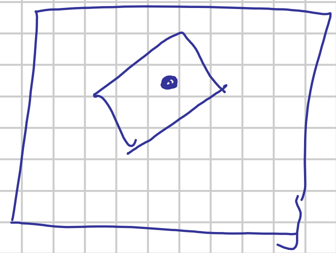
Note Title 01.07.2019

Bem. 1) Anschaulich bedeutet das: Legt man einen kleinen Stadtplan von Leipzig auf einen Großen, dann $\exists!$ Punkt, der in beiden Stadtplänen übereinstimmt.



2) Der Beweis gibt einen Algorithmus an sowie die Fehlerabschätzung

$$\boxed{d(x_n, x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, \varphi(x_0))} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$d(x_n, x_{n+m})$ (lasse $m \to \infty$ gehen im Beweis)

d.h., die Folge (x_n) konv. exponentiell schnell gegen den Fixpunkt

$\lambda^n = e^{n \ln \lambda}$

3) Viele Probleme (z.B. Differential/integralgleichungen) lassen sich als Fixpunktprobleme schreiben (siehe ü'Blatt 13).
Die Schwierigkeit: finde einen passenden vollst. MR und eine passende strikte Kontraktion.

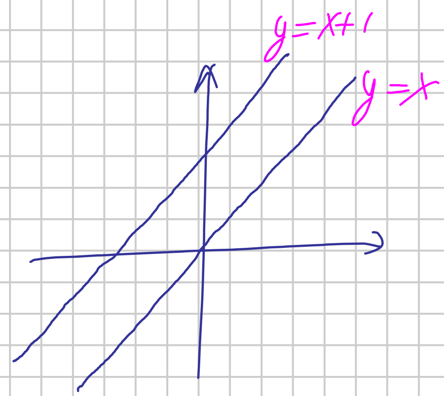
4) $\exists$ viele weitere Fixpunktsätze in vielen Gebieten.

$\boxed{\text{Bsp 6.5}}$ ($\lambda < 1$ ist wichtig)

1) Die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x+1$ hat keinen Fixpunkt, und

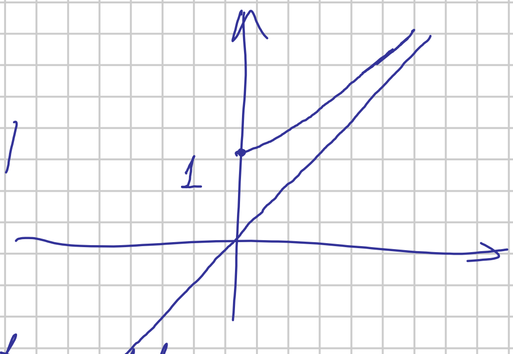
$$|f(x) - f(y)| = |x-y|$$

$\lambda = 1$ hier



2) Auch $f: \underbrace{[0,\infty)}_{\text{vollst. MR}} \to [0,\infty)$, $f(x) := \sqrt{1+x^2}$ hat keinen Fixpunkt (warum?), obwohl

$$|f(x) - f(y)| \underset{\text{für ein } \xi \in [x,y]}{=} |\underbrace{f'(\xi)}_{\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} < 1}| \cdot |x-y| < |x-y|$$



D.h., nur $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ für $x \neq y$ reicht nicht.

$\boxed{\text{Bem. 6.6}}$ 1) Wie in Bsp 6.1,2) zeigt man, dass folgende Räume vollständig bzgl. der Sup-Norm sind:

$$C(K, \mathbb{R}^m) := \{ f: K \to \mathbb{R}^m \text{ stetig} \}$$

K komp. top. Raum

$$C_b(X, \mathbb{R}^m) := \{f : X \to \mathbb{R}^m \text{ stetig, beschränkt}\}$$

top. Raum

insb. gilt: $\forall\, K \subset \mathbb{R}^d$ komp. ist $C(K, \mathbb{R}^m)$ vollst. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

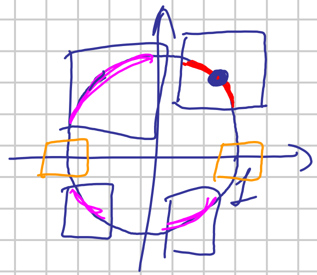
$\forall\, U \subset \mathbb{R}^d$ ist $C_b(U, \mathbb{R}^m)$ – " – .

2) $\left.\begin{array}{l} (M,d) \text{ vollst. MR} \\ A \subset M \text{ abg.} \end{array}\right\} \Rightarrow (A,d)$ vollst. MR (Warum?)

7. Satz über implizite Abbildung

Heuser
(auch Forster gut)

$\boxed{\text{Bsp 7.1}}$ Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$F(x,y) := x^2 + y^2 - 1$



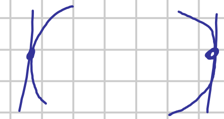
und betrachte $M := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : F(x,y) = 0\}$

Man kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ nicht global nach y auflösen: M ist kein Graph einer Fkt.

Aber <u>lokal</u> geht das!

