Erinnerung: Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$$

Für eine $|\alpha|$-mal diff'bare Fkt $f : U \to \mathbb{R}$

$$D^\alpha f := D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$$

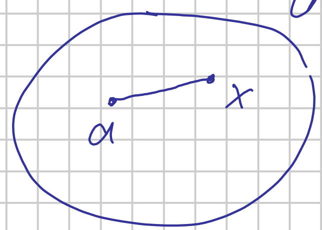
$\boxed{\text{Def. 4.2}}$ Für eine k-mal stetig diff'bare Fkt $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^d}{U} \to \mathbb{R}$ ist das Taylorpolynom $T_{k,f,a} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ der Ordnung k von f in $a \in U$ def. durch

$$\boxed{T_{k,f,a}(x) := \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d}} \underbrace{\frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(x-a)^\alpha}_{\in \mathbb{R}}} \in \mathbb{R}.$$

Wie für $d = 1$ gilt:

Satz 4.3 (Taylorformel mit Rest)

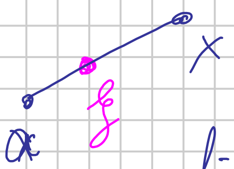
Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in U$ und $x \in U$ mit $[a,x] \subset U$



Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diff'bar. Dann gilt:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le k} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{T_{k,f,a}(x)} + R_k(x)}$$ – Taylorformel

wobei das Restglied $R_k(x)$ von der Form



$$\boxed{R_k(x) = \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}$$ – Lagrangesche Form des Restgliedes

für einen geeigneten Zwischenpunkt $\xi \in (a,x)$ ist.

Insbesondere gilt:

$$\boxed{R_k(x) = \bar{o}(\|x-a\|^k) \quad \text{für } x \to a}$$

$\bar{o}(\|x-a\|^k) = \|x-a\|^k \cdot \underbrace{\bar{o}(1)}_{\text{konv. gegen } 0}$

– qualitative Form des Restglieds

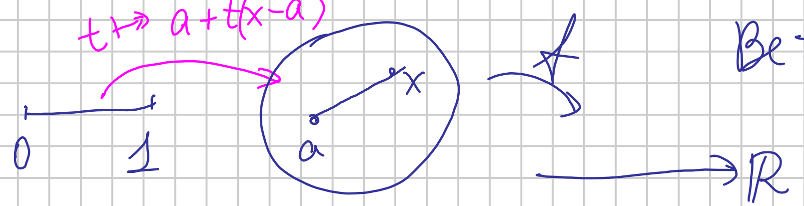
(d.h., $\frac{R_k(x)}{\|x-a\|^k} \xrightarrow[x \to a]{} 0$)

und genauer:

$$\boxed{R_k(x) = \underline{O}(\|x-a\|^{k+1})}$$

$\underline{O}(\|x-a\|^{k+1}) = \|x-a\|^{k+1} \cdot \underbrace{\underline{O}(1)}_{\text{beschr.}}$

Beweis Teil 1: Taylorformel + Lagrangesche Form von $R_k(x)$



Betr. $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ def. durch

$$g(t) := f(a + t(x-a))$$

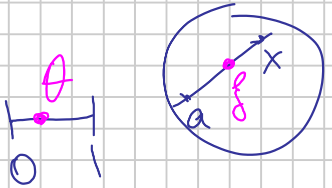
Kettenregel + Vorauss.: $g \in C^{k+1}([0,1])$.

Taylorformel für 1. Veränderliche: $\exists\, \theta \in (0,1)$:

$$f(x) = g(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} \underbrace{1}_{(1-0)^m} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \cdot \underbrace{1}_{(1-0)^{m+1}}$$

$$\overset{\text{Lemma 4.1}}{=} \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{\cancel{m!}} \sum_{|\alpha|=m} \frac{\cancel{m!}}{\alpha!} (D^\alpha f)(a)(x-a)^\alpha}_{T_{k,f,a}(x)} +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{(k+1)!}} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\cancel{(k+1)!}}{\alpha!} (D^\alpha f)(\underbrace{a+\theta(x-a)}_{=:\xi \in (a,x)}) \cdot (x-a)^\alpha$$



Teil 2: qualit. Formeln

Da jedes $D^\alpha f$, $|\alpha| = k+1$, stetig in a ist, ist $D^\alpha f$ beschränkt in einer Umgebung von a:

$$\exists \delta \ \exists M>0 : |(D^\alpha f)(y)| \le M \quad \forall y \in U_\delta(a)$$

Damit gilt nach Teil 1:

$$|R_k(x)| \underset{\substack{| \\ \exists \xi \in [a,x]}}{=} \left| \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \right| \le \Big(\underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{M}{\alpha!}}_{\text{Zahl, abh. von } k} \Big) \|x-a\|_\infty^{k+1}$$

$$|(x-a)^\alpha| = |x_1-a_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d-a_d|^{\alpha_d} \le \|x-a\|_\infty^{\alpha_1+\dots+\alpha_d} = \|x-a\|_\infty^{|\alpha|}$$

D.h.,
$$R_k(x) = \underline{O}(1) \cdot \|x-a\|_\infty^{k+1}$$

und automatisch
$$R_k(x) = \|x-a\|_\infty^k \cdot \underbrace{\underline{O}(\|x-a\|)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} , \text{ d.h., } = \bar{o}(1)$$

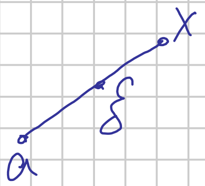
$\blacksquare$

$\boxed{\text{Bem. 4.4}}$ 1) $\exists$ eine integralform des Restglieds (ohne Details)

