine Version des Pontrjagin'schen Maximumprinzips, welche auch optimale Prozesse mit distributionellen Steuerungen erfasst.

Wir betrachten die folgende *Klasse distributioneller Steuerprobleme* in Standardform:

$$(DSP) : \quad " I(x, u) := \int_0^T [f_0(t, x(t)) + f_1(t)u(t)] dt " \rightarrow \text{Min!}$$

mit den in u linearen und distributionellen *Zustandsgleichungen*

$${}_1 \dot{x} = A(t, x) + B(t)u, \quad (ZG)$$

den in u linearen und distributionellen *Steuerbeschränkungen*

$${}_1 Cu \leq b, \quad (SB)$$

den regulären *Zustandsbeschränkungen*

$$g_i(t, x(t)) \leq 0 \quad \text{f.ü. auf } [0, T] \quad (ZB)$$

für $i = 1, \dots, k$ und den linearen *Randbedingungen*

$$c_0(x(0)) = 0, \quad c_1(x(T)) = 0. \quad (RB)$$

Es liegt in der Natur der Sache, dieses Problem bez. der distributionellen Steuerung u linear zu formulieren. Ein Paar (x, u) , welches alle Nebenbedingungen erfüllt, heißt *zulässiger Prozess* des Problems (DSP).

An die in der Aufgabe vorkommenden Größen stellt man zunächst die folgenden

Grundvoraussetzungen (GV):

- $f_0 : [0, T] \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$, $A : [0, T] \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $g_i : [0, T] \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ seien stetig und bezüglich des zweiten Arguments stetig differenzierbar.
- $B : [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^{n \times r}$ und $f_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^r$ seien stetig differenzierbar.
- $\text{rang}(B) = r$, $C \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $b \in \mathbb{R}^m$
- $c_\nu : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^{s_\nu}$, $\nu = 0, 1$, seien affi n–lineare Abbildungen.

Außerhalb des Intervalls $[0, T]$ denkt man sich f_0, g_i, A, C, b durch die entsprechende Nullabbildung fortgesetzt.

Des Weiteren benötigt man im entsprechenden Funktionenraum folgende

Zusatzvoraussetzungen (ZV):

Für jede Folge zulässiger Prozesse (x^j, u^j) des Problems (DSP) mit der Eigenschaft $x^j \rightarrow x$ im Raum $L_2^n(0, T)$ gelte:

- $f_0(\cdot, x^j(\cdot)) \rightarrow f_0(\cdot, x(\cdot))$ im Raum $L_2(0, T)$,
- $A(\cdot, x^j(\cdot)) \rightarrow A(\cdot, x(\cdot))$ im Raum $L_2^n(0, T)$,
- $(f_0)_x(\cdot, x^j(\cdot)) \rightarrow (f_0)_x(\cdot, x(\cdot))$ im Raum $L_2^n(0, T)$,
- $A_x(\cdot, x^j(\cdot)) \rightarrow A_x(\cdot, x(\cdot))$ im Raum $L_2^{n \times n}(0, T)$
- $x_\kappa^j \rightarrow x_\kappa$ im Raum $W_2^1(0, T)$ für jene Komponenten $\kappa \in \{1, \dots, n\}$, für die eine Zustandsrestriktion $i \in \{1, \dots, k\}$ existiert mit $(g_i)_{x_\kappa} \neq 0$.

Mit H bezeichnen wir die Pontrjaginfunktion

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda_0) := \lambda_0 (f_0(t, \xi) + f_1(t)v) + \langle \eta, (A(t, \xi) + B(t)v) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

des Problems (DSP) und mit c'_ν die zur Jacobi'schen Funktionalmatrix c'_ν von c_ν transponierte Matrix. Unter einem *regulären zulässigen Prozess* verstehen wir einen zulässigen Prozess (x, u) , für den die Steuerung u eine reguläre Distribution ist.