- $\forall (x,y) \in M$ gilt: $y = \sqrt{1-x^2}$ oder $y = -\sqrt{1-x^2}$
- $\forall (a,b) \in M$ mit $a \notin \{-1,1\}$
  $\exists$ Umgebung $U \times V$ von (a,b) $\exists!\, f: U \to V$
  mit $\underbrace{(x, f(x)) \in M}_{F(x,f(x))=0}$ $\forall x \in U$

  D.h., die Gleichung $F(x,y)=0$ ist <u>lokal</u>
  nach y auflösbar
- Ausnahme: $(-1,0)$, $(1,0)$



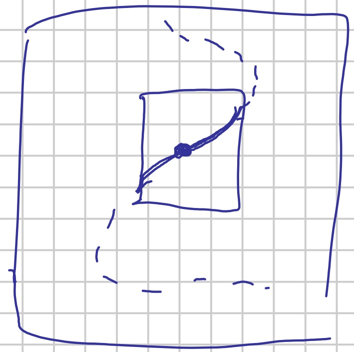
  Beobachtung: $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(1,0)$.

<u>Frage</u>: Wann kann man eine Gleichung
$$F(x,y)=0$$
nach y (lokal) auflösen, d.h., wann $\exists!\, f$ mit (lokal)
$$F(x, f(x)) = 0 \ ?$$

D.h., wann ist die Lösungsmenge von $F(x,y)=0$ lokal der Graph einer Fkt?

Wann ist f stetig / diff'bar / ... ?

$\boxed{\text{Satz 7.2}}$ (über implizite Fkt'en) Cauchy für $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
Dini später für $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ (19. Jahrh.)



Seien $U\subset\mathbb{R}^d$, $V\subset\mathbb{R}^m$ offen und

$$F: U\times V\to\mathbb{R}^m$$

stetig diff'bar. Sei $(a,b)\in U\times V$ s.d.

- $F(a,b)=0$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$ in (a,b) invertierbar ist.

$F(\underset{\mathbb{R}^d}{x},\underset{\mathbb{R}^m}{y})$

Jacobi-Matrix: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \end{array}\right)$

Dann $\exists$ offene Umg. $U_\delta(a)\subset U$, $U_\varepsilon(b)\subset V$

$\exists f: U_\delta(a)\to U_\varepsilon(b)$ stetig mit $f(a)=b$ und

$$\boxed{F(x,f(x))=0 \quad \forall x\in U_\delta(a).}$$

Außerdem gilt:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(x,y)\in U_\delta(a)\times U_\varepsilon(b)\\ F(x,y)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y=f(x)}$$

d. h., $f(x)$ ist die einzige in $U_\varepsilon(b)$ liegende Lösung der Gleichung $F(x,y)=0 \quad \forall\, x\in U_\delta(a)$

<u>Bem.</u> 1) <u>Erinnerung</u>: Eine Matrix $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ heißt invertierbar, wenn es ein $B\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ ex. mit $AB=BA=I = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

Dies entspricht der Invertierbarkeit der zugeh. linearen Abb. (warum?)

Für $m=1$ gilt: A invert. $\Leftrightarrow A\neq 0$.

2) Der Satz ist schon für $d=m=1$ nicht trivial (reicht für Vordiplom bei mir)

<u>Beweis</u> <u>Idee</u>: Schreibe $F(x,y)=0$ als ein Fixpunktproblem.

Def. $B := \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ – invert. $(m\times m)$-Matrix.

Gesucht: f mit $F(x, f(x)) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{f(x)}_{m\times 1} - \underbrace{\underbrace{B^{-1}}_{m\times m} \cdot \underbrace{F(x, f(x))}_{m\times 1}}_{m\times 1} = \underbrace{f(x)}_{m\times 1}$$

<u>Intuitiv</u>: Dies ist ein Fixpunktproblem der Form

$$Af = f$$

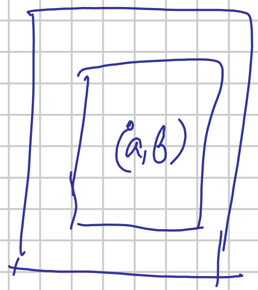
für $\underbrace{A: \text{Fkt} \to \text{Fkt}}_{\text{wird später formal def.}}$ mit

$$(Ag)(x) := g(x) - B^{-1} F(x, g(x)).$$

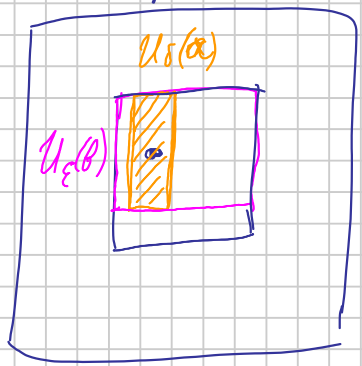
Nach Vorauss. haben wir:

- $B^{-1} F(a, b) = 0$. $\left(B^{-1} z = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \right)$ da B^{-1} invert. – warum?
- $B^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \overset{\text{Def. von } B}{=} I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Da F stetig diff'bar ist, $\exists$ off. Umg. $U_1 \subset U$ von a und $V_1 \subset V$ von b mit



(1) $$\left\| I - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y)\in U_1\times V_1,$$

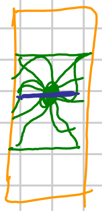


Wähle ein $\varepsilon>0$ mit $U_\varepsilon(b)\subset V_1$.

Da F stetig ist, $\exists\, U_\delta(a)\subset U_1$ mit

(2) $$\| B^{-1}F(x,b)\| \leq \varepsilon/4 \quad \forall x\in U_\delta(a).$$

Betrachte



$$M := \{ g: U_\delta(a)\to U_\varepsilon(b) \text{ stetig} : g(a)=b \text{ und } \|g(x)-b\|\leq \varepsilon/2 \ \forall x\in U_\delta(a)\}$$

- $M\neq\emptyset$, da $x\mapsto b$ in M ist.
- M ist eine abg. Teilmenge von $C_b(U_\delta(a),\mathbb{R}^m)$
  warum?