2) Die qualitative Form $R_k(x) = \bar{o}(\|x-a\|^k)$, $x \to a$ gilt sogar für k-mal stetig diff'bare Fkt'en $f: U \to \mathbb{R}$:

Nach Satz 4.3 für $(k-1)$ haben wir:

$$f(x) \underset{\exists \xi \in [a,x]}{=} \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$



$$= \underbrace{\sum_{|\alpha| \le k} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{T_{k,f,a}(x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{(D^\alpha f)(\xi) - (D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha}_{R_k(x)}$$

Da $(D^\alpha f)(\xi) - (D^\alpha f)(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ nach der Stetigkeit von $D^\alpha f$, damit $\xi \to a$

gilt

$$|R_k(x)| \underset{\text{wie im Beweis von 4.3}}{\le} \|x-a\|_\infty^k \cdot \overline{o}(1) = \overline{o}(\|x-a\|^k)$$

$\boxed{\text{Bem. 4.5}}$ Das Taylorpolynom $T_{k,f,a}$ lässt sich schreiben als

$$\boxed{T_{k,f,a}(x) = \sum_{m=0}^{k} P_m(x)},$$

wobei jedes $P_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\boxed{P_m(x) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha},$

homogen vom Grad m ist, d.h., $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^d$ $\boxed{P_m(\lambda x) = \lambda^m P_m(x)}$

(z.B. $x^2 + xy + y^2$ - homogen vom Grad 2)

Frage: Wie bestimmt man $T_{1,f,a}$ und $T_{2,f,a}$? (Bzw. P_0, P_1, P_2)

(m=0 ist einfach: $P_0(x) = T_{0,f,a}(x) = f(a)$) konst.

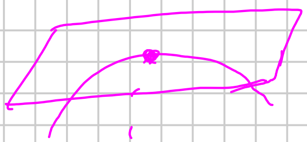
$|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = (0, 0, \ldots, 0)$

m=1 $\quad |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = (0, \ldots 0, \underset{j\text{-te Stelle}}{1}, 0, \ldots 0)$ für ein $j \in \{1, \ldots, d\}$

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{d} f_{x_j}(a)(x_j - a_j) = \langle (\nabla f)(a), x - a \rangle$$

Skalarprodukt

Taylorformel für $p=1$!



$$\boxed{f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \underbrace{R_1(x)}}$$

$= \overline{o}(\|x-a\|)$ bzw. $\underline{O}(\|x-a\|^2)$

wenn f 1-mal stetig diff'bar $\qquad$ — " — 2-mal

m=2 $\quad |\alpha| = 2 \Leftrightarrow \alpha = (0, \ldots, 0, \underset{j\text{-te Stelle}}{2}, 0, \ldots, 0)$ für ein $j \in \{1, \ldots, d\}$ $\quad \alpha! = 2! = 2$

oder

$\alpha = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{-te}}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{j\text{-te}}{1}, 0, \ldots)$ $\quad \alpha! = 1$

Stelle

Also haben wir:

$$P_2(x) = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{d} f_{x_j x_j}(a)(x_j - a_j)^2 + \frac{1}{1! \cdot 1!} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{d} f_{x_i x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{x_i x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

$i=j$ – die erste Summe oben,
$i \neq j$ – die zweite, da $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ nach Satz von Schwarz

$$= \frac{1}{2} \Big\langle \underbrace{\big(f_{x_i x_j}(a)\big)_{i,j=1,\dots,d}}_{\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \cdots & f_{x_1x_d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_dx_1}(a) & \cdots & f_{x_dx_d}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_d - a_d \end{pmatrix}} (x-a),\ x-a \Big\rangle$$

$$=: \frac{1}{2} \langle H_f(a)(x-a),\ x-a \rangle$$

für

$$\boxed{H_f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \cdots & f_{x_1x_d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_dx_1}(a) & \cdots & f_{x_dx_d}(a) \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow \nabla f_{x_1} \\ \vdots \\ \leftarrow \nabla f_{x_d} \end{matrix}$$

– Hesse-Matrix von f in a – Otto Hesse, 19. Jahrh.

$\boxed{H_f(a) = f''(a)}$

Taylorformel für $k=2$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \langle (\nabla f)(a),\ x-a \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a)(x-a),\ x-a \rangle + R_2(x)}$$

$o(\|x-a\|^2)$ bzw. $O(\|x-a\|^3)$

Bem. 4.6 Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(a)$

eine symmetrische Matrix. ($A = (a_{ij})_{i,j=1}^{d}$ heißt symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$)

$\boxed{\text{Bem. 4.7}}$ Eine andere Schreibweise für $\langle H_f(a)(x-a), x-a \rangle$ ist $(x-a)^T H_f(a)(x-a)$

$1 \times d$ $\quad d \times d \quad d \times 1 \qquad 1 \times 1$

$\boxed{\text{Bsp 4.8}}$ Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f(x,y) := x \cdot \sin y.$$

Es gelten: $f_x(x,y) = \sin y$, $f_y(x,y) = x \cos y$, $f_{xx}(x,y) = 0$,

$f_{yy}(x,y) = -x \sin y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos y$

D.h., für $a = (0,0)$ gilt:

$$f'(0,0) = (\nabla f)(0,0) = (0,0)$$

$$f''(0,0) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben:

$$T_{2,f,a}(x) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\langle 0, x-a \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \right\rangle$$

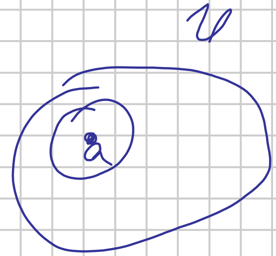
$$= \frac{1}{2} \cdot (yx + xy) = xy$$

Taylorformel für $k=2$ (f ist ∞-oft stetig diff'bar):

$$f(x,y) = x \cdot y + \underline{O}\Big(\underbrace{(x^2+y^2)}_{\|(x-0,\,y-0)\|_2}{}^{3/2}\Big) \qquad (\text{bzw. } \overline{o}(x^2+y^2))$$