Sind alle obigen Voraussetzungen erfüllt, dann gilt nach KLÖTZLER [70, 71] die folgende notwendige Bedingung für einen optimalen Prozess (x^*, u^*) des distributionellen Steuerproblems (DSP).

Theorem (Distributionelles Pontrjagin'sches Maximumprinzip)

Zusammen mit (GV) und (ZV) seien die folgenden Voraussetzungen an das Problem (DSP) erfüllt:

1. Zu jedem optimalen Prozess (x^*, u^*) existiere eine Folge regulärer zulässiger Prozesse (\hat{x}^j, \hat{u}^j) mit

$$\begin{aligned} \hat{x}^j &\in W_2^{\circ 1, n} & \text{und} & \quad \hat{x}^j \rightarrow x^* \text{ im Raum } L_{2, loc}^n \\ \hat{u}^j &\in L_{loc}^r & \text{und} & \quad \hat{u}^j \rightarrow u^* \text{ im Raum } D(\mathbb{K}^r). \end{aligned}$$

2. Das Zielfunktional I sei schwach unterhalbstetig auf $L_2^n \times L_2^r$ für alle zulässigen Prozesse (x, u) mit $\|u\| \leq M$ bei beliebig großem $M > 0$. Die Menge solcher Prozesse sei nicht leer.

Dann existieren eine Zahl $\lambda_0 \geq 0$, Vektoren $l_\nu \in \mathbb{E}^{s_\nu}$, $\nu = 0, 1$, eine linksseitig stetige vektorwertige Funktion $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{E}^n$ von beschränkter Variation und nichtnegative reguläre Maße μ_i , $i = 1, \dots, k$, die jeweils auf der Menge $N_i = \{t \in [0, T] / g_i(t, x^*(t)) = 0\}$ konzentriert sind, so dass nicht alle diese Größen gleichzeitig verschwinden sowie

die Maximumbedingung

$$\begin{aligned} \max_{\substack{Cv \leq b, \\ v \in L_\infty^r(0, \omega) \cap D_0(\mathbb{K}^r)}} \langle H(\cdot, x^*(\cdot), v(\cdot), y(\cdot), \lambda_0), \psi \rangle &= \langle H(\cdot, x^*(\cdot), u^*(\cdot), y(\cdot), \lambda_0), \psi \rangle \\ &\text{für alle } \psi \in \mathbb{K}_+ \end{aligned} \quad (\text{M})$$

die kanonischen Gleichungen in integrierter Form

$$\begin{aligned} y(t) &= -c_1'^*(x^*(T))l_1 + \int_t^T H_x(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau), y(\tau), \lambda_0) d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_t^T g_{ix}(\tau, x^*(\tau)) d\mu_i(\tau) \end{aligned} \quad (\text{K})$$

sowie die Transversalitätsbedingungen

$$y(0) = c_0'^*(x^*(0))l_0 \quad (\text{T})$$

in $T = 0$ erfüllt sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Alexandrow, A. D.: *O Powerchnostjach Predstawimych Rasnostju Wypuklych Funkzij*. Iswestija Akademij Nauk Kasachskoj SSR 3 (1949), 3 - 20.
- [2] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [3] Andrejewa, J. A. und Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen*, I und II. ZAMM 64 (1984), 35 - 44 und 147 - 153.
- [4] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin 1992.
- [5] Barbier, E.: *Note sur le probleme de l'aguille et le jeu du joint couvert*. Journ. Math. Pures Appl. 5 (1860) 2, 273 - 286.
- [6] Beckenbach, E. F.: *Generalized Convex Functions*. Bull. Am. Math. Soc. 43 (1937), 336 - 371.
- [7] Berger, M., Berry, J. P., Pansu, P., Saint-Raymond, X.: *Problems in Geometry*. Problem Books in Mathematics (ed. Halmos, P. R.). Springer-Verlag, New York 1984.
- [8] Besicovitch, A. S.: *Variants of a Classical Isoperimetric Problem*. Quart. Journ. Math. Oxford 3 (1952) 2, 42 - 49.
- [9] Blanchard, Ph., Brüning, E.: *Direkte Methoden der Variationsrechnung*. Springer-Verlag, Wien 1982.
- [10] Blaschke, W.: *Kreis und Kugel*. Teubner-Verlag, Leipzig 1916.
- [11] Blaschke, W.: *Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts*. Math. Ann. 76 (1915), 504 - 513.

