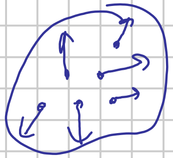
Note Title 24.05.2019

Beweis (von Bem. 1.7: Produktregel für ∇): Ü

Bem. 1.8 Für $f: U_{\subset \mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}$ part. diff'bar ist ∇f ein Vektorfeld, d.h.,
eine Abb. $v: U \to \mathbb{R}^d$ ($\forall x \in U$ wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^d$ zugeordnet).



$\boxed{\text{Def. 1.9}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und

$$v = (v_1, \dots, v_d): U \to \mathbb{R}^d$$

ein partiell diff'bares Vektorfeld (d.h., jede Komponente $v_j: U \to \mathbb{R}$ ist part. diff'bar).
Dann heißt die Fkt div $v: U \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\operatorname{div} v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_d}{\partial x_d}$$

die Divergenz des Vektorfeldes v. (hat nichts mit Konvergenz zu tun :-))
Formal kann man

$$\boxed{\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j}$$

schreiben.

Def. 1.10 Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar. Sind alle part. Ableitungen $f_{x_j}: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar, so heißt f zweimal partiell diff'bar. Induktiv heißt f (n+1)-mal partiell diff'bar, wenn sie n-mal part. diff'bar ist und alle part. Ableitungen n-ter Ordnung

$$D_{j_n} \cdots D_{j_2} D_{j_1} f = \frac{\partial}{\partial x_{j_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f : U \to \mathbb{R}$$

partiell diff'bar sind. Schreibe auch $\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \cdots \partial x_{j_1}}$ oder $f_{x_{j_1} \cdots x_{j_n}}$.

kommt zuerst — kommt als letzte Ableitung.

Die Fkt f heißt n-mal stetig diff'bar, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq n$ existieren und stetig sind. Schreibe $f \in C^n(U)$.

Bsp $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy, \quad f_y(x,y) = x^2$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = (f_x)_y(x,y) = 2x, \quad f_{yy}(x,y) = 0,$$

$$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) = 2x.$$

Wir sehen: $f_{xy} = f_{yx}$.

Das ist kein Zufall:

$\boxed{\text{Satz 1.11}}$ (Schwarz) — Spezialfall $d=2$: Euler 1734

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $a \in U$, $i,j \in \{1,\dots,d\}$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Wenn die partiellen Ableitungen $\partial_{x_i x_j}$ und $\partial_{x_j x_i}$ in einer Umgebung von a existieren und stetig in a sind, dann gilt

$$\boxed{\partial_{x_i x_j} f(a) = \partial_{x_j x_i} f(a)}$$

Allgemein gilt: $f \in C^n(U) \Rightarrow$ die part. Ableitungen der Ordnung $\leq n$ sind unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Beweis "Allgemein…" folgt nach Induktion: ii / iii.

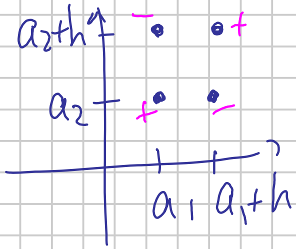
Für den ersten Teil sei OBdA $d=2$ (sonst nimm alle x_k mit $k \notin \{i,j\}$ fest).

ZZ: $f_{xy}(a) = f_{yx}(a)$

Nach Vorauss. $\exists \delta > 0$ s.d. f_{xy}, f_{yx} stetig in

$\underbrace{[a_1-\delta, a_1+\delta] \times [a_2-\delta, a_2+\delta]}_{= U_\delta(a) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty}$ sind.

Sei $h \in (0,\delta)$ zunächst fest und betrachte



$$F(h) := f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1,a_2).$$

Beobachtung:

$$F(h) = \varphi(a_1+h) - \varphi(a_1),$$

wobei

$$\begin{cases} \varphi(t) := f(t, a_2+h) - f(t, a_2) \\ \varphi : [a_1, a_1+h] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Mittelwertsatz

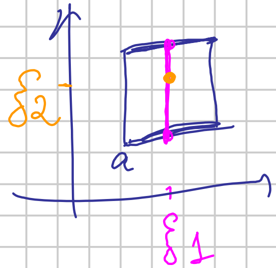
Nach Vorauss. ist φ diff'bar. Der MWS aus Ana 1 impliziert:

$$F(h) = h \cdot \varphi'(\xi_1) =$$

für ein $\xi_1 \in [a_1, a_1+h]$

Def. von φ

$$= h\,[f_x(\xi_1, a_2+h) - f_x(\xi_1, a_2)]$$



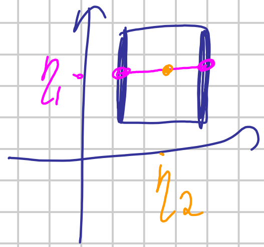
MWS angew. auf $f_x(\xi_1, \cdot) : [a_2, a_2+h] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$= h^2 f_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$

für ein $\xi_2 \in [a_2, a_2+h]$.

Analog (warum?) gilt

$$F(h) = h^2 f_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$



für ein $(\eta_1, \eta_2) \in [a_1, a_1+h] \times [a_2, a_2+h]$

Wir haben also:

$\forall h \in (0, \delta) \quad \exists (\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2) \in [a_1, a_1+h] \times [a_2, a_2+h]$ mit

$$f_{xy}(\xi_1, \xi_2) = f_{yx}(\eta_1, \eta_2) \qquad (\text{da } h^2 \neq 0)$$

$$f_{xy}(a) \xleftarrow{h \downarrow 0} f_{xy}(\xi_1,\xi_2) = f_{yx}(\eta_1,\eta_2) \xrightarrow{h \downarrow 0} f_{yx}(a),$$

da f_{xy}, f_{yx} stetig in a sind $\left(h \downarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} (\xi_1, \xi_2) \to a \\ (\eta_1, \eta_2) \to a \end{cases} \right)$ $\boxed{\vdots}$ ∎

$\boxed{\text{Bsp } 1.12}$ Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Frage: wann gilt $v = \operatorname{grad} f$ für eine Fkt $f : U \to \mathbb{R}$?

Sei v ist part. diff'bar (d.h., $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\forall v_j : U \to \mathbb{R}$ ist part. diff'bar)

Def. die Rotation von v durch

$$\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Ang., $v = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$ für ein $f \in C^2(U)$.

Wir zeigen:

$$\operatorname{rot} v = \boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0}$$

Nach Satz 1.11 gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$$

$$\underset{\text{Satz 1.11}}{=} (0, 0, 0).$$

D.h., $\operatorname{rot} v = 0$ ist eine notwendige Bedingung für $v = \operatorname{grad} f$ für ein $f \in C^2(U)$.

Bem. 1) Erinnere: Das Vektorprodukt von $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ aus $\mathbb{R}^3$ ist def. durch

$$x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt formal: $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$

und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \iff \nabla \times \nabla f = 0$. (Analogie zu $x \times x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$).

2) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^2(U)$, $f: U \to \mathbb{R}$. Bezeichne

Delta

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d^2}$$

($\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist eine Abkürzung für $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$)

Man nennt

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

franz. Mathematiker und Astronom

Laplace-Operator

$\left(\text{Fkt}: U \to \mathbb{R} \xmapsto{\Delta} \text{Fkt}: U \to \mathbb{R} \right)$

in der mathematischen Physik heißt die Gleichung

$$\Delta f = 0$$

(d.h., $f_{x_1 x_1} + \dots + f_{x_d x_d} = 0$) **Potential-** oder **Laplace-Gleichung** und ihre C^2-Lösungen heißen **harmonische Funktionen**.

Für $f: U_{\subset \mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\underset{\text{Zeit}}{t}, \underbrace{x, y}_{\text{Raumkoordinaten}}) \longmapsto f(t, x, y)$, $f \in C^2$ bzgl. x und y, $f \in C^1$ bzgl. t

heißt

$$f_t = c\,(f_{xx} + f_{yy})$$

homogene Wärmeleitungsgleichung. Sie beschreibt die Änderung der Temperatur im Punkt (x, y) zum Zeitpunkt t.

Die 3-dim. Version lautet

$$f_t = c\,(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) \,, \quad f : U_{\subset \mathbb{R}^4} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(\underbrace{t}_{\text{Zeit}}, \underbrace{x, y, z}_{\text{Raumkoord.}}) \longmapsto f(t, x, y, z)$$

$\boxed{\text{Def. 1.13}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$.

heißt f

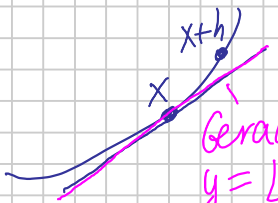
- (n-mal) partiell diff'bar, wenn jede Komponentenfkt f_j (n-mal) part. diff'bar ist.
- (n-mal) stetig partiell diff'bar, wenn –"– (n-mal) stetig –"–.

(schreibe $f \in C^n(U)$).

2. (Totale) Differenzierbarkeit

Erinnerung 1) Ana 1: f ist diff'bar in x $\iff$

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{f'(x)h}_{=: L(h)} + r(h)$$



mit $\dfrac{r(h)}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Dabei ist $L(h)$ linear in h: $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$$
$$L(c \cdot h) = c \cdot L(h) \quad \forall h_1, h_2, h \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

2) Lin A 1: Sei $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann $\exists$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix} \in M_{\underbrace{m}_{\text{Zeilen}} \times \underbrace{d}_{\text{Spalten}}}(\mathbb{R})$$

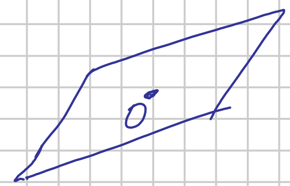
mit

$$L(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1d} x_d \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{md} x_d \end{pmatrix}$$

Dabei gilt für die Einheitsvektoren $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – j-te Stelle

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ – die j-te Spalte von A.

Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d : Lx = 0\}$ ist eine Hyperebene durch 0



Details: HÜ

$\boxed{\text{Def. 2.1}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f (total) diff'bar in x, wenn es eine lineare Abb. $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\boxed{\underbrace{f(\overset{\in}{x}+\overset{\in}{h})}_{\mathbb{R}^d\ \mathbb{R}^d} - \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}^m} = \underbrace{L(h)}_{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{r(h)}_{\in\mathbb{R}^m}}$$

für eine Abb. $r: U \to \mathbb{R}^m$ mit $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0}$

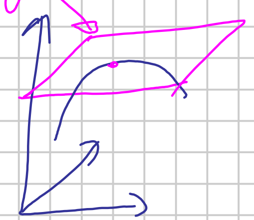
<u>Äquivalent</u>: $\exists A \in M_{m\times d}(\mathbb{R})$ mit

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = Ah + r(h)}$$

für eine Abb. $r: U \to \mathbb{R}^m$ mit $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0}$.

<u>Bem.</u> Im Fall $m=1$ approximieren wir damit den Graphen von f mit einer Hyperebene durch $(x, f(x))$.

$y = L(h) + f(x)$



Satz 2.2 (<u>Eindeutigkeit und Darstellung der Matrix A</u>)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in x mit

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}.$$

Dann ist $\forall f_j$ in x partiell diff'bar und es gilt $\boxed{A = J_f(x)}$, wobei

$\dot{J}_f(x)$ die sog. **Jacobimatrix**

$$\boxed{\dot{J}_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}}$$

von f in x ist.

Beweis Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix}$ und $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$

haben wir $\forall j \in \{1, \dots, m\}$

$$f_j(x+h) - f_j(x) = \underbrace{a_{j1} h_1 + \dots + a_{jd} h_d}_{j\text{-te Koordinate von } Ah = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}} + r_j(h)$$

mit $\lim_{h \to 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0$ nach Voraussetzung.

– da Konv. = koordinatenweise Konv. in $\mathbb{R}^m$

Sei nun $h = t e_k$ für ein festes $k \in \{1, \dots, d\}$, d.h., $h = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← j-te Stelle

Dann gilt $f_j(x + t e_k) - f_j(x) = a_{jk} t + \rho_j(t)$

für $\rho_j(t) := r_j(t e_k)$, wobei $\lim_{t \to 0} \frac{\rho_j(t)}{|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{r_j(t e_k)}{\|t e_k\|_\infty} \to 0$.

Also ist f_j in die k-te Richtung partiell diff'bar mit

$$a_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Def. 2.3}}$ Für eine in $x \in U$ diff'bare Fkt $f: U_{\subset \mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}^m$ heißt die (eindeutige) lin. Abbildung $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ bzw. die Matrix $A \in M_{m \times d}(\mathbb{R})$ die Ableitung (oder (totales) Differenzial) von f in x, schreibe

$$f'(x) \text{ oder } Df(x).$$

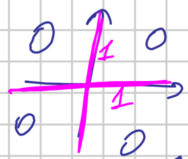
Nach Satz 2.2 gilt $\boxed{f'(x) = J_f(x)}$.

$\boxed{\text{Bem. 2.4}}$ 1) Es gilt also

$$A = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

2) Diff'barkeit (und die Ableitung) hängt nicht von der Wahl der Norm, da alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^m$ äquivalent sind.

3) $\underbrace{f \text{ part. diff'bar in } x}_{\exists J_f(x)} \not\Rightarrow \exists f'(x)$. $\boxed{\text{Bsp}}$



$J_f(0) = (0,0)$, aber f nicht diff'bar in 0 (Warum?)

Erinnerung LinA 1: Für eine lin. Abb. / Matrix $A \in M_{m\times d}$ $\exists$ Zahl $\|A\| \geq 0$ s.d.

$$\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\| \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$$

und $\|A\|$ ist die kleinste solche Zahl. ($\|A\|$ hängt von der Wahl der Normen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^d$ ab.)

z.B. gilt $$\|Ah\|_\infty \leq \underbrace{\max_j \{|a_{j1}| + \dots + |a_{jd}|\}}_{\text{Zeilensummennorm von } A} \cdot \|h\|_\infty$$

insb. ist jede lin. Abb. Lipschitz-stetig:

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \cdot \|x-y\|.$$

Satz 2.5 $f: U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist diff'bar in x $\Longrightarrow$ f ist stetig in x.