$\boxed{\text{Def. 4.9}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ ∞-oft (stetig) diff'bar.
Dann heißt die Reihe

$$T_{f,a}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

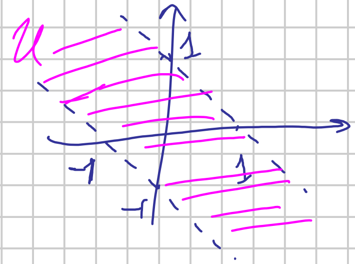


<u>Taylorreihe von f im Punkt $a \in U$.</u>

Die Reihe konv. gegen $f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{k \to \infty} R_k(x) = 0$

Wie früher heißt f <u>(reell)-analytisch</u> in U, wenn: $\forall a \in U$
$\exists$ Umgebung $U(a) \subset U$, wo $f = T_{f,a}$ gilt.

Bsp 4.10 $f(x,y) := \frac{1}{1-x-y}$, $\mathcal{U} := \{(x,y) : |x+y| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$



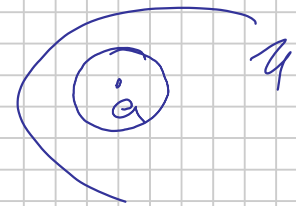
Geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + \dots \quad \forall (x,y) \in \mathcal{U}$$

Reihe konv. $\Leftrightarrow$ $|x+y| < 1$ Ana 1

Dies ist die Taylorreihenentwicklung von f in $(0,0)$ nach dem folgenden Lemma:

Lemma 4.11 Seien $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ∞-oft (stetig) diff'bar und sei $\mathcal{U}_\delta(a) \subset \mathcal{U}$. Wenn

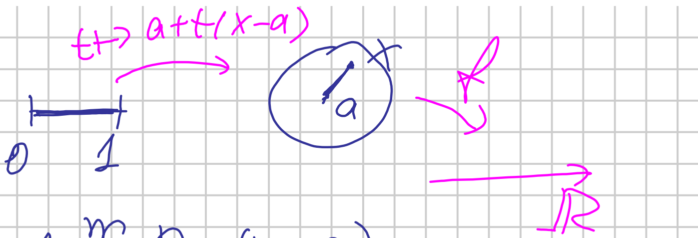


$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a)$$

für homogene Polynome P_m mit Grad $P_m = m$, so ist diese Reihe die Taylorreihe von f in a.

Beweis: Für $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ betr. $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ oder $[-1,1]$

$$g(t) := f(a + t(x-a))$$



Nach Vorauss. gilt

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t(x-a)) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \underbrace{P_m(x-a)}_{\text{Zahl (abh. von } m)}$$

m-Homog. von P_m — klassische Potenzreihe um 0

Taylorreihentheorie für $d=1$ (Ana1/Anfang Ana2):
bzw. Potenzreihen

$$P_m(x-a) = \frac{g^{(m)}(0)}{m!} \underset{\text{Lemma 4.1}}{=} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f(a))(x-a)^\alpha,$$

d.h., $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$ ist die Taylorreihe von f. $\blacksquare$

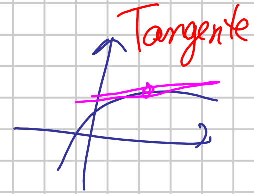
Zurück zu Bsp. 4.10:

Achtung Der Konvergenzbereich einer Taylorreihe ist i.A. keine Kreisscheibe oder Rechteck!

Geometrische Bedeutung/Beschreibung von $T_{1,f,a}$ 4.12

$$T_{1,f,a}(x) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), x-a \rangle$$

$d=1$ $\quad z = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\text{Zahl}}(x-a)$ — Gerade durch $(a, f(a))$



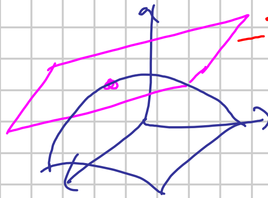
mit Steigung $f'(a)$.

$d=2$: $z = f(a) + f_x(a)(x-a_1) + f_y(a)(y-a_2)$

– Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch $(\underset{\in \mathbb{R}^2}{a}, \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{R}})$ mit

Steigung $f_x(a)$ in die x-Richtung ($y = a_2$ fest)

und –"– $f_y(a)$ –"– y-Richtung ($x = a_1$ fest)



$d \geq 2$: $z = f(a) + f_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \ldots + f_{x_d}(a)(x_d - a_d)$

– Hyperebene in $\mathbb{R}^{d+1}$ durch $(\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}^d}, \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{R}})$ mit

Steigung $f_{x_j}(a)$ in die x_j-Richtung. (alle anderen $x_i = a_i$ fest)

Geometrische Beschreibung von $T_{2,f,a}$ 4.13

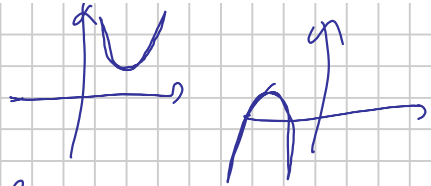
$d=1$: Beobachtung: $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$,

d.h., $\forall$ quadratische Polynom ist von der Form

$$ax^2 + b$$

nach einer geeigneten affinen Transformation

linear + konst.