- [12] Blaschke, W.: *Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite*. Ber. Verh. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 67 (1915), 290 - 297.
- [13] Blaschke, W.: *Eine Frage über konvexe Körper*. Jahresbericht Dt. Math. Ver. 25 (1916), 121-125.
- [14] Böhm, J., Quaisser, E.: *Sphäroformen und symmetrische Körper*. Akademie-Verlag, Berlin 1991.
- [15] Bonnesen, T. und Fenchel, W.: *Theorie der konvexen Körper*. Springer-Verlag, Berlin 1936.
- [16] Bottema, O., Djordjevič, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.: *Geometric Inequalities*. Wolters-Noordhoff Publ., Groningen 1969.
- [17] Boys, C. V.: *Soap Bubbles and the Forces Which Mould them*. Society for Promoting Christian Knowledge, London 1902 (dt. Ausgabe von G. Meyer, Niederuzwil 1983).
- [18] Brach, A.: *Zur Analysis von Favard's 'fonction penetrante'*. Diplomarbeit, Leipzig 1994.
- [19] Bröcker, C.: *Über ein ungeklärtes Optimierungsproblem zu ebenen konvexen Bereichen*. Diplomarbeit. Leipzig 1994.
- [20] Brunn, H.: *Über Ovale und Eiflächen*. Dissertation, München 1887.
- [21] Brunn, H.: *Über Kurven ohne Wendepunkte*. Habilitationsschrift, München 1889.
- [22] Burago, Yu. D. und Zalgaller, V. A.: *Geometric Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [23] Chakerian, G. D. und Groemer, H.: *Convex Bodies of Constant Width*. In: Convexity and its Applications (eds.: P. M. Gruber, J. M. Wills), Birkhäuser-Verlag, Basel 1983, 49 - 96.
- [24] Croft, H. T., Falconer, K. J. und Guy, R. K.: *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, New York 1991.

- [25] Duzaar, F. und Steffen, K.: *Area Minimizing Hypersurfaces with Prescribed Volume and Boundary*. Math. Z. 209 (1992), 581-618.
- [26] Eggleston, H. G.: *Convexity*. Cambridge University Press 1958.
- [27] Euler, L.: *De curvis triangularibus*. Acta Acad. Sci. Imp. Petropolitanae (1778) II, 3 - 30.
- [28] Favard, J. M.: *Problèmes d'Extremums Relatifs aux Courbes Convexes (I)*. Ann. sci. Ec. Norm. 46 (1929) 3, 345 - 369.
- [29] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Springer-Verlag, Berlin 1953.
- [30] Firey, W. J.: *Isoperimetric Ratios of Reuleaux Polygons*. Pacific J. Math. 10 (1960), 823 - 829.
- [31] Fischer, A.: *Geometrische Anwendungen des distributionellen Pontrjagin'schen Maximumprinzips*. Diplomarbeit, Leipzig 1996.
- [32] Florian, A.: *Extremum Problems for Convex Discs and Polyhedras*. In: Handbook of Convex Geometry (eds.: P. M. Gruber, J. M. Wills), North-Holland, Amsterdam 1993, 177 - 221.
- [33] Focke, J.: *Über die Entstehung von Formfehlern beim spitzenlosen Außenrundscheifeln*. Maschinenbautechnik 17 (1968), 7 - 10.
- [34] Focke, J.: *Symmetrische n -Orbiformen kleinsten Inhalts*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), 39 - 68.
- [35] Focke, J.: *Flächenminimale Inpolygone des Einheitskreises und die 'fonction penetrante' von Favard*. Manuskript, Leipzig 1987/88.
- [36] Focke, J.: *Ein Paar flächenminimaler Inpolygone des Einheitskreises*. Manuskript, Leipzig 1988.
- [37] Focke, J.: *Über den Konvexitätsdefekt einer konvex-konkaven Funktion*. Manuskript, Leipzig 1988.
- [38] Focke, J.: *Berechnung der Umschlagstelle Λ^* mit dem Newton-Verfahren*. Manuskript, Leipzig 1989.