Beweis Nach Voraus. gilt

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{Ah}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \underbrace{r(h)}_{\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

und ist insb. beschr.: $\|r(h)\| \leq M \cdot \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Also ist f stetig in x. ■

Bsp 2.6 (Diff'bare Abbildungen)

1) Lineare Abb. sind diff'bar: Sei f gegeben durch

$$f(x) = Ax, \quad A \in M_{m\times d}(\mathbb{R}).$$

Dann haben wir

$$f(x+h)-f(x) = A(\cancel{x}+h) - \cancel{A x} \underset{\text{Linearität}}{=} Ah,$$

d.h., in diesem Fall hat man $r=0$.

2) Das Skalarprodukt $f(x) := \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$ auf $\mathbb{R}^d$ ist diff'bar:

$$f(x+h)-f(x) = (x_1+h_1)^2 + \dots + (x_d+h_d)^2 - x_1^2 - \dots - x_d^2$$

$$= \underbrace{2x_1h_1 + \dots + 2x_dh_d}_{= Ah} + \underbrace{h_1^2 + \dots + h_d^2}_{=: r(h)}$$

für $A = (2x_1, \dots, 2x_d) = \nabla f(x)$ und es gilt

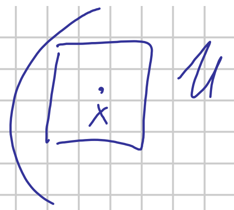
$$\frac{r(h)}{\|h\|_2} = \|h\|_2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Erinnere: f part. diff'bar $\not\Rightarrow$ diff'bar. Aber es gilt:

$\boxed{\text{Satz 2.7}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff'bar. Wenn alle part. Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x stetig sind, dann ist f total diff'bar.

Bem. Nach Sätzen 2.5 und 2.7 gilt: $\boxed{f \in C^1(U) \Rightarrow f \text{ stetig}}$

Beweis von 2.7 Nach Vorauss. $\exists\ U_\delta(x) \subset U$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$



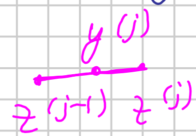
Sei $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $|h_j| < \delta\ \forall j$.

Idee: gehe schrittweise vor: definiere

$$z^{(0)} := x,\ z^{(1)} := x + h_1 e_1,\ z^{(2)} := x + h_1 e_1 + h_2 e_2,\ \dots,\ z^{(d)} := x + \underbrace{h}_{h_1 e_1 + \dots + h_d e_d}.$$

Für ein $j \in \{1, \dots, d\}$ ist f partiell diff'bar in $z^{(j)}$, insb. in Richtung e_j.

MWS (Ana 1): $\exists\ y^{(j)}$ zwischen $z^{(j)}$ und $z^{(j-1)}$ mit

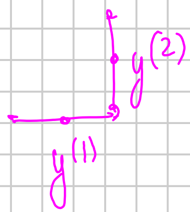


$$f(z^{(j)}) - f(z^{(j-1)}) = f_{x_j}(y^{(j)})\, h_j$$

Also erhalten wir (Teleskopsummenargument):

$$\underbrace{f(x+h)}_{z^{(d)}} - \underbrace{f(x)}_{z^{(0)}} = \big(f(z^{(d)}) - f(z^{(d-1)})\big) + \big(f(z^{(d-1)}) - f(z^{(d-2)})\big) + \dots + \big(f(z^{(1)}) - f(z^{(0)})\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} f_{x_j}(y^{(j)})\, h_j,$$



d.h.

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} f_{x_j}(x)\, h_j}_{\substack{\text{linear in } h_j \\ = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_d}(x)) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \big(f_{x_j}(y^{(j)}) - f_{x_j}(x)\big) h_j}_{=:\, r(h)}$$

Dabei erfüllt r:

$$\frac{r(h)}{\|h\|_\infty} \le \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\left| f_{x_j}(y^{(j)}) - f_{x_j}(x) \right|}_{\xrightarrow{h\to 0}\, 0}$$

$\xrightarrow{h\to 0} 0$, da f_{x_j} stetig in x ist ($h \to 0 \Rightarrow y^{(j)} \to x$ $\boxed{\cdot}$)

Also ist f diff'bar in x. $\blacksquare$

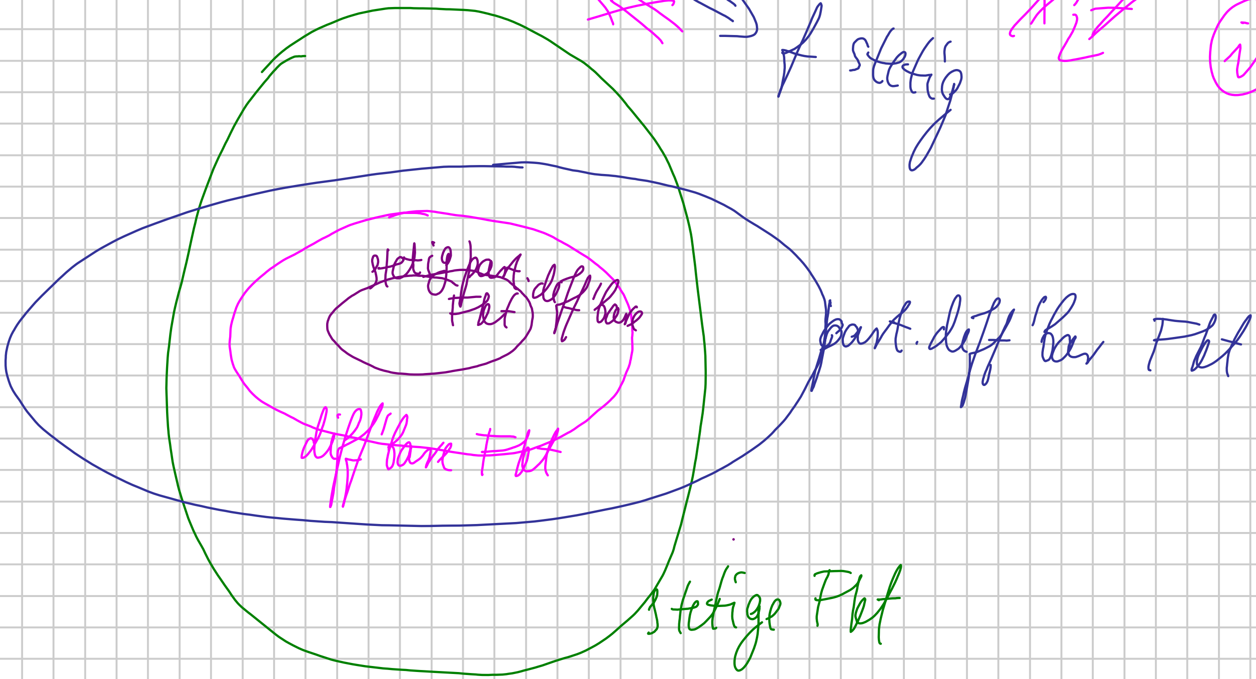
<u>Bem.</u> Es gilt also:

f stetig part. diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f part. diff'bar

f diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f stetig

f part. diff'bar $\not\Rightarrow$ f stetig, f stetig $\not\Rightarrow$ f part. diff'bar