Geometrisch: verschobene Parabel (für $a \neq 0$): 

$d \geq 2$ $$T_{2,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\langle f''(a)(x-a), x-a\rangle$$

Die Gleichung $x_{d+1} = T_{2,f,a}(x)$ beschreibt eine sog. **Schmiegquadrik** an den Graphen von f in $(a, f(a))$

Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

Die Schmiegquadrik hat im Punkt $(a, f(a))$ dieselbe Tangentialhyperebene wie der Graph von f und hat dieselbe Krümmung ($\rightsquigarrow$ (Diff') Geometrie)

$d = 2$ Analog zum Fall $d = 1$ kann man durch eine geeignete affine Koordinatentransformation ~~+~~ nichtlineare Schmiegquadrik in eine der folgenden Formen (sog. **Normalformen**) bringen:

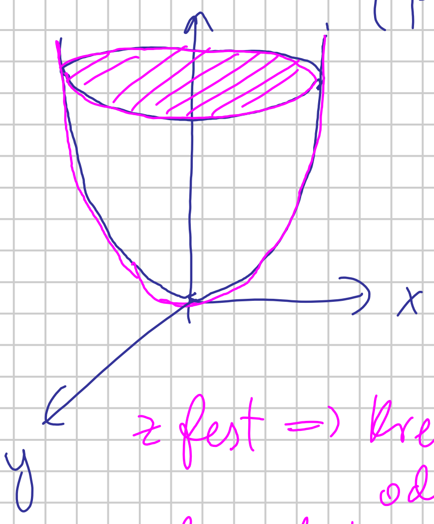
HÜ

(E) $z = \pm(x^2 + y^2)$ – **elliptisches Paraboloid**

(H) $z = x^2 - y^2$ – **hyperbolisches Paraboloid**

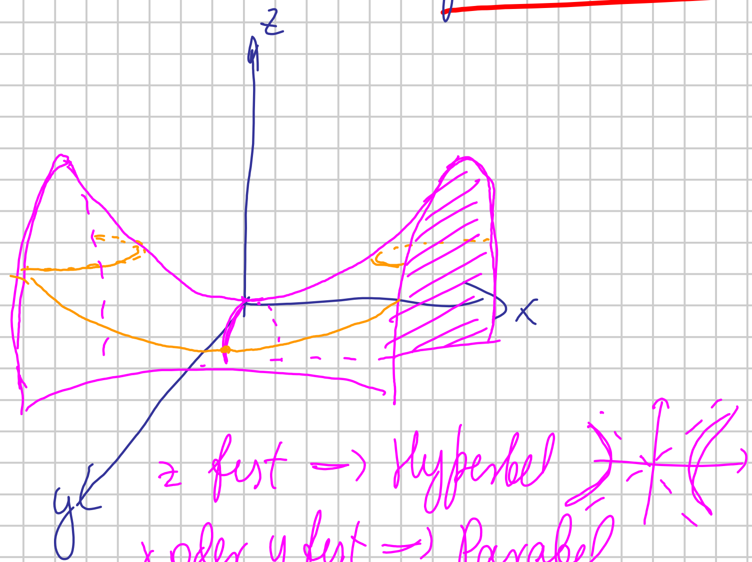
(oder: Sattelfläche)

(P) $z = \pm x^2$ – parabolischer Zylinder



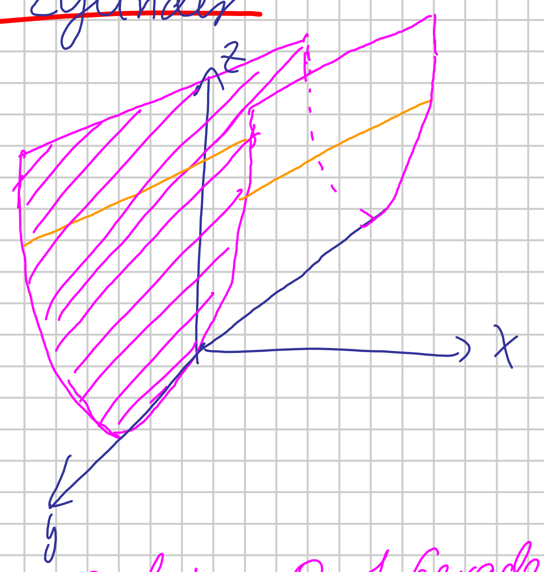
z fest ⟹ Kreis, Punkt oder $\emptyset$

x oder y fest ⟹ Parabel



z fest ⟹ Hyperbel

x oder y fest ⟹ Parabel



z fest ⟹ $\emptyset$, 1 Gerade oder 2 parallele Geraden

x und y fest ⟹ Punkt

dy fest ⟹ Parabel

Ü / HÜ

$\boxed{\text{Bsp. 4.14}}$ (Affensattel)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \operatorname{Im}\left((x+iy)^3\right) \overset{\text{Warum?}}{=} 3x^2y - y^3$$

Wir wissen: $f(x,y) = P_3(x,y) = T_{3,f,0}(x,y)$

$f_x(x,y) = 6xy$, $f_{xx}(x,y) = 6y$, $f_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ $f_{yy}(x,y) = -6y$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6x$. Für $a = (0,0)$ haben wir:

$$(\nabla f)(0,0) = (0,0), \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h., $T_{2,f,0}(x) = f(0) = 0$

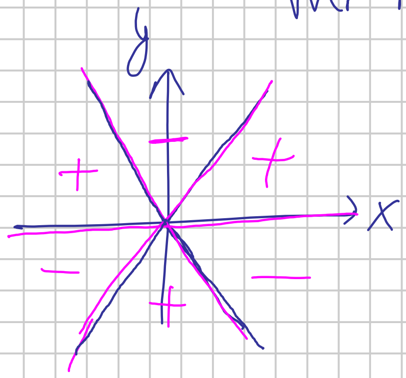
D.h., die Tangentialebene ist $z=0$, die Schmiegquadrik $z=0$.

Aber die Fläche ist nichttrivial!