- [39] Focke, J.: *Zur Ungleichung der Grobkonvexität der 'fonction penetrante'*. Manuskript, Leipzig 1989.
- [40] Fujiwara, M.: *Analytical Proof of Blaschke's Theorem on the Curve of Constant Breadth with Minimum Area*. I, II. Proc. Imp. Acad. Jap. 3 (1927), 307 - 309; 7 (1931), 300 - 302.
- [41] Gelfand, I. M. und Schilow, G. E.: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)* I. Dt. Verl. Wiss., Berlin 1960.
- [42] Ghandehari, M.: *An Optimal Control Formulation of the Blaschke-Lebesgue-Theorem*. J. Math. Anal. and Appl. 200 (1996), 322 - 331.
- [43] Gritzmann, P. und Klee, V.: *Computational Complexity of Inner and Outer j -Radii of Polytopes in Finite-Dimensional Normed Spaces*. Math. Programming 59 (1993) 2, Ser.A, 163 - 213.
- [44] Gruber, P. M., Wills, J. M.(eds.): *Convexity and its Applications*. Birkhäuser-Verlag, Basel 1983.
- [45] Gruber, P. M., Wills, J. M.(eds.): *Handbook of Convex Geometry*. North-Holland, Amsterdam 1993.
- [46] Hadwiger, H.: *Altes und Neues über konvexe Körper*. Birkhäuser-Verlag, Basel 1955.
- [47] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin 1957.
- [48] Hansen, H. C.: *Den Isoperimetriske Problem Familie*. Normat 1 (1992), 14-23.
- [49] Hartwig, H.: *On Generalized Convex Functions*. Optimization 14 (1983), 49 - 60.
- [50] Hartwig, H.: *Local Boundedness and Continuity of Generalized Convex Functions*. Optimization 26 (1992), 1 - 13.
- [51] Hartwig, H.: *A Note on Roughly Convex Functions*. Optimization 38 (1996), 49 - 60.

- [52] Heil, E. und Martini, H.: *Special Convex Bodies*. In: Handbook of Convex Geometry (eds.: P. M. Gruber, J. M. Wills), North-Holland, Amsterdam 1993, 347 - 385.
- [53] Hemmi, D. und Kubota, T.: *Some Problems of Minima Concerning the Oval*. Journ. Math. Soc. Japan 5 (1953) 3-4, 372-389.
- [54] Hemmi, D.: *On the Minimum Area of Closed Convex Domains with an Assigned Breadth*. Bull. Yamagata Univ. (Nat. Sci.) 2 (1953), 157-170.
- [55] Hemmi, D.: *On a Minimum Problem in the Theory of Ovals*. Bull. Yamagata Univ. (Nat. Sci.) 3 (1953) 1, 1-11.
- [56] Hemmi, D.: *The Minimum Area of Convex Curves for Given Perimeter and Diameter*. Bull. Yamagata Univ. (Nat. Sci.) 3 (1954) 2, 55-76.
- [57] Hemmi, D.: *The Minimum Area of Convex Curves for Given Perimeter and Diameter*. Proc. Japan. Acad. 30 (1954) 9, 791-796.
- [58] Hestenes, M. R.: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Wiley & Sons, New York 1966.
- [59] Hinderer, K. und Stieglitz, M.: *Minimization of Quasi-Konvex Symmetric and of Diskretely Quasi-Konvex Symmetric Functions*. Optimization 36 (1996), 321 - 332.
- [60] Jaglom, I. M. und Boltjanski, W. G.: *Konvexe Figuren*. Dt. Verl. Wiss., Berlin 1956.
- [61] Joffe, A. D., Tichomirov, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*. Dt. Verl. Wiss., Berlin 1956.
- [62] Juhnke, F.: *Inradius und Dicke konvexer Körper aus optimierungstheoretischer Sicht*. Beitr. Alg. und Geom. 27 (1988), 13 - 20.
- [63] Juhnke, F.: *Das Umkugelproblem und lineare semiinfinit Optimierung*. Beitr. Alg. und Geom. 28 (1988), 147 - 156.
- [64] Kawohl, B.: *Was ist eine runde Sache?* GAMM-Mitteilungen 1 (1998), 43 - 56.