  $\Rightarrow$ M ist ein vollst. MR.

Wir zeigen: $A: M\to M$ strikt kontraktiv, wobei

$$\boxed{(Ag)(x) := g(x) - B^{-1}F(x,g(x)),}$$

Sei $g \in M$. Dann ist Ag stetig (Kettenregel)

und erfüllt $(Ag)(a) = \underbrace{g(a)}_{=b} - \underbrace{B^{-1}F(a, \underbrace{g(a)}_{=b})}_{=0} = b$

ZZ: $\|(Ag)(x) - b\| \leq \varepsilon/2 \quad \forall x \in U_\delta(a)$ und A strikt kontr.

Sei $x \in U_\delta(a)$ fest und betr.

$$\varphi(y) := y - B^{-1}F(x,y)$$

$$\varphi : U_\varepsilon(b) \to \mathbb{R}^m$$

Es gilt: $\boxed{(Ag)(x) = \varphi(g(x))}$

Nach Vorauss. ist φ ~~diff'bar~~ stetig diff'bar mit

$$\varphi'(y) = I - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \quad \text{(Warum?)}$$

Nach (1) gilt also $\|\varphi'(y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in U_\varepsilon(b)$

Schrankensatz (MWS 3.3):

(3) $\boxed{\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in U_\varepsilon(b)}$

Also haben wir:

$$\|(Ag_1)(x) - (Ag_2)(x)\| = \|\Phi(g_1(x)) - \Phi(g_2(x))\| \leq \frac{1}{2}\|g_1(x) - g_2(x)\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|_\infty.$$

insb. gilt $\boxed{\|Ag_1 - Ag_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|_\infty}$ $\forall g_1, g_2 \in M$

- A ist strikt kontr.

zz noch: $\|(Ag)(x) - b\| \leq \varepsilon/2 \quad \forall x \in U_\delta(a)$ (insb. gilt dann $Ag: U_\delta(a) \to U_\varepsilon(b)$)

Sei $b \cdot \mathbb{1}$ die konstante Fkt $x \mapsto b$ auf $U_\delta(a)$.

Erinnere: $A(b\mathbb{1})(x) = (b\mathbb{1})(x) - B^{-1}F(x, (b\mathbb{1})(x))$

Es gilt $\forall g \in M \quad \forall x \in U_\delta(a)$

$$\|(Ag)(x) - b\| \leq \underbrace{\|Ag - A(b\mathbb{1})\|_\infty}_{\substack{\leq \frac{1}{2}\|g - b\|_\infty \leq \varepsilon/4, \\ \text{da } g \in M}} + \underbrace{\|A(b\mathbb{1})(x) - b\|}_{\substack{= \|B^{-1}F(x,b)\| \leq \varepsilon/4 \\ \text{nach (2)}}} \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2,$$

d.h., $Ag \in M$

Banachscher Fixpunktsatz: $\exists f: U_\delta(a) \to U_\varepsilon(b)$ stetig, $f(a) = b$ mit
$$Af = f \iff F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U_\delta(a).$$

__Eindeutigkeit__: Sei $(x,y) \in U_\delta(a) \times U_\varepsilon(b)$ mit $F(x,y)=0$.

Dann gilt $\Phi(y) = y - B^{-1}\underbrace{F(x,y)}_{=0} = y$ und $\Phi(f(x)) = f(x) - B^{-1}\cdot 0 = f(x)$

Nach (3) gilt:

$$\underbrace{\|y-f(x)\|} = \|\Phi(y) - \Phi(f(x))\| \leq \underbrace{\tfrac{1}{2}\|y-f(x)\|}$$

$\Rightarrow \; y = f(x)$. ∎

$\boxed{\text{Satz 7.3}}$ __(Differenzierbarkeit implizit def. Fkt'en)__

Seien (a,b), F, f wie in Satz 7.2. Dann ist f __diff'bar__ in (a,b) mit

$$\boxed{\underbrace{f'(a)}_{m\times d} = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}}_{m\times m} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}_{m\times d}}$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}$

$\left(\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}} \; \boxed{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)$

__Beweis__ Wir zeigen zuerst: $\exists f'(a)$

Sei oBdA $a=0$ und $b=0$ (sonst betrachte $\tilde{F}: U_\delta(0) \to U_\varepsilon(0)$, $\tilde{F}(x,y) = F(x+a, y+b)$)

Insb. gilt: $f(0)=0$.

Betrachte

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \|x\| + \|y\| \quad - \text{Norm auf } \mathbb{R}^{d+m}$$

warum?

und def.

$$D_1 := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0), \quad D_2 := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$$

Wir wissen: F ist diff'bar in 0:

$$F(z) = \underbrace{F'(0)\cdot z}_{D_1 x + D_2 y \text{ (warum?)}} + r(z) \quad \text{mit} \quad \underbrace{\lim_{z\to 0} \frac{r(z)}{\|z\|} = 0}_{\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{r(x,y)}{\|x\|+\|y\|} = 0}.$$

$(D_1\ D_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Für $x \in U_\delta(0)$ gilt $F(x, f(x)) = 0$, d.h.,

$$0 = D_1 x + D_2 f(x) + r(x, f(x)),$$

d.h.,

$$\boxed{f(x) - f(0) = f(x) = -\underbrace{D_2^{-1} D_1 x}_{\text{linear in } x} - D_2^{-1} r(x, f(x))} \quad (1)$$

zz: $\frac{D_2^{-1} r(x, f(x))}{\|x\|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, d. h., $\frac{r(x,f(x))}{\|x\|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. (Warum?)