Sei $re^{i\varphi} := x+iy$ die Polarkoordinaten von (x,y). Es gilt:

$$f(x,y) = \operatorname{Im}\left((re^{i\varphi})^3\right) = r^3 \sin(3\varphi)$$

Wir haben also:

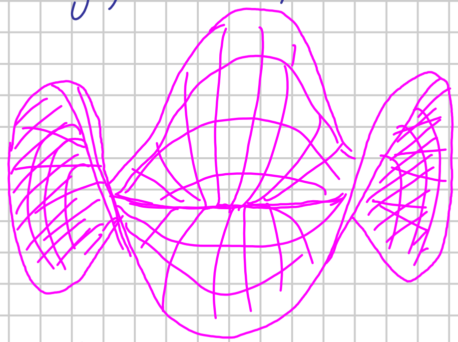


- Der Graph von f ist invariant bei einer Drehung um den Winkel $2\pi/3$, da:

$$\sin\left(3\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3\varphi)$$

- $f(x,y) > 0$, wenn $\varphi \in (0, \pi/3)$

- $f(x,y) < 0$, wenn $\varphi \in (-\pi/3, 0)$



In $(0,0)$ gibt es also 3 „Bergrücken" und 3 „Senken".

Zum Spielen: $\operatorname{Im}((x+iy)^n)$, $n \geq 4$.

5. Lokale Extrema

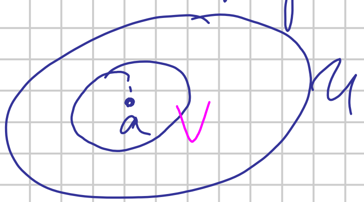
$\boxed{\text{Def. 5.1}}$ Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in U$ heißt

- **lokales Maximum** bzw. **Minimum** von f, wenn

wenn gilt:

$\exists$ Umgebung $V \subset U$ von a: $\forall x \in V$ $f(x) \leq f(a)$

bzw. $f(x) \geq f(a)$



- lokales Extremum von f, wenn lok. Maximum oder lok. Minimum

Bem. Wenn $f(x) < f(a)$ $\forall x \in V \setminus \{a\}$ gilt, dann heißt a striktes lokales Maximum. Analog: striktes lok. Minimum/Extremum.

Bem. Analog def. man Extrema für $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ i.A. nicht offen:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \cap D \quad f(x) \leq f(a)$$

bzw. $\geq f(a)$ — lok. Max. / lok. Min.

$\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D$ $f(x) < f(a)$ bzw. $> f(a)$ — striktes lok. Max. / — " — Min

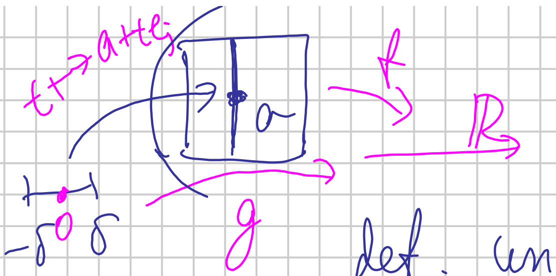
$\boxed{\text{Satz 5.2}}$ (Notwendige Bedingung für lokales Extremum)

Sei $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, part. diff'bar in a und $a \in U$. Dann gilt die Implikation:

$$\boxed{a \text{ ist lok. Extremum von } f \implies (\nabla f)(a) = 0}$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, d\}$ fest. Betr. $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subset U$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Dann ist die Fkt



$$\begin{cases} g: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \\ g(t) := f(a + t e_j) \end{cases}$$

def. und diff'bar, 0 ist lok. Extremum von g (warum?)

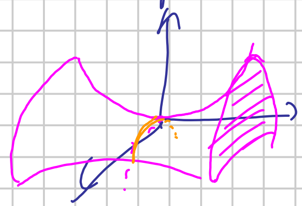
Ana 1: $0 = g'(0) = f_{x_j}(a)$.

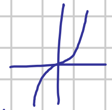
D.h., $(\nabla f)(a) = 0$. ■

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Rückrichtung falsch i.A.):

Die Fkt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ erfüllt $(\nabla f)(0) = 0$, aber 0 ist kein lok. Extremum von f

$(f(x,0) > 0 \ \forall x \neq 0$, aber $f(0,y) < 0 \ \forall y \neq 0)$

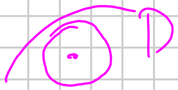


(Ein anderes Bsp: $d = 1$: $f(x) = x^3$ )

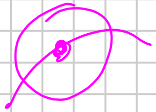
$\boxed{\text{Def. 5.3}}$ Für $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar, U offen, $U \subseteq \mathbb{R}^d$, heißt $a \in U$ eine kritische Stelle, wenn $(\nabla f)(a) = 0$.

Es gilt also: $\begin{cases} a \text{ lok. Extremum von } f \\ a \in U,\ U \text{ offen},\ f \text{ part. diff'bar} \end{cases} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ a ist eine kritische Stelle

Bem. Wenn $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^d$, D i.A. nicht offen, dann können (nur) folgende Punkte aus D Extrema sein:



- $a \in \mathring{D}$ – innere Punkte: $\exists\, U_\delta(a) \subset D$, wo f in a partiell diff'bar mit $(\nabla f)(a) = 0$ (d.h., kritische Stellen)
- $a \in \mathring{D}$, wo f in a nicht part. diff'bar ist

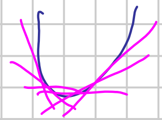


- $a \in D \setminus \mathring{D}$ – Randpunkte: $\forall\, U_\delta(a)\ \exists\, x \in U_\delta(a) \setminus D$ und $a \in D$

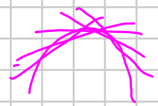
Frage: Wann ist ein kritischer Punkt extremal?