- [65] Killingbergtrø, H. G.: *Kommentar til en Detalj ved den Isoperimetriske Problem Familie*. Normat 1 (1992), 24-25.
- [66] Klötzler, R.: *Beweis einer Vermutung über n -Orbiformen kleinsten Inhalts*. ZAMM 55 (1975), 557 - 570.
- [67] Klötzler, R.: *On a General Conception of Duality in Optimal Control*. Proceedings EQUADIFF 4, Prag 1977, 189 - 196.
- [68] Klötzler, R.: *Starke Dualität in der Steuerungstheorie*. Math. Nachrichten 95 (1980), 253 - 263.
- [69] Klötzler, R.: *Zur analytischen Lösung alter und neuer geometrischer Optimierungsprobleme*. Proceedings EQUADIFF 6, Brno 1985, 451 - 458.
- [70] Klötzler, R.: *On a Distributional Version of Pontryagin's Maximum Principle*. Optimization 19 (1988), 413 - 419.
- [71] Klötzler, R.: *Zur Anwendung des Pontryagin'schen Maximumprinzips bei distributiver Steuerung auf eine geometrische Aufgabenklasse*. Z. Anal. und Anw. 7 (1988) 3, 263 - 276.
- [72] Klötzler, R.: *Steuerungstheoretische Behandlung einer Schachtelaufgabe*. Z. Anal. und Anw. 7 (1988) 5, 405-417.
- [73] Klötzler, R.: *Eine neue Variante einer Schachtelaufgabe*. Journ. Appl. Math. and Phys. 40 (1989), 780 - 787.
- [74] Klötzler, R.: *Ein neuer Beitrag zur 'fonction penetrante'*. Manuskripte, Leipzig 1987 - 1989.
- [75] Klötzler, R., Pickenhain, S.: *Universale Rettungskurven, I und II*. Z. Anal. und Anw. 5 (1986) 1, 27 - 38 und 6 (1987) 4, 363 - 369.
- [76] Klötzler, R., Rudolph, H.: *Zur analytischen und algorithmischen Behandlung eines geometrischen Optimierungsproblems von J. Steiner*. Optimization 16 (1985) 6, 833 - 848.
- [77] Kripfganz, A.: *Inpolygons of Minimal Diameter*. Num. Funct. Anal. and Opt. 12 (1991) 5&6, 493 - 505.