Da $\boxed{\lim_{x,y\to 0} \frac{r(x,y)}{\|x\|+\|y\|} = 0}$ (2),

$\exists\, \delta_1 \in (0,\delta)\ \exists\, \varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ mit

$$\|r(x,y)\| \le \frac{1}{2\cdot\|D_2^{-1}\|}(\|x\|+\|y\|) \quad \forall x \in U_{\delta_1}(0),\ \forall y \in U_{\varepsilon_1}(0)$$

Da f stetig in 0 mit $f(0)=0$ ist, $\exists\, \delta_2 \in (0,\delta_1)$:

$$x \in U_{\delta_2}(0) \Rightarrow \|f(x)\| \le \varepsilon_1$$

Also gilt $\forall x \in U_{\delta_2}(0)$:

$$\|r(x,f(x))\| \le \frac{1}{2\|D_2^{-1}\|}(\|x\|+\|f(x)\|).$$

da $f(x) \in U_{\varepsilon_1}(0)$

Nach (1) haben wir:

$$\|f(x)\| \le \|D_2^{-1}D_1\|\cdot\|x\| + \cancel{\|D_2^{-1}\|}\cdot\frac{\|x\|+\|f(x)\|}{2\,\cancel{\|D_2^{-1}\|}}$$

$$= \left(\|D_2^{-1}D_1\| + \frac{1}{2}\right)\cdot\|x\| + \frac{\|f(x)\|}{2},$$

d.h., $\quad \|f(x)\| \le \underbrace{\left(2\|D_2^{-1}D_1\|+1\right)}_{=:c} \|x\|$

Insgesamt gilt, sobald $x \neq 0$,

$$0 \le \frac{\|r(x,f(x))\|}{\|x\|} = (1+c)\frac{\|r(x,f(x))\|}{\|x\| + c\cdot\|x\|} \le (1+c)\frac{\|r(x,f(x))\|}{\|x\|+\|f(x)\|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

nach (2), da $f(x) \to 0$

Also ist f in $(0,0)$ diff'bar mit

$$f'(0) = -D_2^{-1}D_1.$$

∎

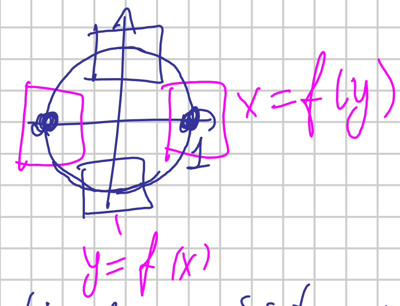
$\boxed{\text{Bem. 7.4}}$ 0) Die Formel für $f'(a)$ folgt aus $F(x,f(x)) = 0$ und der Kettenregel (formal):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\cdot f'(a) = 0$$

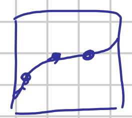
1) Man kann also $f'(a)$ berechnen, ohne f explizit zu kennen

2) Wenn $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ nicht invert. ist, aber $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ invertierbar ist, dann kann man $F(x,y)=0$ nach x auflösen!

Bsp: $x^2+y^2-1=0$



3) Wenn $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar ist und F stetig diff'bar, dann $\exists$ Umgebung von (a,b), wo $\frac{\partial F}{\partial y}$ invertierbar ist



(z.B. mit der Determinante argumentieren).

Damit ist f in einer (eventuell noch kleineren Umgebung von (a,b)) diff'bar und sogar <u>stetig diff'bar</u>:

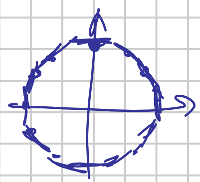
$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right)$$

Details: Mii

4) Man kann insb. Höhenlinien / Niveaumengen von Fkt'en

$F: \underset{\subset \mathbb{R}^2}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$

x^2+y^2



$$N_f(c) = \{(x,y) \in U : F(x,y) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

untersuchen und skizzieren, bzw. Niveauflächen für

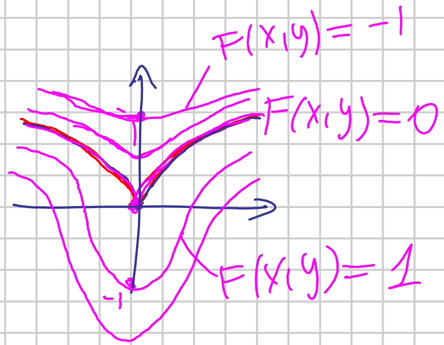
$F: \underset{\subset \mathbb{R}^3}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $F(x,y) = x^2 - y^3$

im Punkt $(0,0)$ gilt

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ und

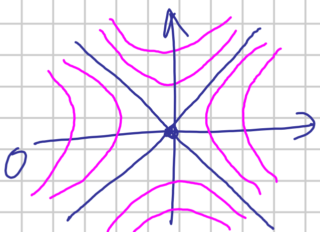
$F(x,y)=0$ stellt in keiner Umgebung von $(0,0)$ den Graphen einer diff'baren Fkt dar (aber immer noch stetigen!)



(Warum?)