Erinnere: Ana 1:

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ striktes lok. Min.}$$



bzw. < 0 — " — Max



Idee: Benutze $H_f(a)$ – Hesse-Matrix.

$\boxed{\text{Def. 5.4}}$ Sei $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$ eine symmetrische reelle $d \times d$-Matrix. Dann heißt A

- positiv definit, wenn

$$\underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\text{Zahl}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

- positiv semidefinit, wenn

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

- negativ definit bzw. semidefinit, wenn

$$\langle Ax, x\rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

bzw. $\langle Ax, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$.

- indefinit, wenn gilt:

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^d : \langle Ax, x\rangle > 0, \quad \langle Ay, y\rangle < 0.$$

Schreibe jeweils:

$$A > 0, \; A \geq 0, \; A < 0, \; A \leq 0, \; A \gtrless 0.$$

Bem. Da immer Ax verwendet wird, sind das Eigenschaften der zugehörigen linearen Abbildung $: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Wie früher identifizieren wir eine lin. Abbildung mit ihrer Darstellung als Matrix, sobald die Basis klar ist (hier: Standardbasis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$)

Erinnerung 5.5 (Lin A). $A \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ symmetrisch $\Longrightarrow$ $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_d$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ von A (λ_j nicht notwendigerweise verschieden):

$$A v_j = \lambda_j v_j, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$
$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

D.h., man kann $\forall$ solche Matrix diagonalisieren: $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_d \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $v_1, \dots, v_d$

Dabei sind alle λ_j reell.

ONB: $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists!$ $\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_d}_{\text{Koeff. bzgl. der Basis } \{v_1, \dots, v_d\}}$ mit $x = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j v_j$

Wir haben also:

$$\langle Ax, x \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \underbrace{A v_j}_{\lambda_j v_j}, \sum_{k=1}^{d} \alpha_k v_k \Big\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} \lambda_j \cdot \alpha_j \cdot \overline{\alpha_k} \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}$$
$$= \sum_{j=1}^{d} \lambda_j |\alpha_j|^2$$

Wir haben also folgende Charakterisierung:

warum?

$$\boxed{A > 0 \iff \forall \text{ Eigenwerte von } A > 0}$$

$A \geq 0 \iff \forall$ Eigenwerte von $A \geq 0$

$A < 0 \iff$ — " — < 0

$A \leq 0 \iff$ — " — ≤ 0

$A \gtrless 0 \iff A$ besitzt (mindestens) einen EW > 0 und — " — — " — < 0.

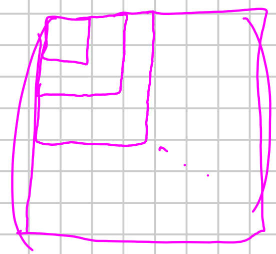
Was wenn die EW nicht bekannt sind?

$\boxed{\text{Bem.}}$ Man hat auch folgendes Determinantenkriterium für Definitheit (Jacobi/Hurwitz, ohne Beweis hier):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \in M_{d\times d}(\mathbb{R}) \text{ ist genau dann pos. definit,}$$

$$\text{wenn} \quad \forall j \in \{1, \dots, d\} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix} > 0$$

(d.h., $a_{11} > 0$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots$)



$\boxed{\text{Satz 5.6}}$ (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum)

Sei $f: U_{\subset \mathbb{R}^d} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, U offen, $a \in U$ ein kritischer Punkt, d.h., $(\nabla f)(a) = 0$. Dann gelten folg. Implikationen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a) & H_f(a) > 0 \implies a \text{ striktes lok. Minimum von } f \\ b) & H_f(a) < 0 \implies \text{— " — Maximum — " —} \\ c) & H_f(a) \gtrless 0 \implies a \text{ kein lok. Extremum von } f. \end{array}}$$

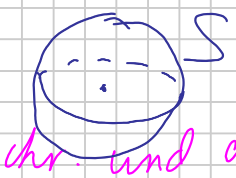
__Beweis__ Sei $A := H_f(a)$ - symmetrisch nach dem Satz von Schwarz

Taylorformel: $$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle + r(h),$$

$(\nabla f)(a) = 0$

wobei $r(h) = \bar{o}(\|h\|^2)$, $h \to 0$.

a) Betr. $S := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ - kompakt in $\mathbb{R}^d$ (da beschr. und abg.)



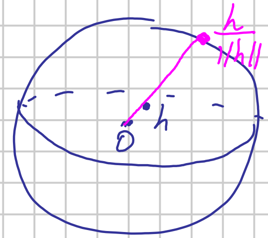
warum?

$g: S \to \mathbb{R}$; $g(x) := \langle Ax, x\rangle$ – Polynom $\Rightarrow$ stetig

Stetige Fkt'en nehmen auf komp. Mengen ihr Minimum an:

$$\exists\, \alpha := \min\{\langle Ax, x\rangle,\ x \in S\} > 0$$

nach Voraus. $A > 0$



<u>Behauptung</u>: $\langle Ah, h\rangle \geq \alpha \cdot \|h\|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^d$

<u>Beweis der Beh.</u>: <u>Fall 1</u>: $h = 0$ ✓

<u>Fall 2</u>: $h \neq 0$. Dann liegt

$\frac{h}{\|h\|} \in S$ und damit:

$$\underbrace{\left\langle A\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle}_{\frac{1}{\|h\|^2}\langle Ah, h\rangle} \geq \alpha \quad \text{(Def. von } \alpha\text{)}$$

$\blacksquare$ Behaupt.