- [78] Kripfganz, A.: *The Generalized Favard Problem*. Contrib. Alg. and Geom. 36 (1995) 2, 185 - 202.
- [79] Kripfganz, A.: *Favard's 'Fonction Penetrante' - A Roughly Convex Function*. Optimization 38 (1996), 329 - 342.
- [80] Kripfganz, A.: *An Isoperimetric Partition Problem*. Contrib. Alg. and Geom. 38 (1997) 1, 161 - 181.
- [81] Kripfganz, A.: *Solution Branching of a General Perimeter Partition Problem*. Contrib. Alg. and Geom. 39 (1998) 2, 447 - 459.
- [82] Kripfganz, A.: *Isoperimetric and Isodiametric Area-Minimal Plane Convex Figures*. In: Int. Ser. of Num. Math. (eds.: Heier, K., Bittner, L., Bulirsch, R., Schmidt, W. H.), Vol.124, Birkhäuser-Verlag, Basel 1998, 261 - 270.
- [83] Kripfganz, A.: *About an Inequality of Kubota for Plane Convex Figures*. Contrib. Alg. and Geom. 40 (1999) 1, 53 - 65.
- [84] Kripfganz, A.: *Global Solutions of Partitioning Problems*. Optimization 49 (2001), 161 - 178.
- [85] Krotov, V. F., Gurman, V. I.: *Metody i Sadači optimalnovo upravlenija*. Verlag Nauka, Moskva 1973.
- [86] Kupitz, J., Martini, H. und Wegner, B.: *A Linear-Time Construction of Reuleaux-Polygons*. Contrib. Alg. and Geom. 37 (1996) 2, 415 - 427.
- [87] Kubota, T.: *Einige Ungleichheitsbeziehungen über Eilinen und Eiflächen*. Sci. Rep. Tohoku Univ. 12 (1923), 45-65.
- [88] Kubota, T.: *Eine Ungleichheit für Eilinen*. Math. Zeitschrift 20 (1924), 264-266.
- [89] Lebesgue, H.: *Sur le Problème des Isopérimètres et sur les Domaines de Largeur Constante*. Bull. Soc. Math. France C. R. (1914), 72 - 76.
- [90] Leichtweiß, K.: *Konvexe Mengen*. Dt. Verl. Wiss., Berlin 1980.
- [91] Littlewood, J. E.: *A Mathematician's Miscellany*. Methuan & Co. Ltd., London 1953.

- [92] März, C.: *Minimierung des Gesamtflächeninhalts einer endlichen Anzahl konvexer Mengen mit gleichem Umkreisradius*. Diplomarbeit. Leipzig 1990.
- [93] Marshall, A. W. und Olkin, I.: *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York 1979.
- [94] Meyer, P. A.: *Probabilite's et Potentiel*. Hermann, Paris 1966.
- [95] Minkowski, H.: *Volumen und Oberfläche*. Math. Annalen 57 (1903) bzw. Ges. Abh. Bd. 2, Teubner-Verlag, Leipzig 1911.
- [96] Minkowski, H.: *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*. In: Ges. Abh. Bd. 2, Teubner-Verlag, Leipzig 1911.
- [97] Minkowski, H.: *Geometrie der Zahlen*. Teubner-Verlag, Leipzig 1910.
- [98] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. und Volonec, V.: *Recent Advances in Geometric Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1989.
- [99] Morrey, C. B.: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, Berlin 1966.
- [100] Natanson, I. P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Akademie-Verlag, Berlin 1981.
- [101] Ohmann, D.: *Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene*. Math. Zeitschrift 55 (1952) 3, 346 - 352.
- [102] Phú, H. X.: *γ -Subdifferential and γ -Convexity of Functions on the Real Line*. Applied Math. and Opt. 27 (1993), 145 - 160.
- [103] Phú, H. X.: *Six Kinds of Roughly Convex Functions*. Jota 92 (1997) 2, 361 - 379.
- [104] Phú, H. X. und Hai, N. N.: *Some Analytical Properties of γ -Convex Functions on the Real Line*. Jota 91 (1996) 3, 671 - 694.
- [105] Pólya, G. und Szegő, G.: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton University Press 1951.