:)



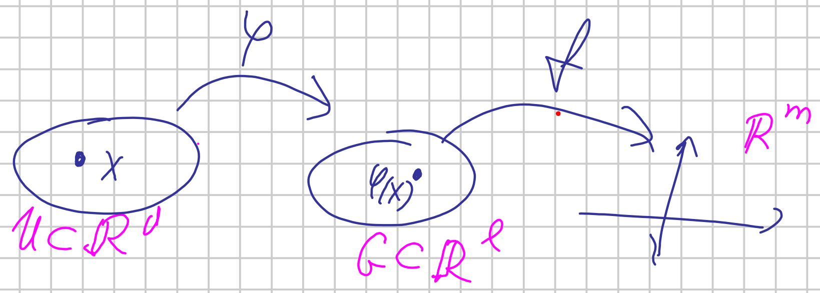
Satz 2.8 (Differentiationsregeln)

1) Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in $x \in U$, $c \in \mathbb{R}$.
Dann sind $f+g$ und $c \cdot f$ diff'bar in x und

$$\boxed{\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (cf)'(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^d}) &= c \cdot \underbrace{f'(x)}_{(m\times d)\text{-Matrix}}\end{aligned}}$$

– Linearität der Ableitung

2) Seien $U \subset \mathbb{R}^d$, $G \subset \mathbb{R}^\ell$ offen,
$\varphi : U \to G$, $f : G \to \mathbb{R}^m$,
φ diff'bar in $x \in U$, f diff'bar in $\varphi(x) \in G$.



Dann ist $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in x mit

$$\boxed{\underbrace{(f\circ\varphi)'(x)}_{(m\times d)\text{-Matrix}} = \underbrace{f'(\varphi(x))}_{(m\times \ell)\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{(\ell\times d)\text{-Matrix}}}$$

– Kettenregel

3) Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ (d.h., $m = 1$) diff'bar in $x \in U$.

Dann ist auch $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ diff'bar mit

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Zahl}}\, \underbrace{g'(x)}_{\nabla g - (1\times d)-\text{Matrix}} + \underbrace{f'(x)}_{\nabla f - (1\times d)-\text{Matrix}} \cdot \overbrace{g(x)}^{\text{Zahl}}}$$ – **Produktregel**

(wobei Matrix · Zahl wie Zahl · Matrix def. ist)

$(\longrightarrow) = (\cdot)\cdot(\longrightarrow) + (\longrightarrow)\cdot(\cdot)$

Wenn $g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diff'bar in x mit

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$ – **Quotientenregel**

Beweis 1) Nach Voraus. haben wir:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)\cdot h + r_1(h)$$
$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + r_2(h), \quad \frac{r_j(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad j = 1,2.$$

Daraus folgt: $(f+g)(x+h) - (f+g)(x) = \underbrace{(f'(x) + g'(x))h}_{\text{lin. in } h} + \underbrace{(r_1(h) + r_2(h))}_{\frac{\|\cdot\|}{\|h\|} \le \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|}}$

$\Longrightarrow$ $f+g$ diff'bar in x mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

c.f.: Ü

2), 3) wie in Ana 1: HÜ

"■" $\xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$\boxed{\text{Bsp } 2.9}$ 1) Polynome und rationale Fkt'en mit mehreren Variablen sind diff'bar: $p(x_1,\dots,x_d) = \sum_{j_1,\dots,j_d=0}^{k} a_{j_1,\dots,j_d}\, x_1^{j_1}\cdots x_d^{j_d}$

$\left(= a_{0,\dots,0} + a_{1,0,\dots,0}\,x_1 + \dots + a_{0,\dots,0,1}\,x_d + a_{1,1,0,\dots,0}\,x_1x_2 + \dots\right)$

(da stetig partiell diff'bar für $\underbrace{\text{Monome}}_{p(x_1,\dots,x_d) = x_j \text{ reichen}}$ + Rechenregeln),

rat. Fkt: $\frac{p}{q}$, p, q Polynome

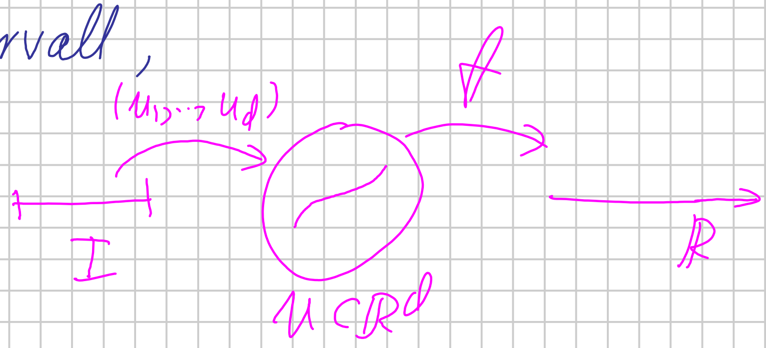
2) Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,

$f: U \to \mathbb{R}$ $(m=1)$, $u_1,\dots,u_d: I \to \mathbb{R}$ diff'bar

mit $(u_1(t),\dots,u_d(t)) \in U$. Dann

ist die Fkt $g: I \to \mathbb{R}$ def. durch

$$g(t) := f(u_1(t),\dots,u_d(t))$$



diff'bar mit

$$\boxed{\begin{aligned} g'(t) &= f_{x_1}(u_1(t),\dots,u_d(t))\cdot u_1'(t) + \dots + f_{x_d}(u_1(t),\dots,u_d(t))\cdot u_d'(t) \\ &= \nabla f(u_1(t),\dots,u_d(t))\cdot \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_d'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$(\cdot) = (\longrightarrow)$

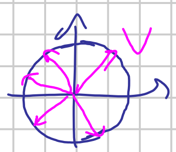
Der Beweis folgt aus Satz 2.8, 2) für $\varphi: I \to U$, $\varphi(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_d(t) \end{pmatrix}$

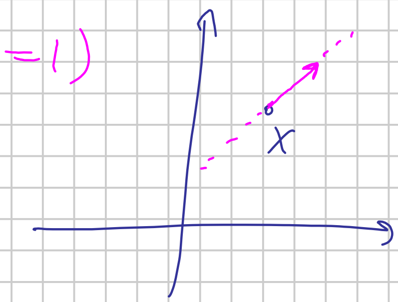
warum?

Bsp (konkreter): $g(t) = f(t, t^2) \Rightarrow g'(t) = f_x(t,t^2) + f_y(t,t^2)\cdot 2t$.

Def. 2.10 Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ $(m=1)$

1) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ heißt <u>Richtungsvektor</u>, wenn $\|v\|_2 = 1$.

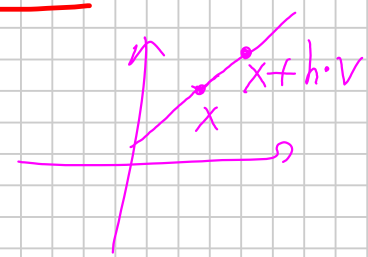




2) Für einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^d$ heißt f diff'bar in x in Richtung v, wenn der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot v) - f(x)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt Richtungsableitung von f in x in Richtung v, schreibe auch $D_v f(x)$ oder $f_v(x)$. – selten.