Taylorformel + Behauptung implizieren:

$$f(a+h) \geq f(a) + \frac{\alpha}{2}\cdot\|h\|^2 + \underbrace{r(h)}_{=\overline{o}(\|h\|^2)} \quad \geq$$

d.h., $\exists\, \delta > 0$: $|r(h)| \leq \frac{\alpha}{4}\cdot\|h\|^2 \quad \forall\, h \in U_\delta(0)$

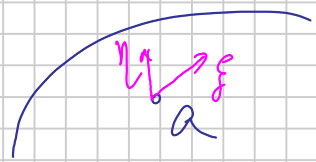
$$\overset{\forall h \in U_\delta(0)}{\geq} f(a) + \underbrace{\frac{\alpha}{2}\|h\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|h\|^2}_{\frac{\alpha}{4}\|h\|^2 > 0 \text{ für } h \neq 0} > f(a) \quad \forall h \in \mathring{U}_\delta(0)$$

$\Rightarrow$ a ist lok. Minimum.

b) Folgt aus a) $(f \rightsquigarrow -f)$

c) Sei $A = H_f(a)$ indef. Dann $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit

$$\langle A\xi, \xi\rangle > 0, \quad \langle A\eta, \eta\rangle < 0.$$



Wir zeigen: f hat ein striktes lok. Min. in die ξ-Richtung und – " – Max – " – η-Richtung

Bezeichne $\alpha := \langle A\xi, \xi\rangle > 0.$

Taylor: ($t \in \mathbb{R}$, $|t|$ klein genug)

$$f(a+t\xi) = f(a) + \frac{1}{2}\langle A(t\xi), t\xi\rangle + r(t\xi)$$
$$= f(a) + \frac{1}{2}t^2\alpha + r(t\xi),$$

wobei $r(t\xi) = \overline{o}(t^2\|\xi\|^2) = t^2 \cdot \|\xi\|^2 \cdot \overline{o}(1)$, $t \to 0$.

Also $\exists \delta > 0: \forall t \in (-\delta, \delta) \quad |r(t\xi)| \leq t^2 \cdot \frac{\alpha}{4}$

Damit haben wir für solche t:

$$\underbrace{f(a+t\xi)}\ \overset{\text{umgek. }\Delta\text{-Ungl.}}{\geq}\ f(a) + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2 = f(a) + \underbrace{\frac{1}{4}t^2}_{>0 \text{ für } t\neq 0} > \underbrace{f(a)}$$

$\Rightarrow$ a ist ein striktes Min. in die ξ-Richtung.

Analog: — " — η-Richtung

Also: kein Extremum.

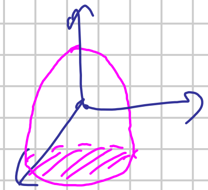
$\boxed{\text{Bsp 5.7}}$ 1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = c + x^2 + y^2$

Klar: $(0,0)$ ist ein <u>globales</u> Minimum, strikt.

Hier gelten:
- $(\nabla f)(0,0) = (0,0)$ — $(0,0)$ ist eine kritische Stelle
- $H_0 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$ $\quad \langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle = 2(x^2+y^2)$

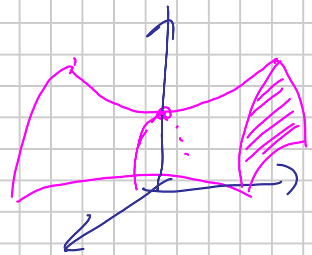
$\Rightarrow$ striktes lok. Min.

Analog: $g(x,y) = c - x^2 - y^2$



2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = c + x^2 - y^2$

$(\nabla f)(0,0) = (0,0)$



$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ - indef. $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 2x^2 - 2y^2$

$\Rightarrow$ kein Extremum.

(Hier: striktes Min. in die x-Richtung,
— " — Max. — " — y-Richtung)

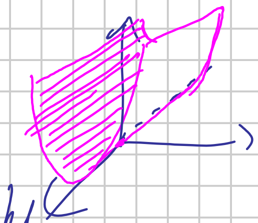
Bem. 5.8 Für zweimal part. diff'bare Fkt'en gilt:

a lok. Maximum $\Rightarrow H_f(a) \leq 0$
a lok. Minimum $\Rightarrow H_f(a) \geq 0$ } HÜ,

aber die Rückrichtungen gelten nicht:

Bsp 5.9 1) Affensattel (Bsp 4.14): $(\nabla f)(0) = 0$, $H_f(0) = 0$,
aber 0 ist kein lok. Extremum

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2$



0 ist ein globales Minimum, nicht strikt
$(\nabla f)(0,0) = (0,0)$

$$H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

3) Auch die Fkt $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x,y) := x^2 + y^4$$

$$f_2(x,y) := x^2 + y^3$$

erfüllen: $(\nabla f)(0) = 0$, $H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, aber:

- f_1 hat ein striktes Min. in 0
- f_2 hat kein Extremum in 0

warum?

Es gilt also:

$$\boxed{\begin{array}{l} (\nabla f)(a) = 0, \ H_f(a) \geq 0 \text{ bzw. } \leq 0 \\ \qquad \Rightarrow \text{keine allg. Aussage möglich} \end{array}}$$

Bem. 5.10 Man kann mit Hilfe von $H_f(a)$ wie in Ana 1 untersuchen, ob f konvex bzw. konkav ist.