2) $F(x,y) = x^2 - y^2$

im Punkt $(0,0)$ gilt $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

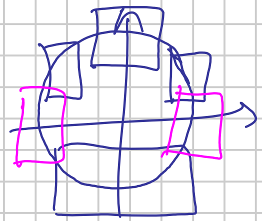


(Warum?)

und $\nexists$ Umg. von $(0,0)$, wo $F(x,y)=0$ nach x oder nach y auflösbar ist.

Bem. Oft $\nexists$ globale Fkt f:

Bsp: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



$\boxed{\text{Bem. 7.5}}$ Erinnerung (Lin A): Für eine Matrix A kann man A^{-1} mit dem Gauß-Algorithmus berechnen, d.h.,

Einträge von A^{-1} sind Kombinationen von Einträgen von A.
Linearkomb. und Division

Also folgt aus Bem. 7.4 3) und der Formel

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

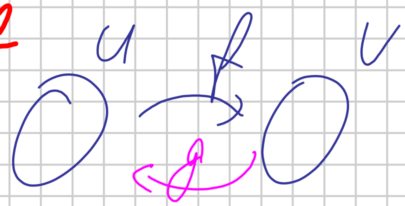
induktiv:

F k-mal stetig diff'bar $\Rightarrow$ f auch

F ∞-oft — " — $\Rightarrow$ f auch.

Heuser
Forster —

8. Satz über die Umkehrfunktion



Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ und $f: U \to V$

Fragen:

- Wann ist f invertierbar?
- Wenn f stetig/diff'bar/... ist, ist f^{-1} das auch?

Beobachtung 8.1 Sei $f: U \to V$ diff'bar mit diff'barer Umkehrfkt $g: V \to U$. Dann haben wir

$g \circ f = id_U$ $\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow}$ $g'(f(a)) \cdot f'(a) = I$ — warum?

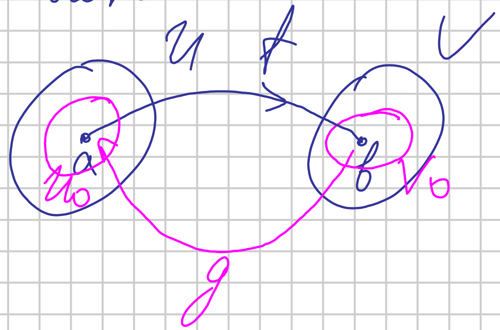
$$f \circ g = id_V \implies \underbrace{f'(a) g'(f(a))}_{\text{Kettenregel}} = I$$

$g(b)$, $f(a) =: b$

Also muss $f'(a)$ invertierbar sein.

$\boxed{\text{Satz 8.2}}$ (über die Umkehrfkt)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig diff'bar.



Sei $a \in U$ und $b := f(a)$. Wenn $f'(a)$ invertierbar ist, dann $\exists$ offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a $\exists$ off. Umgebung $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ von b s.d.

$$f: U_0 \to V_0$$

bijektiv ist und die Umkehrabb.

$$g := f^{-1}: V_0 \to U_0$$

stetig diff'bar mit $\boxed{g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}}$ $\forall x \in U_0$.

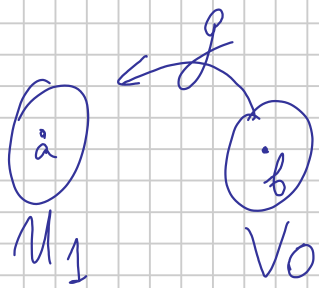
insb. gilt $g'(b) = (f'(a))^{-1}$

__Beweis__ __idee:__ Löse die Gleichung $f(x) - y = 0$ nach x auf

Def. $F: U \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch $F(x,y) := f(x) - y$

Wir haben:
- $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$
- $F(a,b) = 0$
- F ist stetig diff'bar (Warum?)
- $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = f'(a)$ ist invert. nach Vorauss.

Satz 7.3 + Bem. 7.4, 3):



$\exists$ off. Umg. $U_1 \subset U$ von a

$\exists$ –"– V_0 von b

$\exists$ stetig diff'bare Fkt $g: V_0 \to U_1$ mit $g(b) = a$ und

$$F(g(y), y) = f(g(y)) - y = 0 \quad \forall y \in V_0 \qquad (1)$$

Außerdem gilt:

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y) = 0 \ \text{(d.h., } f(x) = y\text{)} \\ y \in V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = g(y) \qquad (2)$$

Betrachte $U_0 := \underbrace{U_1}_{\text{offen}} \cap \underbrace{f^{-1}(V_0)}_{\text{offen, da } f \text{ stetig}} = \{x \in U_1 : f(x) \in V_0\} \subset U_1$

Es gelten: $\mathcal{U}_0$ offen, $a \in \mathcal{U}_0$ und $f(\mathcal{U}_0) \subset V_0$
(da $f(a) = b \in V_0$)

Wir zeigen: $f(\mathcal{U}_0) = V_0$.

Sei $y \in V_0$. Dann gilt nach $f(g(y)) = y$,

d.h., $g(y) \in f^{-1}(V_0) \cap \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0$

$\Rightarrow$ $f : \mathcal{U}_0 \to V_0$ surj.

Außerdem ist $f : \mathcal{U}_0 \to V_0$ inj nach (2), d.h., $f : \mathcal{U}_0 \to V_0$ bij.

mit stetig diff'barer inversen $g : V_0 \to \mathcal{U}_0$.

Die Formel für die Ableitung von g folgt aus der Kettenregel (siehe Beob. 8.1). ∎

Bem. 1) Der Satz besagt also: $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig diff'bar,

$f'(a)$ invert. $\Rightarrow$ $\exists\, \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ Umg. von a, $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ Umg. von $f(a)$ s.d.