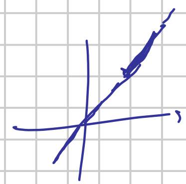


$\underbrace{x+h\cdot v}_{\in \mathbb{R}}$ ist ein (beliebiger) Punkt auf der Geraden durch x in Richtung v.

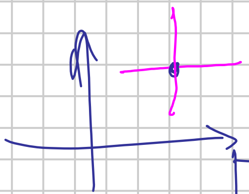
Bem.: 1) $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ist die klassische Ableitung der Fkt

$$t \mapsto f(x + t\cdot v)$$

in 0.



– Nur die Werte von f auf der Geraden $t \mapsto x + t\cdot v$ sind wichtig.



2) $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$ ist die partielle Ableitung in Richtung e_j.

Satz 2.11 Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x \in U$.

Dann ex. die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ $\forall$ Richtungsvektor v und

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \underbrace{f'(x)}_{\nabla f} \cdot v = f_{x_1}(x) \cdot v_1 + \ldots + f_{x_d}(x) \cdot v_d}$$

Bem. Es gilt also $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v}$

Beweis Nach Vorauss. gilt für hinreichend kleine $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

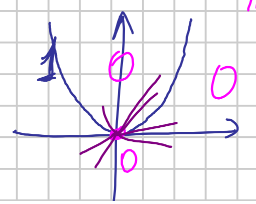
$$\frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = \frac{f'(x) \cdot h \cdot v + r(h \cdot v)}{h} = f'(x) \cdot v + \underbrace{\frac{r(h \cdot v)}{h}}_{\to 0 \text{ nach Vorauss,}}$$

da $\frac{r(hv)}{|h|} = \frac{r(hv)}{\|h v\|_2} \xrightarrow{hv \to 0} 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = f'(x) \cdot v$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp } 2.12}$ $\forall v\ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x) \not\Rightarrow f$ diff'bar in x (nicht mal stetig!)



Bsp: $f(x,y) := \begin{cases} 1, & y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

- f nicht stetig
- $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0 \ \forall v$ - Ü / HÜ

$\boxed{\text{Bem. 2.13}}$ (Geometrische Interpretation des Gradienten)

Sei $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$, diff'bar in $x \in U$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ und sei v ein Richtungsvektor. Dann ist der Winkel θ zwischen v und $\nabla f(x)$ wohldef. und erfüllt:

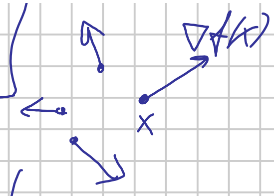
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f, v \rangle = \|\nabla f\|_2 \cdot \underbrace{\|v\|_2}_{=1} \cdot \cos\theta = \|\nabla f\|_2 \cdot \cos\theta$$

Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$

D.h., $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ist $\begin{cases} \text{maximal für } \theta = 0, \text{ d.h., wenn } v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2} \\ \text{minimal für } \theta = \pi, \text{ d.h., wenn } v = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}. \end{cases}$

Also gibt $\nabla f(x)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f und $-\nabla f(x)$ —"— schwächsten —"—

von f an.



Alternativ sieht man das mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

mit „=" $\iff$ x und y linear abhängig.

Details: Hü

Es gilt allgemein: $\frac{\partial f}{\partial(-v)}(x) = \langle \nabla f, -v\rangle = -\langle \nabla f, v\rangle = -\frac{\partial f}{\partial v}(x)$

wenn f diff'bar

(oder: nach Def.)

Noch eine Eigenschaft des Gradienten

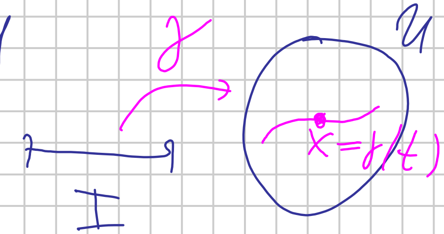
$\boxed{\text{Bem. 2.14}}$ (Orthogonalität von Gradient und Niveaumenge)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar in U

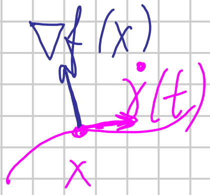
und $\gamma: I \to U$ ein diff'barer Weg, der

$\subset \mathbb{R}$ Intervall

in einer Niveaumenge von f verläuft, d.h., $f(\gamma(t)) = c$



für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $t \in I$. Dann steht der Gradient von f im Punkt $\gamma(t)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor $\dot\gamma(t)$:



$$\boxed{\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot\gamma(t)} \quad \forall t \in I.$$

In der Physik verwendet man $\dot\gamma(t)$ statt $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ bzw. $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t)$.

Beweis Kettenregel 2.8, 2):

$$\underset{\text{Vorauss.}}{0} = (f\circ\gamma)'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{f'(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle,$$

d.h., $\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot\gamma(t)$.

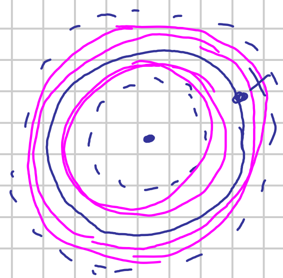
Bsp 2.15 (Rotationssymmetrische Fkt'en)

Sei $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar und streng monoton, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

und def. $f: \{x \in \mathbb{R}^d : a < \|x\|_2 < b\} \to \mathbb{R}$

durch

$$f(x) := F(\|x\|_2).$$



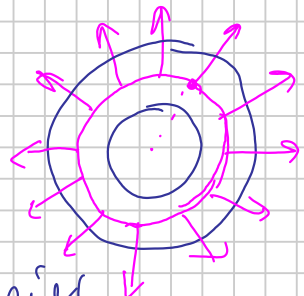
Dann sind die Niveaumengen von f kreisförmig (Sphären).

$f(x) = c \Rightarrow f(y) = c \quad \forall y$ mit $\|y\|_2 = \|x\|_2$

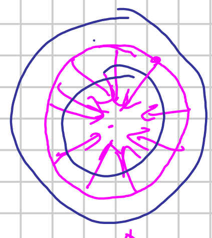
Außerdem gilt nach der Kettenregel:

$$(\nabla f)(x) = F'(\|x\|_2) \cdot \frac{x}{\|x\|_2},$$

d.h., f ist diff'bar.



$F' \geq 0$



$F' \leq 0$

Bem. 2.14: $\nabla f(x) \perp$ Niveaumenge und zeigt in die Richtung des stärksten Anstieges von f.

Heuser, Forster –

3. Mittelwertsätze

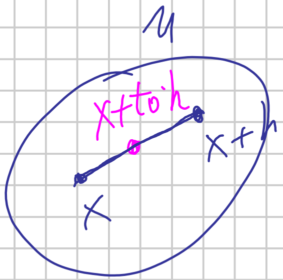
Erinnere: MWS in Ana 1: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diff'bar

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Ziel: Mehrdimensionale Version.