$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \ \forall x, y \in U$ mit $[x,y] \subset U$

Es gilt nämlich:

und $\forall t \in [0,1]$

f konv $\Longleftrightarrow$ $H_f(a) \geq 0$ $\forall a \in U$ $\}$ ÜÜ (Königsberger)

bzw. konkav $\qquad \leq 0$

Königsberger Wikipedia –

6. Der Fixpunktsatz von Banach

Stefan Banach – polnischer Math. (1892–1945)

Berühmt für: Funktionalanalysis, Maßtheorie, das Banach-Tarski-Paradoxon

Sei (M, d) ein metrischer Raum (MR)

Erinnere: M heißt vollständig bzgl. d, wenn $\forall$ Cauchyfolge aus M in M konvergiert:

$$(x_n) \subset M \text{ Cauchy} \Longrightarrow \exists x \in M \text{ mit } x_n \to x.$$

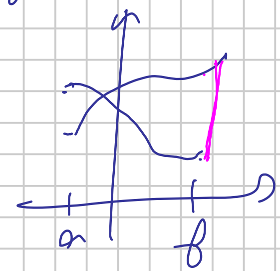
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n, m \geq N \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Kurze Schreibweise: $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Bsp } 6.1}$ 1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ vollständig
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^d$ nicht vollständig – hier ist $d(x,y) = \|x-y\|$ für eine beliebige Norm

2) $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist vollständig bzgl. der sup-Norm, d.h., bzgl. der induzierten Metrik

$$d(f,g) := \|f-g\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]} |f(s)-g(s)|$$

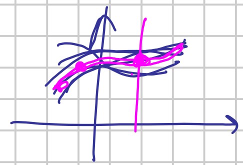


__Beweis__ Sei $(f_n) \subset C[a,b]$ Cauchy, d.h.,

$$\|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Dann ist $(f_n(s))_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ Cauchy $\forall s \in [a,b]$ $\quad |f_n(s) - f_m(s)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

$\overset{\text{Ana 1}}{\Longrightarrow}$ konv.



Def. $$f(s) := \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

zz: $f \in C[a,b]$ und $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

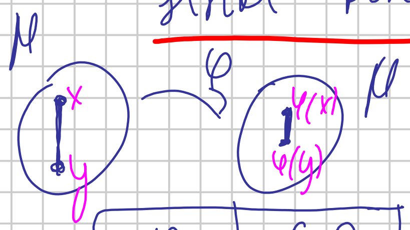
Nach Vorauss. gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ \forall s \in [a,b] \ \underbrace{\forall m \geq N \ |f_n(s) - f_m(s)| < \varepsilon}_{m \to \infty: \ \underbrace{|f_n(s) - f(s)| \leq \varepsilon}_{\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon}}$$

D.h., $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ ∎

Ana 1: $\left.\begin{array}{l} f_n \text{ stetig} \\ f_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} f \end{array}\right\} \Rightarrow f$ stetig.

$\boxed{\text{Def. 6.2}}$ Sei (M, d) ein MR. Eine Abb. $\varphi: M \to M$ heißt **strikt kontraktiv**, wenn ein $\lambda \in [0, 1)$ ex. mit



$$\forall x, y \in M \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda \, d(x, y)$$

$\boxed{\text{Bsp 6.3}}$ 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$ oder $-\frac{x}{2}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $\|f'\|_\infty < 1$.

Dann ist f strikt kontraktiv

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |(x-y)| \leq \|f'\|_\infty \cdot |x-y|$$

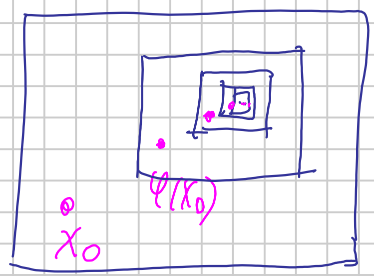
Analog: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit $\|f'\|_\infty < 1$ für ein $\xi \in [x,y]$ (Mittelwertsatz) $\left(\|f(x)-f(y)\| \leq \|f'\|_\infty \cdot \|x-y\| \right)$

Bem. f strikt kontraktiv $\Leftrightarrow$ f Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante < 1.

$\boxed{\text{Thm. 6.4}}$ (Fixpunktsatz von Banach)

Seien (M,d) ein vollständiger MR und $\varphi: M \to M$ strikt kontraktiv. Dann besitzt φ genau einen Fixpunkt, d.h.,

$$\exists!\, x \in M \text{ mit } \varphi(x) = x.$$



Beweis Teil 1: Existenz

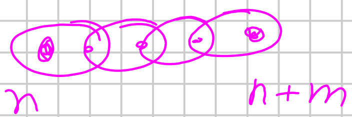
Sei $x_0 \in M$ beliebig und def. $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir zeigen: (x_n) Cauchy mit Limes = Fixpunkt.

Wir haben induktiv $\forall n$:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \underset{\substack{\varphi \text{ strikt kontr.} \\ \text{mit } \lambda < 1}}{\leq} \lambda\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_0, x_1),$$

d.h., $d(x_n, x_{n+1}) \le \lambda^n d(x_0, x_1)$.

Also gilt $\forall\, m \in \mathbb{N}$:



$$d(x_n, x_{n+m}) \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\le} d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

$$\le \underbrace{(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+m-1})}_{\lambda^n(1+\lambda+\ldots+\lambda^{m-1})} d(x_0, x_1)$$

$$\le \underbrace{\lambda^n}_{0} \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{\underbrace{1-\lambda}_{\text{Zahl}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Also ist (x_n) Cauchy.

(M, d) vollst. $\Rightarrow \exists\, x \in M$ mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Da φ stetig ist, gilt:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$x \swarrow \qquad \searrow \varphi(x),$$

d.h., $x = \varphi(x)$.

<u>Teil 2 Eindeutigkeit</u>: Seien x, y zwei Fixpunkte.

$$d(x,y) \underset{\text{Fixpunkte}}{=} d(\varphi(x), \varphi(y)) \underset{\varphi \text{ strikt kontr.}}{\leq} \lambda\, d(x,y)$$

$\Rightarrow$ $d(x,y) = 0$ oder $\underbrace{1 \leq \lambda}_{↯}$, d.h., $x = y$. ∎