$f : \mathcal{U}_0 \to V_0$

ein (C^1)-Diffeomorphismus ist

f bij, stetig diff'bar, f^{-1} stetig diff'bar

2) Wie in Bem. 7.5 folgen aus

$$g'(y) = \left(f'(g(y))\right)^{-1}$$

induktiv die Implikationen

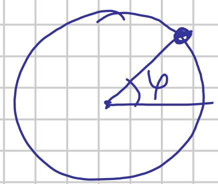
f ist k-mal stetig diff'bar $\Rightarrow$ f^{-1} auch

f ist ∞-oft —"— $\Rightarrow$ f^{-1} auch

$\boxed{\text{Bsp } 8.3}$ (ebene Polarkoordinaten)

Betr. $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$



f' ist gegeben durch

$$f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

– f ist ∞-oft stetig diff'bar!

Die Ableitung ist invertierbar:

$$\left(f'(r,\varphi)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

Für $f(r,\varphi) =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

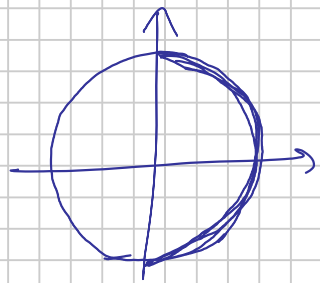
also folgt:

$$\left(f'(r,\varphi)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= g'(x,y),$$

wobei g eine <u>lokale</u> Umkehrfkt von f ist.

Dabei kann man g explizit berechnen:



Sei $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann gilt

$$g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right)$$

$$g: (0,\infty)\times\mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

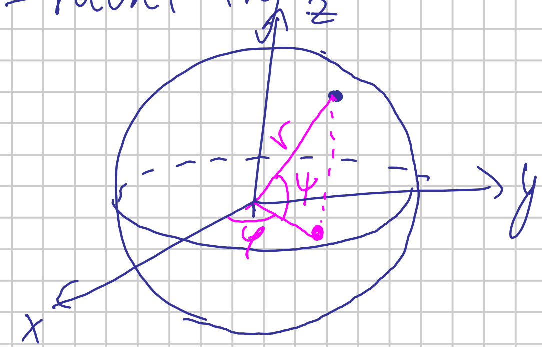
<u>Achtung</u>: f ist nicht global umkehrbar!

$$f(r,\varphi) = f(r,\varphi+2\pi) \quad \forall \varphi, r \quad \text{- nicht inj.}$$

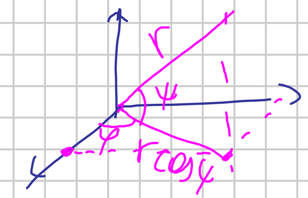
$\boxed{\text{Bsp 8.4}}$ (<u>Kugelkoordinaten</u>)

Betr. $f: (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

$$f(r,\varphi,\psi) := \begin{pmatrix} r\cos\psi\cos\varphi \\ r\cos\psi\sin\varphi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}$$



Analog zu ebenen Polarkoordinaten hat f keine globale Umkehrfkt (nicht inj), aber eine lokale Umkehrfkt in jedem Punkt aus $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$

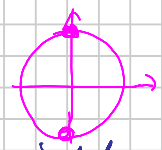


z.B.

$$g(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arctan\frac{y}{x},\ \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$g: (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Hier gilt: $f'(r,\varphi,\psi)$ inv. $\iff \cos\psi \neq 0$.



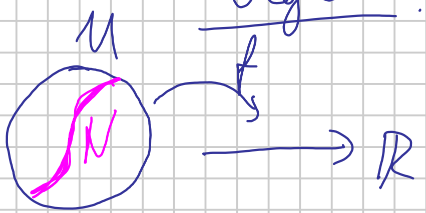
Falls $\cos\psi = 0$, d.h., $x=y=0$, dann ist φ nicht eindeutig, d.h., f nicht inj.

Heuser (Beweis)
Formulierung:
Forster, Königsberger

9. Extrema unter Nebenbedingungen

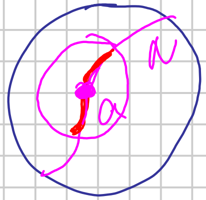
Gegeben: $f: \underset{\subset \mathbb{R}^d}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1, \dots, g_k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k < d)$

$N := \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$



Gesucht: Extremalpunkte von $f|_N$

Def. 9.1 Für $f, g_1, \dots, g_k$ und N wie oben heißt $a \in N$ ein lokales Maximum bzw. Minimum unter Nebenbedingung $\{g_1 = \dots = g_k = 0\}$, wenn:



$\exists$ off. Umg. $U_0 \subset U$ von a: $\forall x \in U_0 \cap N$ $f(x) \leq f(a)$

bzw. $f(x) \geq f(a)$

Lok. Extremum unter... := lok. Max. oder Min. unter...

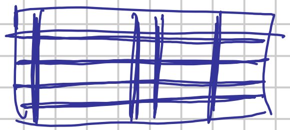
Bem. Man braucht eine Unabhängigkeitsbedingung für $g_1, \dots, g_k$, s.d. man kein g_j weglassen kann.

Erinnere (LinA) Für eine Matrix $A \times M_{k \times d}$, $k < d$ $\boxed{}$ gilt:

Rang $A = k$ (maximal) $\iff$ alle Zeilen von A sind lin. unabh.