Satz 3.1 (MWS für reellwertige Fkt'en)

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar und $x, x+h \in U$



S.d. $[x, x+h] := \{ x + t\cdot h \ , \ t \in [0,1] \} \subset \mathcal{U}$.

Verbindungsstrecke

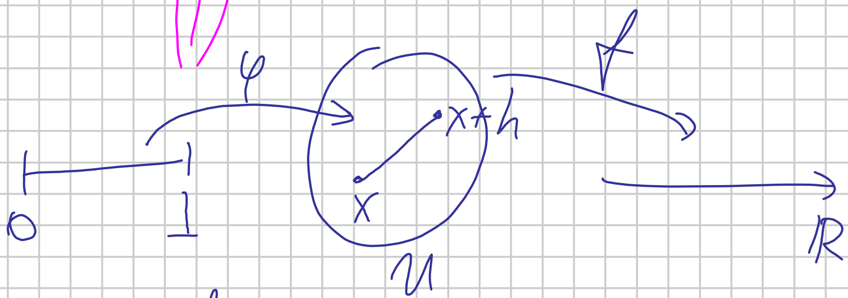
Dann $\exists\, t_0 \in (0,1)$ mit

$$\boxed{\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{f'(x+t_0h)}_{\nabla f(x+t_0h)}\cdot h}$$

$(\cdot) = (\longrightarrow)$

Beweis Def. $\varphi : [0,1] \to \mathcal{U}$ durch

$\varphi(t) := x + t\cdot h$.



Dann ist $f\circ\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

stetig in $[0,1]$ und in $(0,1)$ diff'bar nach der Kettenregel

da f und φ stetig

mit $(f\circ\varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{h} = f'(x+t\cdot h)\cdot h$.

MWS aus Ana 1: $\exists\, t_0 \in (0,1)$:

$$f(x+h)-f(x) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) \underset{\text{MWS für } f\circ\varphi}{=} f'(x+t_0h)\cdot h\cdot(1-0)$$

Bem. Für $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ für $m \geq 2$ gilt die Aussage i.A. nicht Ü

Hilfsmittel: Riemannintegral für vektorwertige Fkt'en

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Man definiert die Riemannsumme zu einer Zerlegung

$a \; x_1 \; \xi_1 \; b$

$Z = \{ \underset{=a}{x_0}, x_1, \dots, \underset{=b}{x_n} \}$ mit Zwischenstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$ wie in Ana 1 (2) durch

$$S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\xi_j)}_{\mathbb{R}^m} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^m$$

(Vektor · Zahl ist def. wie Zahl · Vektor)

und def.

$$\lim_{|Z| \to 0} S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) = c$$

Feinheitsmaß von Z:

wie früher: $|Z| = \max_j (x_j - x_{j-1})$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 : \forall Z \text{ mit } |Z| < \delta \;\; \forall \text{ Zwischenstellen } \xi_1, \dots, \xi_n$$

$$\| S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) - c \| < \varepsilon$$

(egal, welche Norm, da alle äquiv.)

Man sagt: f ist Riemann-integrierbar mit $\int_a^b f = c$.

Für $\|\cdot\|_\infty$ bekommen wir:

$$\boxed{f \text{ R.-int. mit } \int_a^b f = c \iff \forall j\ f_j \text{ R.-int. mit } \int_a^b f_j = c_j}$$

(Warum?)

d.h., man kann komponentenweise integrieren:

$$\boxed{\int_a^b f = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1 \\ \vdots \\ \int_a^b f_m \end{pmatrix}}$$

Analog def. man $\int_a^b A(t)\,dt$ für $A : [a,b] \to \underbrace{M_{d\times m}(\mathbb{R})}_{\text{sogar } \forall \text{ normierten Raum..}}$,

man hat

$$\int_a^b A = \begin{pmatrix} \int_a^b a_{11} & \cdots & \int_a^b a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b a_{m1} & \cdots & \int_a^b a_{md} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des R.-Integrals 3.2

1) Rechenregeln wie früher (Summe usw.)

2) f (bzw. A) stetig $\Longrightarrow$ R.-integr. (da komponentenweise so)

3) (Δ-Ungl. bzw. Standardabschätzung):

Für stetige Fkt'en gilt:

sogar für R.-integr.

$$\boxed{\left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|},$$

– kurze Schreibweise für $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,dt$

insb.

$$\boxed{\left\| \int_a^b f \right\| \le \sup_{[a,b]} \|f\| \cdot (b-a)},$$

analog für Matrizen.

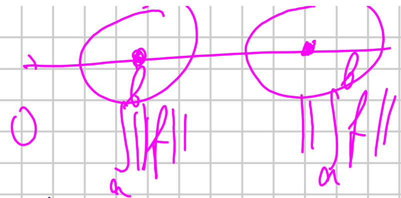
Beweis

$$\| \underbrace{S(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)}_{\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})} \| \underset{\substack{\Delta\text{-Ungl.} \\ \text{für } \|\cdot\| \text{ + homog.}}}{\le} \sum_{j=1}^n \|f(\xi_j)\| \cdot (x_j - x_{j-1}) = S(\|f\|, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

$|Z| \to 0$: $\quad \left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|$.

nimm eine Folge Z_n mit Zwischenstellen + Eigenschaft des Folgenlimes

oder: ang., $\left\| \int_a^b f \right\| > \int_a^b \|f\|$.



Nimm $\varepsilon := \frac{\text{Differenz}}{2}$ und führe zum Widerspruch zur Def. von $\int_a^b$

<u>Bem.</u>: $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist R.-integr. hier, da f stetig (und $\|\cdot\|$ stetig) ∎

4) $$\int_a^b A(t)h\,dt = \int_a^b A(t)\,dt \cdot h \quad , \quad A : [a,b] \to M_{m\times d}(\mathbb{R}) \text{ stetig}, \; h \in \mathbb{R}^d$$

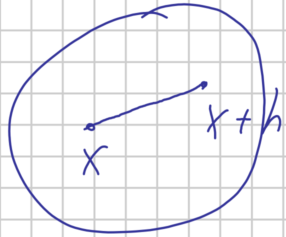
Idee: $$S(A(\cdot)h, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{j=1}^n A(\xi_j)h\,(x_j - x_{j-1})$$
$$= \left(\sum_{j=1}^n A(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right) \cdot h$$
$$= S(A(\cdot), Z, \xi_1, \dots, \xi_n) \cdot h$$

und $|Z| \to 0$: Details: Ü / HÜ

$\boxed{\text{Satz 3.3}}$ (MWS für vektorwertige Fkt'en)

Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar (f' stetig), $x, x+h \in U$ mit $[x, x+h] \subset U$. Dann gilt:

Mittelwertsatz in Integralform — $\boxed{f(x+h)-f(x) = \Big(\underbrace{\int_0^1 f'(x+th)\,dt}\Big)\cdot h}$.