- [106] Pontrjagin, L. s., Boltjanski, V. G., Gamkrelidse, R. V., Miščenko, J. F.: *Mamatičeskaja Teorija Optimalnych Processov*. Fismatgis, Moskva 1961.
- [107] Reuleaux, F.: *Theoretische Kinematik, Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens* I. Vieweg, Braunschweig 1875.
- [108] Roberts, A. W. und Varberg, D. E.: *Convex Functions*. Academic Press, New York 1973.
- [109] Sallee, G. T.: *Maximal Areas of Reuleaux Polygons*. *Canad. Math. Bull.* 13 (1970), 175 - 179.
- [110] Santalo, L. A.: *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa plana*. *Math. Notae* 17 (1959/61), 82 - 104.
- [111] Savališčin, S. T., Sesekin, A. N.: *Ob osobych rešenijach v sadačach optimisacij dinamičeskich sistem s kvadratičnym kriteriem kačestva*. *Diff. Uravn.* 11 (1975), 665 - 671.
- [112] Schaible, S. und Ziemba, W. T.: *Generalized Concavity in Optimization and Economics*. Academic Press, New York 1981.
- [113] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press 1993.
- [114] Schwarz, L.: *Théorie des Distributiones*. I, II. Hermann, Paris 1950, 1951.
- [115] Sholander, M.: *On Certain Minimum Problems in the Theory of Convex Sets*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 73 (1952), 139 - 173.
- [116] Sobolev, S. L.: *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin 1964.
- [117] Söllner, B.: *Eigenschaften γ -grobkonvexer Mengen und Funktionen – Untersuchungen zu einer neuen Verallgemeinerung der Konvexität*. Diplomarbeit, Leipzig 1991.
- [118] Steiner, J.: *Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*. I und II. In: *Gesammelte Werke* Bd.II, Berlin 1882, 177 - 240 und 241 - 308.

- [119] Steiner, J.: *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze*. In: In: Gesammelte Werke Bd.II, Berlin 1982, 75 - 91.
- [120] Taylor, J.: *Some Simple Geometrical Extremal Problems*. Math. Gaz. 37 (1953), 188 - 198.
- [121] Triebel, H.: *Höhere Analysis*. Dt. Verl. Wiss. Berlin 1972.
- [122] Tölke, J., Wills, J. M.(eds.): *Contributions to Geometry*. Proc. Geom. Symp. Siegen 1978. Birkhäuser-Verlag, Basel 1979.
- [123] Valentine, F. A.: *Convex Sets*. McGraw-Hill, New York 1964.
- [124] Walter, W.: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. Wiss.-Verl. Bibl. Inst., Mannheim 1974.
- [125] Weiss, M. L.: *Største og mindste diameter i konvekse figurer med givet areal og omkreds*. Normat 32 (1984), 128 - 134.
- [126] Wenthe, H. C.: *A Surprising Bubble Catastrophe*. Pacific Journ. Math. 189 (1999) 2, 339 - 376.
- [127] v.Wolffersdorff, J.: *Optimale Aufteilungen und die Zwei-Blasen-Konfiguration*. Diplomarbeit, Leipzig 1997.

Index

- Auswahlsatz von Blaschke, 13
- Distribution, 12
 - δ -, 11
 - reguläre, 11
- Einbettung, 13
- Gleichdick, 16
- Hausdorff–Metrik, 12
- Körper konstanter Breite, 16
- Kegel
 - abstrakter konvexer, 8
- konvexe Figur, 8
 - Breite, 14
 - Dicke, 14
 - Durchmesser, 14
 - Flächeninhalt, 14
 - Inkreis, 15
 - Inkreisradius, 15
 - Krümmungsradius, 12
 - Stützfunktion, 11
 - Umfang, 14
 - Umkreis, 15
 - Umkreisradius, 15
- konvexer Körper, 8
 - Approximation, 13
 - glatter, 10
 - regulärer, 10
 - runder, 10
 - streng konvexer, 10
- Minkowski–Kalkül
 - Addition, 8
 - Summe, 8
 - additiv, 9
 - linear, 9
- Randpunkt
 - glatter, 10
 - regulärer, 10
 - singulärer, 10
- Raum
 - der Distributionen, 12
 - der konvexen Körper, 8
- Satz
 - von Blaschke, 13
 - von Brunn–Minkowski, 15
- Sobolev–Raum, 12
- Stützfunktion, 9, 11
 - Beispiele, 12
 - Minkowski–linear, 10
- Stützhalfraum, 10
- Stützhyperebene, 10
 - reguläre, 10
 - singuläre, 10
- Stützmenge, 10
- Symmetrisierung, 8

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Habilitationsschrift selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die im Schriftenverzeichnis angeführten Quellen benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, sowie alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Leipzig, den 20. August 2002

Dr. Anita Kripfganz