$\iff$ $\exists$ k lin. unabh. Spalten

$\iff$ $\exists$ invert. $k \times k$ Untermatrix



Für $(1 \times d)$-Matrizen heißt das $\boxed{}$: $A \neq 0$.

Satz 9.2 (Lagrangesche Multiplikatorenregel)

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^k$ $(k < d)$

stetig diff'bar, $N := \{x \in U : g(x) = 0\}$ und $a \in N$ mit

$$\operatorname{Rang} \underbrace{g'(a)}_{k \times d} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix} = k.$$

Wenn a ein lokales Extremum unter Nebenbed. $\{g = 0\}$ ist,

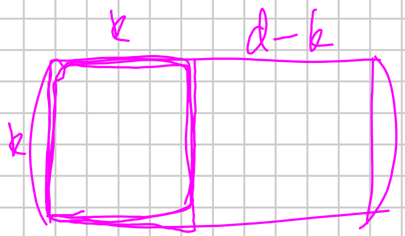
dann $\boxed{\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}}$ (Lagrangesche Multiplikatoren) mit

$$\boxed{\underbrace{f'(a)}_{1 \times d} + \lambda_1 \underbrace{g_1'(a)}_{1 \times d} + \dots + \lambda_k \underbrace{g_k'(a)}_{1 \times d} = 0},$$

d.h.,

$$\nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(a) = 0.$$

<ins>Beweis</ins> Sei oBdA $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$ invert. (sonst numeriere $x_1, \dots, x_d$ entsprechend um)



Schreibe $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{R}^k \\ \in \mathbb{R}^{d-k} \end{matrix}$, $a = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{R}^k \\ \in \mathbb{R}^{d-k} \end{matrix}$

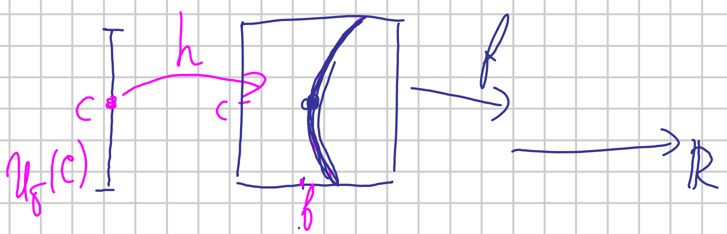
Nach Voraus. gilt

- $g(b, c) = 0 \quad (a \in N)$
- $\frac{\partial}{\partial y} g(b, c)$ invert.

Sätze über impl. Fkt'en: Wir können

$$g(y, z) = 0$$

nach y auflösen:



$\exists\, U_\delta(c) \subset \mathbb{R}^{d-k}$ $\exists$ stetig diff'bare Fkt

$h : U_\delta(c) \to \mathbb{R}^k$ mit $h(c) = b$,

$g(h(z), z) = 0 \quad \forall z \in U.$

Betrachte $\varphi : \underline{U_\delta(c)} \to \underline{\mathbb{R}}$

$\varphi(z) := f(h(z), z)$.

Wir haben:

- φ ist diff'bar in c mit
  $\varphi'(c) = \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{(a)}_{(b,c)} \cdot h'(c) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)$
- c lok. Extremum von φ <u>ohne</u> Nebenb.

Notwendige Bed. für lok. Extrema:

$$\varphi'(c) = 0,$$

d.h.,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \underbrace{h'(c)}_{-\left(\frac{\partial g}{\partial y}(a)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial z}(a) \;-\; \text{impl. Fkt.}} + \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$$

Also haben wir:

$$\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}(a)\right)^{-1}}_{=: L,\ (1\times k)\cdot(k\times k) = \boxed{1\times k}} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial z}(a)}_{k\times(d-k)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}_{1\times(d-k)} = 0.$$

Def. $(\lambda_1 \ldots \lambda_k) := L$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) + L \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(a) = 0$$

Außerdem gilt nach Def. von L:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) + L \, \frac{\partial g}{\partial y}(a) = 0$$

insgesamt gilt: $\nabla f(a) + \underbrace{L \cdot \nabla g(a)}_{= \lambda_1 g_1'(a) + \dots + \lambda_k g_k'(a)} = 0$

Allgemeines Vorgehen Def. $F: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$

$$F(\underbrace{x}_{x_1,\dots,x_d}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_k g_k(x)$$

Löse das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_d} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0 \end{array}\right.$$

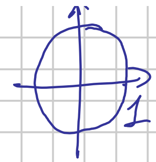
$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d} = 0$: $\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_k \nabla g_k = 0$. – Bed. aus Satz 9.2

$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0$: $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$ – Nebenbed.

$\rightsquigarrow$ Kandidaten für lok. Extrema.

$\boxed{\text{Bsp 9.3}}$ Bestimme die Extremalwerte der Fkt $f(x,y) := x \cdot y$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

auf dem Einheitskreis $\mathbb{T} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$



Def. $g(x,y) := x^2+y^2-1$. Nebenb.: $g=0$.