Insbesondere gilt: $\underset{m\times 1}{(\ )} = \underset{m\times d}{[\ ]}\ \underset{d\times 1}{[\ ]}$

Schrankensatz — $\boxed{\|f(x+h)-f(x)\| \le \max\limits_{[x,x+h]} \|f'\|\cdot\|h\|}$

Norm in $\mathbb{R}^m$ Norm in $\mathbb{R}^d$

induzierte Norm für $(m\times d)$-Matrizen:
$\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$
(z.B. Zeilennorm zu $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^m$)

Bem. Erinnere: Ana 1, MWS der Integralrechnung:

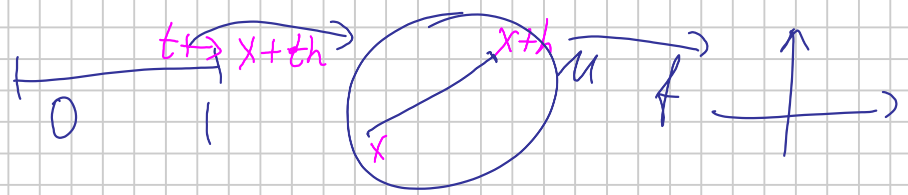
$$\int_0^1 f'(x+th)\,dt = f'(x+t_0 h)\cdot 1$$

Zwischenpunkt $\in (0,1)$

und wir bekommen den klassischen MWS zurück

Beweis von 3.3   Teil 1   Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $g_j(t) := f_j(x+t\cdot h)$,

$g_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$.



Nach Voraus. ist $\forall\, g_j$ stetig diff'bar mit

$$g_j'(t) = \underbrace{f_j'(x+th)}_{\text{stetig nach Vorauss.}} \cdot h,$$

also gilt nach Anm 1:

$$f_j(x+h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \underset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_0^1 g_j' = \int_0^1 f_j'(x+th)\, h\, dt$$

Damit:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+th)\, dt \cdot h$$

Teil 2 „Insbesondere":

$$\|f(x+h) - f(x)\| \underset{\text{Teil 1}}{=} \left\| \left(\int_0^1 f'(x+th)\, dt \right) \cdot h \right\| \underset{\text{induzierte Norm}}{\leq} \left\| \int_0^1 f'(x+th)\, dt \right\| \cdot \|h\|$$

$$\underset{\text{Satz 3.2, 2)}}{\leq} \underbrace{\int_0^1 \|f'(x+th)\|\, dt}_{\leq \max_{t\in[0,1]} \|f'(x+th)\|} \cdot \|h\|$$

∎

Bem. Man hat also eine „gemittelte" Ableitung

$$\int_0^1 f'(x+th)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_1)+\dots+f'(\xi_n)}{n}, \text{ wobei } \xi_j \in \left[\tfrac{j-1}{n}, \tfrac{j}{n}\right]$$

$0 \quad \frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \dots \quad 1$

statt die Ableitung in <u>einem</u> Zwischenpunkt

$\boxed{\text{Folgerung 3.4}}$ Sei $f: \underset{\subset \mathbb{R}^d}{U} \to \mathbb{R}^m$ mit $f' = 0$, U offen, zshgd.

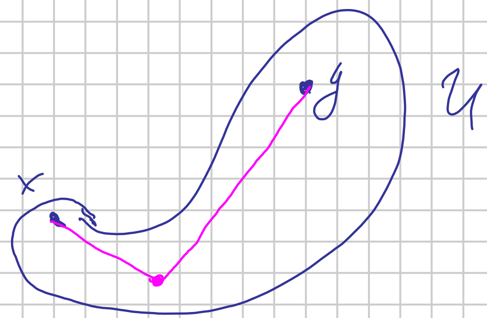
Dann ist f konstant. Insbesondere gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f, g: U \to \mathbb{R}^m \text{ mit} \\ \text{gleichen part. Abl.} \end{array}\right\} \Rightarrow f = g + \text{konst.}$$

<u>Beweis</u> 1) Nach Voraus. ist f stetig diff'bar.

MWS: $f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \underbrace{f'(x+th)}_{=0}\,dt \cdot h = 0$

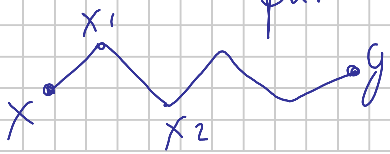
sobald $[x, x+h] \subset U$.



Erinnere: U offen + zshgd $\Rightarrow \forall x, y \in U$

$\exists$ Streckenzug durch $x, x_1, x_2, \dots, x_n, y$

für bestimmte $x_1, \dots, x_n \in U$.



Wir wissen:

$$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(y)$$

da $[x, x_1] \subset U$

2) Betr. $f-g$. Es gilt: $J_{f-g} = 0$, $f-g$ ist also stetig partiell diff'bar $\Rightarrow$ diff'bar mit Ableitung 0.

jacobimatrix

Teil 1: $f-g = \text{konst}$.

Bem. 1) Die Aussage ist falsch i.A. für U nicht zshgd:

2) Wie in Ana 1 gilt:

$f, g: U \to \mathbb{R}$, U offen, zshgd.

$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ haben gleiche} \\ \text{part. Abl. } n\text{-ter Ordnung} \end{array}\right\} \Rightarrow f = g + p$

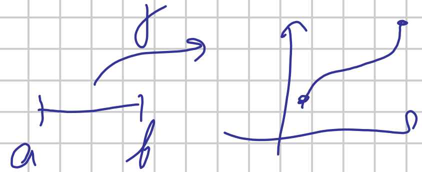
Polynom: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\deg p \leq n-1$

U

$\boxed{\text{Bem. 3.5}}$ Als Hilfsmittel wurde das Riemann-Integral für Wege $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ def.

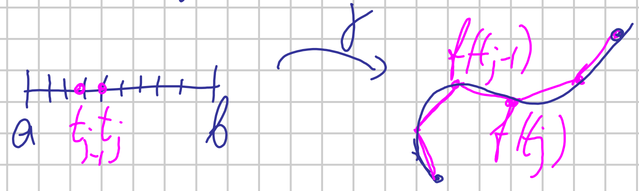
Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ein Weg

(In manchen Büchern nennt man γ eine Kurve)



in manchen — " —— $\gamma([a,b])$ — " —)

Dann heißt γ **rektifizierbar** mit der **Länge** $L(\gamma)$, wenn gilt:

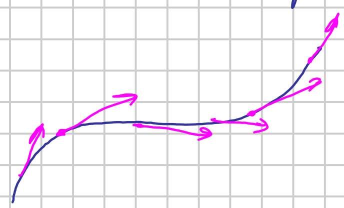


$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall$ Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ mit Feinheit $< \delta$

$$\Big| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \| f(t_j) - f(t_{j-1}) \|_2}_{\text{Die „natürliche" Länge des Streckenzuges durch } f(a), f(t_1), \dots, f(t_n), f(b)} - L(\gamma) \Big| < \varepsilon$$

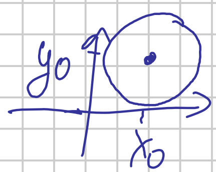
Es gilt: $\forall$ stetig diff'barer Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ist rektifizierbar mit

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\gamma'(t)\|_2}_{\text{stetig in } t}\, dt}$$



Beweis: Hier (Forster)

Bsp (Kreis) Sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$



def. durch
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos t \\ y_0 + r\sin t \end{pmatrix}$$

$\gamma[0,2\pi]$ ist der Kreis mit Radius r um (x_0, y_0).