- f, g sind stetig diff'bar (∞-oft)
- $g'(x,y) = (2x, 2y) \neq 0$ auf $\mathbb{T}$

  – g' hat vollen Rang 1 auf $\mathbb{T}$

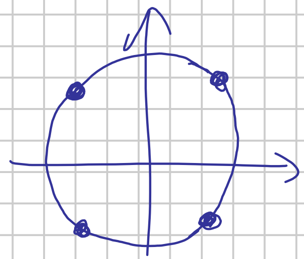
Def. $F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x \cdot y + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\nabla F = 0 \iff \begin{cases} y + 2x\lambda = 0 & | \cdot x \\ x + 2y\lambda = 0 & | \cdot y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad - \quad \Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda(x^2-y^2) = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Fall 1: $\lambda = 0 \Rightarrow x=y=0$ ↯ $(x^2+y^2 \neq 1)$

Fall 2: $x = y \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

Fall 3: $x = -y \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$



$\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \\ \mathbb{T} \text{ komp.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \min f, \ \exists \max f$ — glob. Max.

$f\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) = \frac{1}{2} = \max f$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) = -\frac{1}{2} = \min f$$

glob. Minima

Eine (sehr) kurze Zusammenfassung

Diff'Rechnung (Fortsetzung)

Taylorpolynome, o, O, Satz v. Taylor, Restgliedabsch., Taylorreihe, wichtige Reihen, (anal. Fkt.) kommt in der (Nach)Klausur nicht vor.

5 Integration

$\int_a^b$ für Treppenfkt, Ober- und Untersummen, $\int_a^b$, (Riemann-Krit.)

$\left|\int_a^b\right| \le (b-a)\|f\|_\infty$, Bsp (stetig, monoton)

Riemann-Summen und Grenzwert, Äquiv.

(Integral'krit. von Lebesgue

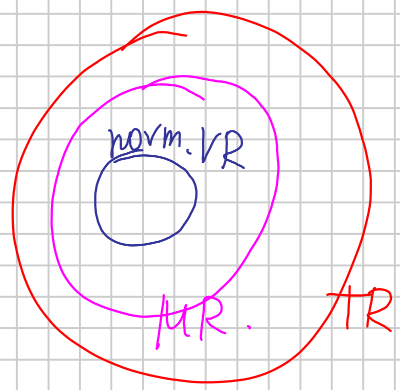
$\int_a^b$ Folgen & Reihen ($\lim\int = \int\lim$, $\sum\int = \int\sum$))

(Verallg.) MWS der Integralrechnung

$\int$ (Stammfkt), Bsp, Rechenregeln, $\int$ rat. Fkt, Partialbruchzerl.
Hauptsatz der Diff.- & Int.-Rechnung
Bsp, part. Integr., Substitut., $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ rat. Fkt
(Cantortreppe, Riemann-Stieltjes-Integral)
Uneigentl. Integrale, Bsp, Majorantenkr.,
(Integralvergleichskrit. für Reihen)

⑥ Topologische Grundlagen

MR, Norm, induz. Metrik, Bsp.
(Hölderungl., C-S)
offen, abg., Kugeln, Trennungssatz für MR
Top. Räume, Bsp, abg., Umg., Berührungspunkt,
$\mathring{M}$, ∂M, $\overline{M}$
$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, stet. Abb., ε-δ-Krit. für MR, stetig in x_0,
gleichm. stetig, (Lipschitz-st.)



Stet. = Folgenstet. in MR.
(total beschr.)

Min / Max, zshgd, (ZWS für TR)

wegzshgd, wege

$\nexists$ stet. bij. Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$[0,1]^2 \to [0,1]$

$[0,1] \to [0,1]^2$

Raum $\mathbb{R}^d$

komp. = abg. + beschr. in $\mathbb{R}^d$ (Heine-Borel)

konv. = koord. konv.

vollständ.

(7) Diff'Rechnung in $\mathbb{R}^d$

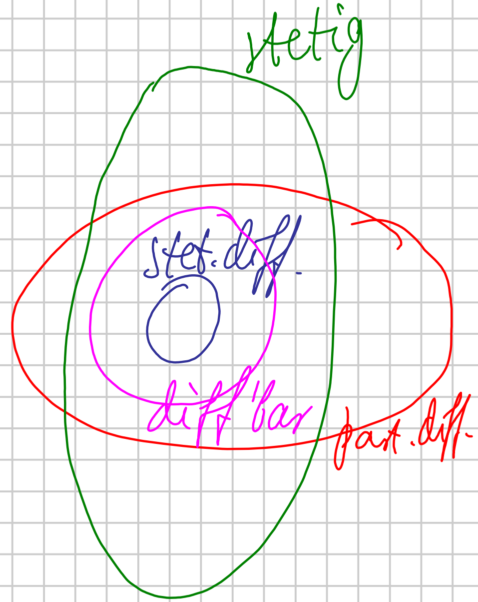
(stetig) part. diff'bar, ∇, Rechenregeln

(Vektorfeld, div v)

Satz v. Schwarz, (rot v, Vektorprodukt) Δ

Tot. Diff'keit, $J_f(x)$, Rechenregeln

Richtungsabl.



(Geom. Interpr. von ∇, $\nabla \perp$ Niveaum.)
Bsp.

— MWS für $f: U \to \mathbb{R}$

(Riemanninteg. für $f: [a,b] \to \mathbb{R}^m$
MWS in Integralform)

$$\int \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f_1 \\ \vdots \\ \int f_m \end{pmatrix}.$$

Schrankensatz

(Rektif. Wege, Länge)

— Taylorformel mit Rest

$T_{1,f,a}$, $T_{2,f,a}$, geom. Bed., Schmiegquadrik

(Taylorreihe, anal. F.)

— Lok. Extrema, Notw. Bed. ($f' = 0$), hinreich. B. ($H_f(a)$), Bsp

— Fixp. Banach.

(Sätze ü. impl. Fkt, Umkehrfkt)

Extrema u. Nebenbed.