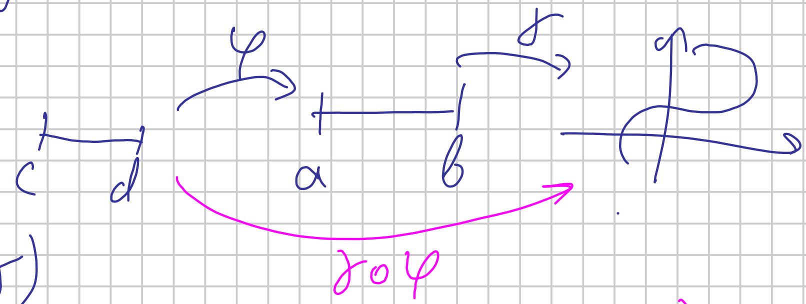
Es gilt:
$$\gamma'(t) = \nabla\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \text{ - stetig.}$$
$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r$$

Damit haben wir
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = 2\pi \cdot r$$

Bem. Die Länge des Weges hängt nicht von der Parametrisierung ab:

Sei $\gamma : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar mit Länge $L(\gamma)$

Sei $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$, bij und stetig diff'bar



Dann gilt:
$$L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$$

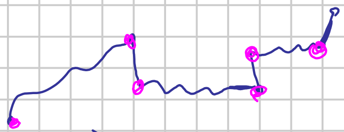
(γ und $\gamma \circ \varphi$ sind zwei Parametrisierungen von $\gamma[a,b]$)

Beweis $\underbrace{L(\gamma\circ\varphi)} = \int_c^d \|(\gamma\circ\varphi)'(s)\|_2\, ds \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_c^d \|\gamma'(\underbrace{\varphi(s)}_{=:t})\|_2 \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\text{Zahl} > 0}\, \overbrace{ds}^{dt}$

$= \left[\begin{array}{l} \text{Variabel subst.} \\ t := \varphi(s),\ dt = \varphi'(s)ds \end{array} \right] = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2\, dt = L(\gamma)$ ■

stetige Zusammenfassung von endlich vielen stetig diff'baren Wegen : $\exists$ Zerlegung von $[a,b]$: γ stetig auf $[a,b]$ und stetig diff'bar $\forall [t_{j-1}, t_j]$

Bem. 1) Stückweise stetig diff'bare Wege sind auch rektifizierbar mit entsprechender Länge $= \sum L(\gamma_j)$: Ü / HÜ



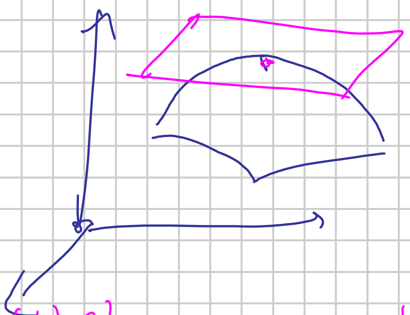
2) $\exists$ stetiger Weg, der nicht rektifizierbar ist.

3) Ein stetig diff'barer Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ heißt regulär, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ gilt. Falls für ein $t \in [a,b]$ $\gamma'(t) = 0$ gilt, heißt t singulär.

Forster – Königsberger

4. Taylorapproximation

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$



__Ziel__: Taylorapproximation von f.

__Multiindexnotation__: Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N}_0)^d$ Multiindex

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

def:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{N}_0$$

$|(0,2)| = 2$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_d! \in \mathbb{N} \quad (\text{wobei } 0! := 1)$$

$(0,2)! = 2!$

Für eine $|\alpha|$-mal stetig diff'bare Fkt $f: U \to \mathbb{R}$ setze

$$D^\alpha f := D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} : U \to \mathbb{R},$$

wobei

$$D_{x_j}^{\alpha_j} = \underbrace{D_{x_j} \cdots D_{x_j}}_{\alpha_j\text{-mal}}$$

$$D^{(0,2)} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

$$D^{(1,1)} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

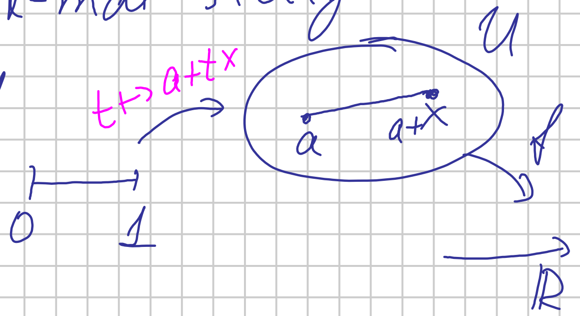
Für $x := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ def.

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d} \in \mathbb{R}$$

$$(x,y)^{(3,5)} = x^3 \cdot y^5$$

Def. $D_j := D_{x_j}$.

$\boxed{\text{Lemma 4.1}}$ Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig diff'bar. Seien $a, x \in \mathbb{R}^d$ mit $[a, a+x] \subset U$.



Dann ist die Fkt

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(t) := f(a+tx)$$

k-mal stetig diff'bar mit

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \underbrace{(D^\alpha f)(a+tx)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{x^\alpha}_{\in \mathbb{R}}$$

<u>Beweis</u> <u>Schritt 1</u> Wir zeigen zuerst:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{d} (D_{j_k} \cdots D_{j_1} f)(a+tx) \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_k}$$

Induktion nach k:

$k = 1$: Kettenregel:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(a_1 + tx_1, \dots, a_d + tx_d)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} (D_j f)(a+tx) \cdot x_j$$

$k-1 \rightsquigarrow k$

$$g^{(k)}(t) \overset{\text{IV}}{=} \frac{d}{dt}\left(\sum_{j_1,\dots,j_{k-1}=1}^{d} (D_{j_{k-1}} \cdots D_{j_1} f)(a+tx) \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_{k-1}} \right)$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j_k=1}^{d} D_{j_k}\left(\text{—''—} \right) x_{j_k}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{d} (D_{j_k} D_{j_{k-1}} \cdots D_{j_1} f)(a+tx) x_{j_1} \cdots x_{j_{k-1}} \cdot x_{j_k}$$

__Schritt 2__ Nach dem Satz von Schwarz 1.11 gilt:

$$D_{j_l} D_{j_m} = D_{j_m} D_{j_l} \quad \forall m, l.$$

__Behauptung__: Der Index 1 kommt genau α_1-mal vor, ...,
—''— d —''— α_d-mal vor

in genau $\dfrac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!}$ der Tupel $(j_1, \dots, j_k)$.

__Beweis__: Ü

$\frac{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-\alpha_1+1)}{\alpha_1!}$ = Anzahl der Möglichkeiten, index 1 α_1-mal unterzubringen (ohne Beachtung der Reihenfolge)

$\frac{(k-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (k-\alpha_1-\alpha_2+1)}{\alpha_2!}$ — " — index 2 α_2-mal auf den gebliebenen Stellen unterzubringen

Also gilt:

$$g^{(k)}(t) \underset{\text{Umordnen}}{=} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!} \left(D_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_d^{\alpha_d} f\right)(a+tx) \, x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(D^\alpha f\right)(a+tx) \cdot x^\alpha \qquad \blacksquare$$